MA1001-2 Introducción al Cálculo
Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 8

Resumen:

- $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado sup. mente $\Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)\ x \leq M$ (M es cota superior de A).
- $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado inf. mente $\Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in A)\ x \geq m$ (m es cota inferior de A).
- $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado si es acotado inferiormente y superiormente.
- $\overline{x} \in A \subseteq \mathbb{R}$ es máximo de $A \Leftrightarrow \overline{x}$ es cota superior de A
- $\underline{x} \in A \subseteq \mathbb{R}$ es mínimo de $A \Leftrightarrow \underline{x}$ es cota inferior de A
- s es **supremo** de $A \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow$ (1) s es cota superior de A. (2) s es la menor de las cotas superiores de A.
- i es ínfimo de $A \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow$ (1) i es cota inferior de A. (2) i es la mayor de las cotas inferiores de A.
- **Caracterización del supremo:**
  $\sup(A) = s \Leftrightarrow$ (1) s es cota superior de A. (2) $(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A)\ x > s - \epsilon$.
- Caracterización del ínfimo:
  $\inf(A) = i \Leftrightarrow$ (1) i es cota inferior de A. (2) $(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A)\ x < i + \epsilon$.
- **Propiedad arquimediana:** $(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ \epsilon n > 1$
- **Axioma del Supremo:** Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente tiene supremo (análogo para el ínfimo).

(**P**1) *a*) Demuestre que si A y B son acotados superiormente y no vacíos entonces también lo son $A \cup B$ y $A \cap B$.

b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que posee elemento máximo $M \in A$, demuestre utilizando la caracterización del supremo que $M = \sup(A)$.

(**P**2) Analice existencia y calcule supremo de los siguientes conjuntos, justifique su cálculo con una demostración formal.

(I) (a, b)

(II) $\{(-1)^n - \frac{1}{n} \in R : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

(III) $\{-\frac{1}{f(n)} :\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, estrictamente creciente.

(**P**3) Sea $A = \left\{ \dfrac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$. Demuestre que $\inf(A) = 1$.

(**P**4) Muestre que $\sup(\sqrt{A}) = \sqrt{\sup(A)}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}_+$, es no vacío y acotado superiormente. Considere $\sqrt{A} = \{\sqrt{x} \ : \ x \in A\}$.

Bonus pa' la casa: Generalice este resultado para toda función $f : A \to \mathbb{R}$, biyectiva y creciente estricta: es decir, pruebe que $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$.
Hint pa'l bonus: probar que f^{-1} es creciente.

(**P**5) Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que:

$$(\forall x \in S)(\forall y \in T)\ x \leq y$$

Probar que S tiene supremo, que t tiene ínfimo y que $\sup(S) \leq \inf(T)$.

Bonus pa' la casa: Suponga ahora que $S \cup T = \mathbb{R}$, pruebe que $\sup(S) = \inf(T)$.