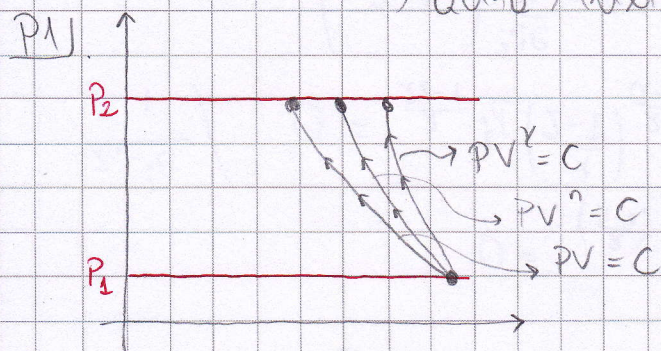


Punto Auxiliar 8 v1.0



S. $1 < n < \gamma$,

basta mirar las áreas bajo la curva del diagrama PV para concluir.

Trabajo Mecánico: $PV^\gamma = C \rightarrow P(V) = CV^{-\gamma}$

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b CV^{-\gamma} dV = \frac{C}{1-\gamma} (V_b^{1-\gamma} - V_a^{1-\gamma})$$

$$W_{TOTAL} = \frac{C_1}{1-\gamma} (V_{i1}^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) + \frac{C_2}{1-\gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_{i2}^{1-\gamma})$$

La idea es encontrar $W(P_i)$ para minimizarlo

$C_1 = P_1 V_1^\gamma \rightarrow$ No depende de P_i . Dejamos C_1 por el momento.

$V_1 = \frac{NKT_1}{P_1} \rightarrow$ No depende de P_i . Dejamos V_1 por el momento

$P_i V_{i1}^\gamma = C_1 \rightarrow V_{i1} = C_1^{1/\gamma} P_i^{-1/\gamma} \rightarrow$ Sí depende de P_i

$V_{i2} = NKT_1 P_i^{-1} \rightarrow$ Sí depende de P_i

$P_i V_{i2}^\gamma = C_2 \rightarrow C_2 = P_i^{1-\gamma} (NKT_1)^\gamma \rightarrow$ Sí depende de P_i

$P_2 V_2^\gamma = C_2 \rightarrow V_2 = P_i^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} P_2^{-1/\gamma} NKT_1 \rightarrow$ Sí depende de P_i

$$W_{TOTAL} = \frac{C_1}{1-\gamma} \left[\underbrace{C_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} P_i^{-(1-\gamma)/\gamma}}_{(*)} - V_1^{1-\gamma} \right] + P_i^{1-\gamma} (NKT_1)^\gamma \left[\underbrace{P_i^{(1-\gamma)^2/\gamma} P_2^{-(1-\gamma)/\gamma}}_{(*)} (NKT_1)^{1-\gamma} - \underbrace{(NKT_1)^{1-\gamma} P_i^{-(1-\gamma)}}_{(**)} \right]$$

(*) Como $V_1^{1-\gamma}$ no depende de P_i , se w en lo $\frac{\partial}{\partial P_i}$

(**) Afuera del paréntesis hay $P_i^{1-\gamma}$ y adentro $P_i^{-(1-\gamma)}$. Luego también ese término se w en lo $\frac{\partial}{\partial P_i}$.

$$\frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{C_1 \cdot C_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{1-\gamma} \frac{\partial}{\partial P_i} \left(P_i^{-\frac{(1-\gamma)}{\gamma}} \right) + NKT_1 \frac{\partial}{\partial P_i} \left(P_i^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right)$$

$$= \frac{C_1 \times C_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{1-\gamma} \cdot \frac{-(1-\gamma)}{\gamma} P_i^{-1/\gamma} + NKT_1 \frac{(1-\gamma)}{\gamma} P_i^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{P_i^{-1/\gamma}}$$

$$= -C_1 C_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + NKT_1 P_2^{\frac{(1-\gamma)}{\gamma}} (1-\gamma) P_i^{-2\frac{(1-\gamma)}{\gamma}} = 0$$

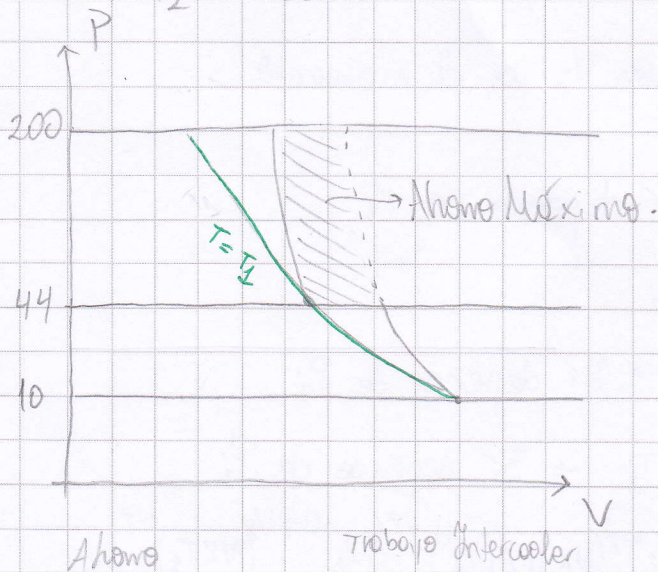
$$\rightarrow P_i^{2\frac{(1-\gamma)}{\gamma}} = \frac{C_1 C_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{NKT_1 P_2^{\frac{(1-\gamma)}{\gamma}}}$$

Ahora busco qué $\neq$ era $C_1 \dots$

$$C_1 = P_1 V_1^K = P_1^{1-\gamma} (NKT_1)^\gamma \leftrightarrow C_1 C_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = C_1^{\frac{1}{\gamma}} = P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} NKT_1 \dots$$

$$\rightarrow P_i^{2\frac{(1-\gamma)}{\gamma}} = (P_1 P_2)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \leftrightarrow P_i = \sqrt{P_1 P_2}$$

Ej.: $P_1 = 10 \text{ bar}$
 $P_2 = 200 \text{ bar}$ } $P_i = \sqrt{10 \times 200} = \sqrt{2000} = 44.7213 \dots \text{ bar}$



ii) Calor extraído en el intercooler:
 $Q_{out} = C_p (T_{i2} - T_1) = \left(\frac{P_i V_{i2}}{NK} - T_1 \right) C_p$

$$Q_{out} = C_p T_1 \left(\left(\frac{P_i}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Trabajo para correr el intercooler
 Será $W_{int} = \eta Q_{out}$

o.o habrá que imponer que el
 ahora en trabajo sea mayor que
 el trabajo necesario para echar a
 andar el intercooler:

$$|W_s - W(P_i)| > \eta Q_{out}(P_i)$$

Donde W_s es el trabajo isentrópico sin usar intercooler y $W(P_i)$ es el trabajo con intercooler incluido en la parte anterior.

En un auto, se cumple que $\sqrt{P_1 P_2}$ cumple esta ecuación.

P2]. $dU = \delta Q_{in} + \delta W_{in} = TdS + Fdl$

→ Signo es positivo ya que para $dl > 0$ trabajo ingreso al sistema (algunos dicen el elástico).

Para calcular un diferencial de entropía, elegí escribir la entropía como función de la temperatura y el largo del elástico (dos propiedades medibles fácilmente):

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_l dT + \left(\frac{\partial S}{\partial l} \right)_T dl$$

→ Para reemplazar esta derivada parcial, elijo algún potencial que me pueda ayudar. Parto con el potencial de Helmholtz, ya que en él aparece explícitamente la entropía:

$$A = U - TS \leftrightarrow dA = dU - TdS - SdT = Fdl - SdT$$

Como dA es un diferencial exacto, entonces: $\frac{\partial A}{\partial l} = F$; $\frac{\partial A}{\partial T} = -S$

→ Para reemplazar este derivada parcial, reconozco que la relación más directa entre S y T y entre U y T , que entre S y l , por lo que uso la regla de la cadena:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_l = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_l \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_l$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_l} \quad \downarrow \quad C_l$$

$$= \frac{1}{T}$$

Según el diferencial de dU .

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T \partial l} = \frac{\partial F}{\partial T}; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial l \partial T} = -\frac{\partial S}{\partial l}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_l = - \left(\frac{\partial S}{\partial l} \right)_T$$

$$dS = \frac{C_l}{T} dT - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_l dl$$

P3) $C = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$

La densidad no es una propiedad natural con la que hayamos trabajado antes. Ello es el inverso del volumen específico:

$$\rho = \frac{M}{V} ; \rho = \frac{M}{V} \rightarrow \rho = \frac{1}{v}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_S \left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)_S ; \left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)_S = -\frac{1}{\rho^2} = -v^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = -v^2 \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_S$$

$$C = \sqrt{-v^2 \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_S}$$

La entropía no es una propiedad medible directamente. Las dos relaciones de Maxwell más importantes son:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T}_{(*)} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v ; \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T}_{(*) (*)} = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

→ Ellos permiten encontrar relaciones para S a partir sólo de propiedades medibles.

Sin embargo, en las 2 sólo la temperatura... meter la T !

$$\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_S}_{(*)} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_S \rightarrow C = \sqrt{-v^2 \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_S} \quad \} \quad (*) (*)$$

Ahora, a meter mano a estas 2 derivadas parciales...

* Para la primera, escribo $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -1$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S = - \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P}_{\text{Aparece en } (*) (*)} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T}_{\text{Aparece en } (*) (*)}$$

La entropía y la T a presión constante se relacionan mejor a través de la entalpía:

$$= -\frac{\partial T}{\partial v}_P$$

$$dh = du + v dp + p dv = T ds + v dp$$

$$\Leftrightarrow ds = \frac{dh}{T} + \frac{v}{T} dp = \frac{C_p dT}{T} + \frac{v}{T} dp \Leftrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{C_p}{T} \quad (*) (*) (*)$$

Usando (***) y la relación de Maxwell (**), se tiene:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S = \frac{C_P}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$$

Para la segunda derivada parcial de (*) se tiene

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = - \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V$$

Aparece en
(*)

→ la entropía y la
T a volumen de
se relacionan mejor
a través de la
energía interna:

$$dS = \frac{dU}{T} - \frac{P}{T} dV = \frac{C_V dT}{T} - \frac{P}{T} dV \Leftrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \frac{T}{C_V}$$

Volviendo a (**)

$$C = \sqrt{-V^2 \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S} = \sqrt{-V^2 \frac{C_P}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \cdot - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \frac{T}{C_V}}$$

Finalmente...

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = - \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$

$$C = \sqrt{-V^2 \frac{C_P}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}$$