IN3701 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar Nº 5 - Geometría

Profesores: Victor Bucarey, Pablo Rey.
Auxiliares: Cristiam Gil, Dana Pizarro, Diego Bernstein, Diego Fuentealba, Eduardo Lara, Macarena Osorio, Mario Morales, Tomás Lagos.

P1.
Sea $X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se define la envoltura convexa generada por X como

$$conv.hull(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Pruebe el Teorema de Carathéodory: si $x \in conv.hull(X)$, entonces $x \in con.hull(X')$ para algún $X' \subseteq X$ tal que los vectores en X' son linealmente independientes, $|X'| \leq n+1$.

P2.
Considere el poliedro $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} : x_i \leq y, \ \forall i = 1, .., n; y \leq 1\}$. Demuestre que todo punto extremo de P es entero.

P3.

1. Demuestre la veracidad o provea un contraejemplo para las siguientes afirmaciones
   (a) La unión finita de conjuntos convexos es convexo.
   (b) La intersección finita de conjuntos convexos es convexo.
   (c) Sea Q matriz simétrica semidefinida positiva. El elipsoide $E = \{x \in \mathbb{R}^n | x^t Q x \leq 1\}$ es un conjunto convexo. *Indicación:* puede usar que $y^t Q x \leq \sqrt{y^t Q y}\sqrt{x^t Q x}$.
   (d) Los poliedros no acotados no tienen puntos extremos.
   (e) Todo poliedro no vacío tiene puntos extremos.

Definiciones y Propiedades

Def: Sea C un conjunto convexo. Un punto $x \in C$ se dice *punto extremo* si no existen dos puntos distintos $y, z \in C$ tales que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ para algún $\lambda \in (0,1)$.

Def: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Un punto $x \in P$ se dice *vértice* si existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c^t x < c^t y$ para todo $y \in P \setminus \{x\}$.

Def: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se dice *solución básica* si:

- Satisface todas las restricciones de igualdad.
- Entre todas las restricciones que se activan en x, hay n de ellas linealmente independientes.

Si además $x \in P$, se dice que x es una *solución básica factible.*

Teo: Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Entonces, para $x \in P$ se tiene que:

$$x \text{ es un punto extremo } \Leftrightarrow x \text{ es un vértice } \Leftrightarrow x \text{ es una solución básica factible}$$

Def: Se dice que un poliedro P está en forma estándar si es de la forma $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ cuyas filas son linealmente independientes, y $b \in \mathbb{R}^m$.

Teo: Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro en forma estándar. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución básica de P si y sólo si $Ax = b$ y existen índices $B(1), \ldots, B(m)$ tales que:

- Las columnas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ son linealmente independientes.
- $x_i = 0$ para $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$.

Def: Una solución básica $x \in \mathbb{R}^n$ se dice *degenerada* si existen más de n restricciones l.i. que se activan en x.
Para un poliedro en forma estándar, esta definición se traduce en que más de $n - m$ componentes de x sean nulas.

Def: Dado un conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, se define su envoltura convexa como

$$conv(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0 \right\}.$$