



IN3701 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar N° 5 - Geometría

Profesores: Victor Bucarey, Pablo Rey.

Auxiliares: Cristiam Gil, Dana Pizarro, Diego Bernstein, Diego Fuentealba, Eduardo Lara, Macarena Osorio, Mario Morales, Tomás Lagos.

P1.

Sea $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se define la envoltura convexa generada por X como

$$\text{conv.hull}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

Pruebe el Teorema de Carathéodory: si $x \in \text{conv.hull}(X)$, entonces $x \in \text{conv.hull}(X')$ para algún $X' \subseteq X$ tal que los vectores en X' son linealmente independientes, $|X'| \leq n + 1$.

Pauta Pregunta 1:

Como $x \in \text{conv.hull}(X)$ entonces existen escalares no negativos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tal que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$.

Supongamos que $x_1, x_2, \dots, x_m$ no son independientes afines. Entonces existen escalares $\mu_1, \dots, \mu_m$ no todos ceros tal que $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0$ y $\sum_{i=1}^m \mu_i = 0$.

Como los μ_i 's no son todos ceros y suman cero, al menos uno de estos escalares debe ser positivo.

Sea $\mu_1 > 0$. Multipliquemos la ecuación $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0$ por un escalar no negativo β y restemoslo a la ecuación $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Esto nos entrega:

$$x = \sum_{i=1}^m (\lambda_i - \beta \mu_i) x_i$$

Notemos que $\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \beta \mu_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i - \beta \underbrace{\sum_{i=1}^m \mu_i}_{=0} = 1$

Cuando $\beta = 0$ se obtiene la representación original de x .

Si comenzamos a aumentar el valor de β hasta un β_0 donde algún coeficiente $\lambda_i - \beta \mu_i$ se vuelva cero. Esto significa que encontramos una nueva representación de x como una combinación convexa de $m - 1$ vectores de X .

Continuando este proceso de reducción hasta que hayamos escrito x como una combinación convexa de a lo más $n + 1$ puntos afinmente independientes./

P2.

Considere el poliedro $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R} : x_i \leq y, \forall i = 1, \dots, n; y \leq 1\}$. Demuestre que todo punto extremo de P es entero.

Pauta Pregunta 2:

La matriz de restricciones del poliedro es:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como las filas de A son *l.i.* $\Rightarrow$ Existe al menos una *s.b.f.* donde $n+1$ restricciones están activas.

Entonces los puntos del poliedro son o bien $x_i = 0 \forall i$ y $y = 0$, $x_i = 0 \forall i \in I$, $x_j = 1 \forall j \in J$ con $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = \{1, \dots, n\}$ e $y = 1$.

Es decir todos los puntos extremos son enteros.

P3.

1. Demuestre la veracidad o provea un contraejemplo para las siguientes afirmaciones

- La unión finita de conjuntos convexos es convexo.
- La intersección finita de conjuntos convexos es convexo.
- Sea Q matriz simétrica semidefinida positiva. El elipsoide $E = \{x \in \mathbb{R}^n | x^t Q x \leq 1\}$ es un conjunto convexo. *Indicación:* puede usar que $y^t Q x \leq \sqrt{y^t Q y} \sqrt{x^t Q x}$.
- Los poliedros no acotados no tienen puntos extremos.
- Todo poliedro no vacío tiene puntos extremos.

Pauta Pregunta 3:

1. Demuestre la veracidad o provea un contraejemplo para las siguientes afirmaciones

- (a) La unión finita de conjuntos convexos es convexo.

Falso: En $\mathbb{R}^2$ se puede tomar la bola de radio 1 y centro en el origen, y la bola de radio y centro en $(4,0)$. Ambos son convexos, pero la unión no es convexa (ni siquiera son conjuntos conexos).

- (b) La intersección finita de conjuntos convexos es convexo.

Verdadero: Sean S_i con $i = 1, \dots, n$ conjuntos convexos y tomamos $S = \bigcap S_i$ la intersección de

éstos. Sean $x, y \in S$ y $\lambda \in (0, 1)$. Tomando $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, se tiene que como cada S_i es convexo, $z \in S_i \forall i$ luego z está en la intersección de los S_i .

- (c) Sea Q matriz simétrica semidefinida positiva. El elipsoide $E = \{x \in \mathbb{R}^n | x^t Q x \leq 1\}$ es un conjunto convexo. *Indicación:* puede usar que $y^t Q x \leq \sqrt{y^t Q y} \sqrt{x^t Q x}$.

Verdadero: Dos maneras de verlo: 1) Como el conjunto definido tiene la forma $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq c\}$ con f convexa (el hessiano es $2Q$ el cual es semidefinido positivo), es un conjunto convexo.

2) Otra manera de verlo es por definición. Tomando $x, y \in E$ y $\lambda \in (0, 1)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} (\lambda x + (1 - \lambda)y)^t Q (\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \lambda^2 x^t Q x + \lambda(1 - \lambda)x^t Q y + \lambda(1 - \lambda)y^t Q x + (1 - \lambda)^2 y^t Q y \\ &\leq \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 \\ &= (\lambda + 1 - \lambda)^2 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la combinación convexa está en E , luego es un conjunto convexo.

- (d) Los poliedros no acotados no tienen puntos extremos.

Falso: Tomando el poliedro en $\mathbb{R}^2$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, es claramente no acotado y tiene un punto extremo $(0,0)$.

- (e) Todo poliedro no vacío tiene puntos extremos.

Falso: Tomando el poliedro no vacío en $\mathbb{R}^2$ $x_1 \geq 0, -x_1 \geq -2$ no posee ningún punto extremo.

Definiciones y Propiedades

Def: Sea C un conjunto convexo. Un punto $x \in C$ se dice *punto extremo* si no existen dos puntos distintos $y, z \in C$ tales que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ para algún $\lambda \in (0, 1)$.

Def: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Un punto $x \in P$ se dice *vértice* si existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c^t x < c^t y$ para todo $y \in P \setminus \{x\}$.

Def: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se dice *solución básica* si:

- Satisface todas las restricciones de igualdad.
- Entre todas las restricciones que se activan en x , hay n de ellas linealmente independientes.

Si además $x \in P$, se dice que x es una *solución básica factible*.

Teo: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Entonces, para $x \in P$ se tiene que:

$$x \text{ es un punto extremo} \Leftrightarrow x \text{ es un vértice} \Leftrightarrow x \text{ es una solución básica factible}$$

Def: Se dice que un poliedro P está en forma estándar si es de la forma $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ cuyas filas son linealmente independientes, y $b \in \mathbb{R}^m$.

Teo: Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro en forma estándar. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución básica de P si y sólo si $Ax = b$ y existen índices $B(1), \dots, B(m)$ tales que:

- Las columnas $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$ son linealmente independientes.
- $x_i = 0$ para $i \notin \{B(1), \dots, B(m)\}$.

Def: Una solución básica $x \in \mathbb{R}^n$ se dice *degenerada* si existen más de n restricciones l.i. que se activan en x .

Para un poliedro en forma estándar, esta definición se traduce en que más de $n - m$ componentes de x sean nulas.

Def: Dado un conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, se define su envoltura convexa como

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0 \right\}.$$