

MA1001-2 Introducción al Cálculo**Profesora:** Natacha Astromujoff**Auxiliar:** Felipe Salas.

Auxiliar 1

1. Axiomas de Cuerpo de los Reales

1.1. Resumen:

1. Axiomas:

- (1) Conmutatividad.
- (2) Asociatividad.
- (3) Distributividad.
- (4) Existencia de Neutros.
- (5) Existencia de Inversos.

2. Propiedades útiles:

- (I) Unicidad de neutro e inverso.
- (II) Cancelación: $x(+/\cdot)a = y(+/\cdot)a \Leftrightarrow x = y$,
 $a \neq 0$.
- (III) Tabla del 0: $(\forall x \in \mathbb{R}) x \cdot 0 = 0$.

(P1) Demostrar, utilizando los axiomas de cuerpo de los números reales que:

- (a) $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) (x + y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$.
- (b) $(\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) (a^{-1})^{-1} = a$.
- (c) Utilizando lo anterior pruebe que si $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son tales que $a + b = 1$, entonces el inverso multiplicativo de $(a \cdot b)$ es $(a^{-1} + b^{-1})$.

(P2) Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use (si necesita otra propiedad debe demostrarla), demuestre que:

- (a) $(\forall a \in \mathbb{R}) a \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$.
- (b) $(\forall x \in \mathbb{R}) (-1)x = -x$.
- (c) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) (-b) \cdot (-a) = b \cdot a$.

(P3) Demuestre, utilizando los axiomas de cuerpo de los reales, la siguiente propiedad:

$$(-a)^{-1} = -(a^{-1}), \quad a \neq 0.$$

2. Axiomas de Orden de los Reales

2.1. Resumen:

1. Axiomas:

$$(II) (x \cdot y) \in \mathbb{R}_+^*.$$

(1) Tricotomía: $(\forall x \in \mathbb{R})$ se tiene una de las siguientes:

$$(I) x \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$(II) (-x) \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$(III) x = 0.$$

(2) Clausura: $(\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*)$ se cumple que:

$$(I) (x + y) \in \mathbb{R}_+^*.$$

2. Propiedades útiles:

$$(I) (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

(II) Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ fijo, entonces:

$$(I) |x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a) \vee (x \leq -a).$$

$$(II) |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

(P1) Dados $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, utilizando las propiedades de orden los reales demuestre las siguientes relaciones de desigualdad:

$$(a) (x + y)(x^{-1} + y^{-1}) \geq 4.$$

$$(b) x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$$

(P2) Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

$$(a) |x^2 - x - 2| \leq \frac{2}{3}x + 2.$$

$$(b) \frac{3 - 2x}{x^2 - |2x - 3|} \leq 0.$$

$$(c) \frac{||x| - |x - 2||}{x^2 - 1} \leq 2.$$