IN71A: Economía y Políticas Públicas

Pauta Auxiliar 9 – Riesgo e incertidumbre

Profesor: Pablo González
Auxiliar: José Miguel Sanhueza – jmsanhuezad@gmail.com

I. Preguntas conceptuales

1) *Explique los siguientes conceptos*

i. *Valor esperado*

Es la suma de la probabilidad de cada suceso multiplicado por su valor. Se calcula:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Donde xi es el valor de la variable aleatoria si ocurre el evento i, y pi es la probabilidad de que el evento i ocurra. Notar que como Σ(Pi)=1, el valor esperado se puede ver cómo un promedio ponderado.

ii. *Varianza*

Es una medida de su dispersión definida como la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media. Se calcula de la siguiente forma:

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2$$

iii. *Utilidad esperada*

Suma de utilidades correspondientes a todos los resultados posibles ponderados por la probabilidad de que se produzca ese resultado. Se calcula de la siguiente manera:

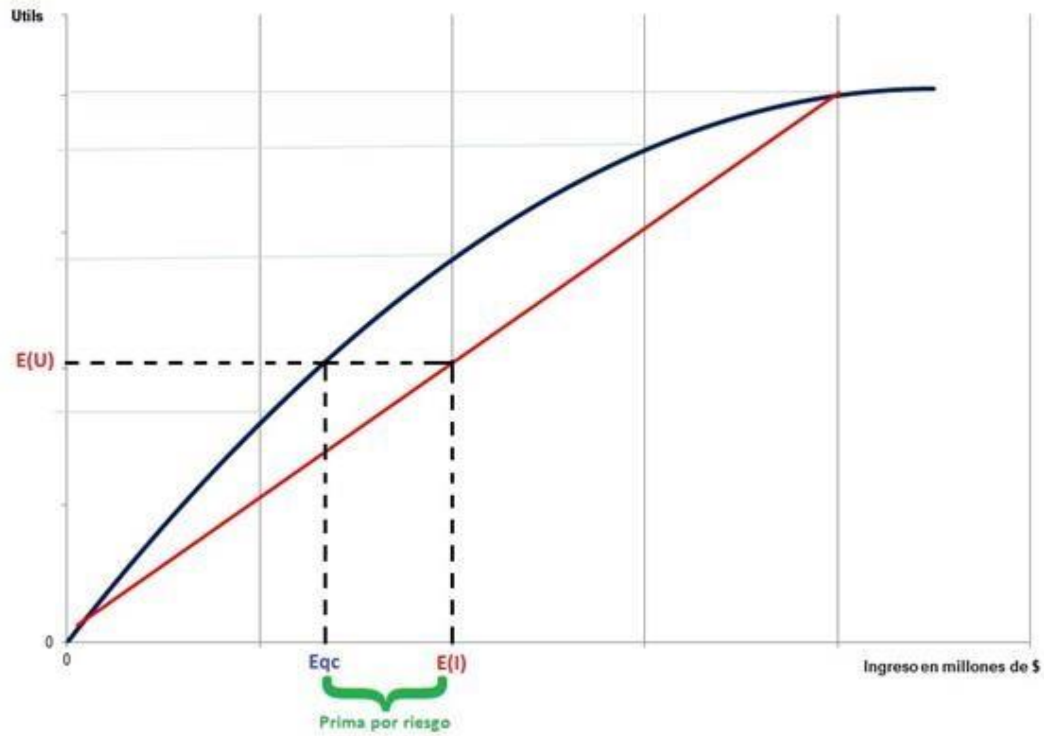
$$E(U) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) U(x_i)$$

iv. *Equivalente cierto*

Es el nivel de riqueza cierto que le entrega la misma utilidad esperada que la oferta/situación con riesgo.

v. *Prima por riesgo*

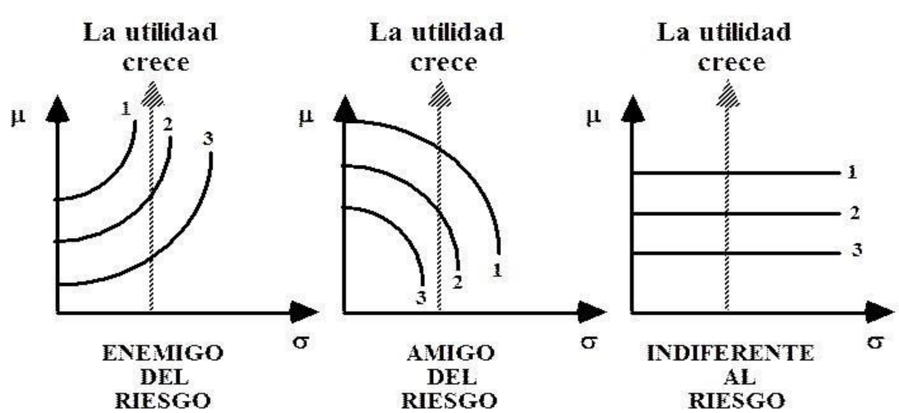
Es la disposición a pagar por eliminar el riesgo. También se puede definir como la cantidad máxima a pagar una persona renuente al riesgo por evitarlo.



2) *Grafique:*

i. *Las curvas de indiferencia entre utilidad esperada y riesgo para un individuo averso al riesgo, un neutral al riesgo, y un amante del riesgo*

Las curvas de indiferencia entre utilidad y riesgo (es decir, las combinaciones riesgo-utilidad esperada en las que el nivel de satisfacción del individuo es constante) en los tres casos mencionados tendrán la siguiente forma.



La curva de indiferencia de un averso al riesgo es convexa, pues ante un aumento del riesgo, exigirá un gran aumento de la utilidad esperada para que su bienestar no varíe.

Por el contrario, un amante del riesgo tendrá una curva de indiferencia cóncava: ante un aumento en el riesgo su exigencia de utilidad esperada será menor para que su bienestar no varíe.

Finalmente, un individuo neutral al riesgo tendrá una curva de indiferencia recta en el eje horizontal: indiferente del nivel de riesgo exigirá el mismo nivel de utilidad para que su bienestar no varíe.

Nótese que el eje del riesgo está dado por la desviación típica (δ) de los valores que puede asumir la utilidad esperada. Esta es la manera en que se formaliza algo que intuitivamente, podemos describir como que el riesgo es mayor cuando la diferencia entre un buen y un mal escenario es mayor.

ii. Las funciones de utilidad de un individuo averso al riesgo, un neutral al riesgo, y un amante del riesgo.

Las funciones de utilidad de los tres tipos de individuos tendrán la siguiente forma.

Una forma ilustrativa de comprender por qué las funciones de utilidad (es decir, la satisfacción que les reporta cada nivel de ingreso) tienen esas formas es la disposición que cada uno de estos individuos tendría de embarcarse en un proyecto de inversión.

La función de utilidad de un individuo averso al riesgo es cóncava, pues ante un mayor nivel de ingreso el nivel de satisfacción (utilidad) que le reporte embarcarse en un proyecto será menor (tiene más que perder).

Por el contrario, en un individuo amante del riesgo es convexa, ante un mayor nivel de ingreso el nivel de satisfacción que le reporte embarcarse en el proyecto será incluso mayor.

Finalmente, la función de utilidad de un individuo neutro al riesgo es neutra: para cada aumento de ingreso, el aumento en la utilidad (satisfacción) que le reporta será el mismo.

III. Ejercicios

1) *Usted va en auto en la carretera y tiene que pagar un peaje de $2.000. Si no paga el peaje, existe un 50% de probabilidad de que lo sorprendan, en cuyo caso deberá pagar el peaje adeudado más una multa de $3.000. Si su ingreso actual es de $10.000 y su función de utilidad es u(w)=ln(w), ¿pagará Ud. el peaje?*

   Tenemos dos decisiones posibles: pagar y no pagar. Luego, se decidirá en base a la utilidad esperada de ambos.

   En el caso de pagar, existe un único escenario posible (10000-2000). Luego, la utilidad esperada está dada por

   $$E(U\ pagar) = \ln(10.000-2.000) = \ln(8.000) = \mathbf{8,99}$$

   En el caso de no pagar, existe un escenario de ser sorprendido (10000-5000) y uno de no serlo (10000), ambos igualmente probables. Luego, la utilidad esperada está dada por:

   $$\begin{aligned} E(U\ no\ pagar) &= \ln(10.000-5.000)*0,5 + \ln(10.000)*0,5 \\ &= 8,51*0,5 + 9,21*0,5 \\ &= 4,26 + 4,61 \\ &= \mathbf{8,86} \end{aligned}$$

   La utilidad esperada de pagar es el peaje es mayor que la de no hacerlo. Por lo tanto, **la decisión final será pagar el peaje.**

2) *Un joven inversionista invirtió en una empresa de computación, ya que ella está a punto de lanzar al mercado un nuevo software llamado Puerta's que reemplazará al Ventana's Millenium Edition. Sin embargo, la industria del software está pasando por un momento de mucha competencia por lo cual no se sabe si cuando este producto salga al mercado no haya aparecido antes el nuevo producto de la competencia, Ventana's XP.*

   La probabilidad de que cuando Puerta's aparezca en el mercado ya haya aparecido Ventana's XP es de un 40% y en ese escenario los ingresos del inversionista son de 100 UM. Al contrario la probabilidad de que Puerta's salga al mercado y no haya aparecido Ventana's XP es de un 60% y en ese caso el inversionista recibe 900 UM.

   a. *Calcule el ingreso esperado de la inversión*

      El ingreso esperado está dado por:

$E(I) = 0,4*100 + 0,6*900 =$ **580** UM.

b. *Calcule la utilidad esperada de su inversión si su función de utilidad es $U(M)=M^{1/2}$*

La utilidad si lanza su software y apareció Ventana's XP es:

$U_1 = 100^{1/2} = \sqrt{100} = 10$

La utilidad si lanza su software y no apareció Ventana's XP es:

$U_1 = 900^{1/2} = \sqrt{900} = 30$

Por lo tanto, la utilidad esperada es:

$E(U) = 10*0,4 + 30*0,6 =$ **22**

c. *¿Cuánto es el premio por riesgo que está exigiendo el inversionista?*

En primer lugar se calcula un ingreso que entregue con certeza el mismo nivel de utilidad esperada (es decir, el equivalente cierto). Se tiene que:

$I^{1/2} = 22 \rightarrow I = 484$

Por lo tanto, el premio por riesgo es:

$E(I) – Eqc = 580 – 484 =$ **96 UM**

3) *Considere una lotería con tres posibles resultados: $100 serán recibidos con probabilidad de un 10%, $50 con probabilidad de un 20%, y $10 con probabilidad del 70%.*

a. *Determine el valor esperado de la lotería*

El valor esperado está dado por:

$E(L) = 100*0,1 + 50*0,2 + 10*0,7 =$ **27**

b. ¿Cuál es la varianza de los resultados de la lotería?

Tenemos los datos del pago que entrega cada escenario, y de la probabilidad con que puede suceder cada uno de ellos. Tenemos también del ejercicio anterior el valor esperado de la lotería (que es un promedio ponderado). Con eso, es posible obtener las medidas de dispersión que se necesitan

Pago (Xi)	**Probabilidad (Pi)**	**Desviación (Xi-E(L))**	**Desviación^2**	**Pi*Desviación^2**
100	0,1	73	5329	532,9
50	0,2	27	529	105,8
10	0,7	-17	289	202,3

Luego, la varianza está dada por: δ^2
= 532,9 + 105,8 + 202,3 = **841**

c. *¿Cuánto estaría dispuesto a pagar una persona neutra al riesgo?*

Una persona neutra al riesgo estaría dispuesta a pagar como máximo el valor esperado del pago de la lotería, es decir, **$27**.

4) *Un individuo cuya riqueza inicial es de $400 observa que existe una probabilidad de un 20% de tener un accidente, en cuyo caso debiera gastar $300 de su riqueza disponible, quedando con sólo $100. En caso de no sufrir accidente, su ingreso se mantiene constante (probabilidad 80%). El individuo maximiza su utilidad esperada y su función de utilidad es $u(W)=W^{0,5}$*

a. *Determine si el individuo es amante, neutro o averso al riesgo.*

Anteriormente vimos que si el individuo es averso al riesgo su función de utilidad será cóncava, si es neutro será recta y si es amante del riesgo será convexa.

La forma en que uno puede conocer si una función es cóncava o convexa es extrayendo su segunda derivada. Una función será convexa si es que su segunda derivada es positiva, mientras que será cóncava si es que es negativa.

Sabemos que la función de utilidad es: $u(W)=W^{0,5}$

Se tiene la primera derivada: $u' = 0,5*W^{-0,5}$

La segunda derivada queda: $u'' = \mathbf{-0,25*W^{-1,5}}$

Se tiene que es negativa, por lo tanto el individuo la función de utilidad es <u>cóncava</u>, lo que implica que el individuo **es averso al riesgo**

b. *¿Cuál es el monto esperado de dinero que perderá? ¿Cuál es su riqueza esperada?*

El monto esperado de dinero que perderá es:
E(P) = 0,2 * 300 + 0,8 * 0 = **60**

Mientras que la riqueza esperada es:
E(W) = 0,2 * 100 + 0,8 * 400 = **340**

c. *¿Cuál es su utilidad esperada?*

La utilidad esperada está dada por:
E(U) = 0,2 * U(100) + 0,8 * U(400)
$E(U) = 0,2 * 100^{1/2} + 0,8 * 400^{1/2}$

$E(U) = 0,2 * \sqrt{100} + 0,8 * \sqrt{400}$
$E(U) = 0,2 * 10 + 0,8 * 20$
$E(U) = \mathbf{18}$

d. *¿Cuál es el equivalente cierto?*

Es aquel ingreso que entrega con certeza el mismo nivel de utilidad esperada de la situación con incertidumbre. Luego:

$W^{0,5} = 18 \rightarrow W = \mathbf{324}$

e. *¿Cuál es el máximo monto que él pagaría por un seguro a todo evento?*

Es decir, cuál es la prima máxima que pagaría a una compañía aseguradora para que cubra todas sus pérdidas en caso de tenerlas. Luego, debe ser un monto tal que permita asegurar la utilidad esperada, es decir:

$U(400-P) = 18$

Y sabemos que el ingreso que permite asegurar con certeza dicho nivel de utilidad (es decir, el equivalente cierto) es de 324. Luego:

$400-P = 324 \rightarrow P = \mathbf{76}$

Por lo tanto, estará dispuesto a pagar hasta $76 por un seguro a todo evento.

f. *¿Cuál es la prima por riesgo?*

Es decir, cuanto más que su pérdida esperada está dispuesto a pagar por un seguro a todo evento, lo que está dado por la diferencia entre el ingreso esperado y el equivalente cierto (como se vio anteriormente).

Conociendo el ingreso/riqueza esperado (pregunta b.) y el equivalente cierto (pregunta d.), la prima por riesgo es:

$E(I) – Eqc = 340 - 324 = \mathbf{16}$