Series de Fourier & Regresión lineal

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n w_0 t) + b_n \sin(n w_0 t))$$

$w_0 = 2\pi f_0$ $\quad T = 1$ periodo

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(K w_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \operatorname{sen}(K w_0 t) dt$$

(cos) $f(t) = f(-t) \Longrightarrow b_n = 0 \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}$

(sen) $f(t) = -f(-t) \Longrightarrow a_0 \wedge a_n = 0$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}$$

Estudiar simetrías para reducir cálculo

Exponencial: $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{j n w_0 t}$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-j n w_0 t} dt$$

A mayor n mayor exactitud

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} (\underbrace{a \cdot x_i + b}_{y_i'} - y_i)^2$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$$

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

σ, R $\rightarrow$ verificar calidad ajuste

$y = A e^{\alpha x} \xrightarrow{\ln()} \ln y = \ln A + \alpha x$

$y = A \log(\alpha x) \xrightarrow{(\cdot)} y = A \log \alpha + A \log x$

$y = A x^{\alpha} \xrightarrow{\log()} \log y = \log A + \alpha \log x$

Se puede usar log o ln

Métodos Experimentales, FI2003
Ejercicio No. 3
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Semestre de primavera 2012
Profesores: Claudio Falcón, Edgar Mosquera, María Luisa Cordero
19 de noviembre 2012
Tiempo: 1:30

Parte 1 - Regresión Lineal: Un flujo se dice turbulento cuando éste exhibe propiedades caóticas o estocásticas, tales como fluctuaciones rápidas de la velocidad o de la presión. En un experimento se procedió a medir localmente las fluctuaciones de la energa cinética normalizada $E(l_o)$ para diferentes escalas de medición caracterizadas por l_o, que se entregan en la tabla a continuación

l_o (m)	0.78	0.39	0.20	0.05	0.03
$E(l_o)$ ($\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$)	14.03	4.41	1.39	0.71	0.16

(a) (3 pts.) Sabiendo que la energía cinética y la distancia están relacionados por la ecuación $E(l_o) = \alpha \times l_o^{\beta}$, determine los valores de α y β.

(b) (2 pts.) De su ajuste calcule el coeficiente de regresión R^2.

(c) (1 pts.) Sabiendo que $E(l_o)$ tiene unidades de distancia^3/tiempo^2, calcule las unidades de α. Este coeficiente es de vital importancia en turbulencia, donde $\alpha^{3/2}$ es el flujo de energía por unidad de tiempo y área, ϵ, que controla el transporte turbulento.

Solución

Dada la ecuación entre E y l_o, buscamos una relación lineal entre $Y = \log E$ y $X = \log l_o$ de la forma

$$Y = \beta X + \log \alpha = aX + b.$$

Calculamos entonces la tabla siguiente:

$\log l_o$	-0.108	-0.409	-0.699	-1.301	-1.523
$\log E$	1.147	0.644	0.143	-0.149	-0.796
$\log l_o \cdot \log E$	-0.124	-0.264	-0.100	0.194	1.212
$\log^2 l_o$	0.012	0.167	0.489	1.693	2.319

A partir de esta tabla tenemos: $\sum x_i = -4{,}040, \sum y_i = 0{,}990, \sum x_i y_i = 0{,}918, \sum x_i^2 = 4{,}679$, con lo cual:

$$a = 1{,}214,$$
$$b = 1{,}179,$$

y por lo tanto

$$\alpha = 10^b = 15{,}09,$$
$$\beta = a = 1{,}214,$$

Para calcular el coeficiente R^2, tenemos $\langle y_i \rangle = 1/N \sum y_i = 0{,}198$ y calculamos la siguiente tabla de valores

$(a \log l_o + b - logE)^2$	0.010	0.001	0.035	0.063	0.016
$(\log E - \langle y_i \rangle)^2$	0.901	0.199	0.003	0.120	0.988

Con estos valores tenemos $R^2 = 0{,}943$.

Finalmente, tenemos del modelo lineal: $\log E = \beta \log l_o + \log \alpha$ o equivalentemente:

$$\log \left(\frac{E}{\alpha} \right) = \beta \log l_o,$$

de lo que se deduce que E/α debe tener las mismas unidades que l_o, y β debe ser un número adimensional. Ya que E tiene unidades de distancia^3/tiempo^2 y l_o tiene unidades de distancia, entonces α tiene unidades de velocidad^2.

<u>Parte 2 - Series de Fourier</u>: Se tiene la siguiente función de período 2π definida por:

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

(a) (4 pts.) Desarrollar la función en serie de Fourier.

(b) (2 pts.) A partir del resultado obtenido calcular la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

Solución

Por paridad, los coeficientes $B_n = 0$. Calculamos entonces:

$$A_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

y

$$A_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos\left(\frac{2\pi n x}{2\pi} \right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx.$$

Se integra por partes: $u = x^2, du = 2xdx,\ dv = \cos(nx)dx, v = \sin(nx)/n$:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \left[\cancel{\left(x^2 \frac{\sin(nx)}{n} \right)_{-\pi}^{\pi}} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} 2x dx \right].$$

Integrando nuevamente por partes: $u = x, du = dx, dv = \sin(nx)dx, v = -\cos(nx)/n$:

$$\begin{aligned}
A_n &= -\frac{2}{n\pi}\left[\left(-x\frac{\cos(nx)}{n}\right)_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx\right] \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{2\pi\cos(n\pi)}{n} + \cancel{\left(\frac{\sin(nx)}{n^2}\right)_{-\pi}^{\pi}}\right] \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier es la siguiente:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Evaluando la serie en $x = \pi$ y sabiendo que $f(\pi) = \pi^2$ se tiene:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

de lo cual

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$