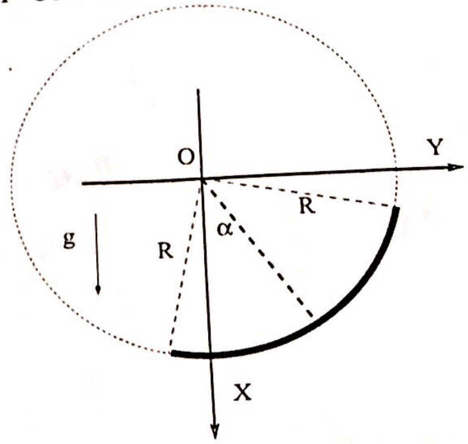
dfi fcfm
Departamento de Física – FCFM
Universidad de Chile
PROF. PATRICIO CORDERO S.
AUXILIARES: SERGIO COFRÉ Y CAMILA SANDIVARI

Mecánica
FI2001-5
Examen
16 de agosto 2016
Duración: 3 hr

P1) Considere un alambre homogéneo de masa M con la forma de un cuarto de circunferencia de radio R. El alambre está unido al origen O por varas rectas ideales sin masa y de largo R (representadas en la figura por rectas segmentadas).

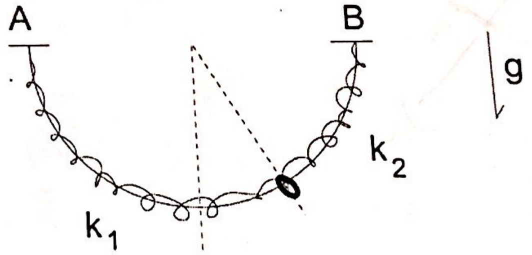


El sistema puede oscilar en torno al punto O. La figura muestra al alambre en un momento de su oscilación en el propio plano del alambre, donde α es el ángulo que forma la vertical con la bisectriz del ángulo recto que forman las líneas segmentadas.

a) Determine la matriz de inercia del alambre respecto de los ejes principales del sólido y que tienen origen en O (ver figura). **b)** Determine la distancia del centro de masa del alambre respecto del punto O. **c)** Escriba la ecuación del momento angular del alambre respecto del punto O y determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del ángulo α. **d)** Si ahora $\alpha = 0$ y el sistema oscila en torno al eje Y, determine la frecuencia de estas pequeñas oscilaciones. 1.0 .

P2) Se sabe que $\vec{F}$ es conservativa y que $F_x = Ax/(z^2(x^2+y^2))$ y que $F_y = Ay/(z^2(x^2+y^2))$. • Determine F_z y la energía potencial asociada a $\vec{F}$. Explique con claridad.

P3) En la figura se ilustra un aro de forma semicircular de radio R, cuyos extremos A y B se mantienen fijos a una estructura en reposo. El plano del arco es vertical.

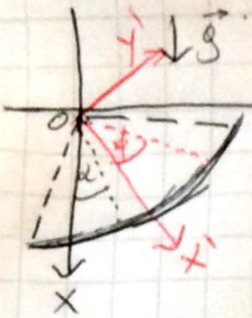


Una partícula P de masa m se puede mover por este aro. P está unido a dos resortes, cada uno de los cuales tiene su extremo unido a los puntos A y B (extremos del arco) respectivamente. Los resortes siguen la forma del arco, siendo sus constantes elásticas k_1 y k_2, respectivamente y ambos tienen largo natural $\pi R/2$. Sea ϕ la posición angular del anillo con respecto a la vertical ($-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$).

a) Construya el lagrangiano del sistema y obtenga la ecuación del movimiento del anillo. **b)** A partir de la ecuación anterior obtenga $\dot{\phi}$ como función de ϕ. **c)** Calcule la frecuencia ω de pequeñas oscilaciones de P.

Pauta P1 Examen

FI2001 - Mecánica.
Prof: Patricio Cordero.
Aux: Sergio Cotré M.



a) Determinar matriz de inercia de alambre respecto de los ejes principales del sólido y que tienen origen en O

Dado a que nos piden los ejes principales, debemos llegar a una matriz de inercia diagonal, por lo cual buscamos ejes que hagan el problema "simétrico", tal como $x'y'$

$$I_0 = \int \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} dm$$

En este caso:
$x = R\cos\phi$; $y = R\sin\phi$
$\lambda = \dfrac{M}{\frac{\pi}{2}R}$. $z = 0$.
$dm = \lambda R\, d\phi$.
$\phi \in [-\pi/4, \pi/4]$

$$I_0 = \int \begin{pmatrix} R^2\sin\phi & -R^2\sin\phi\cos\phi & 0 \\ -R^2\sin\phi\cos\phi & R^2\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix} \lambda R\, d\phi \quad 0.5$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin\phi\cos\phi = 0 \; ; \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2\phi\, d\phi = \frac{1}{4}(\pi-2); \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2\phi\, d\phi = \frac{1}{4}(\pi+2) \quad 0.5$$

$$\Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{MR^2}{2\pi} \begin{pmatrix} \pi-2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi+2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix}} \quad 1.0$$

b) Calcular centro de masa $\vec{R}_G$. Recordar que el centro de masa es el promedio ponderado de cada masa y su posición (como los UD's y las notas en ucampus :o). En este caso se tendrá:

$$\vec{R}_G = \frac{\int \vec{r}\cdot dm}{M} = \frac{\lambda R^2}{M} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos\theta\, \hat{\imath}' + \sin\theta\, \hat{\jmath}')\, d\theta$$

$$\vec{R}_G = \frac{M R^2}{\frac{\pi}{2} R M} \frac{2\sqrt{2}}{2} \hat{\imath}' = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi} \hat{\imath}' \quad 1.0$$

c) $\vec{l} = I_0 \cdot \vec{\Omega}$ En este caso $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{l} = \frac{MR^2}{2\pi} \cancel{2\pi} \dot{\alpha} \hat{k} \longrightarrow \dot{\vec{l}} = MR^2 \ddot{\alpha} \hat{k}$$

0.5

$$\sum \vec{\tau} = -M \vec{R}_G \times \vec{g} = -\frac{2\sqrt{2} R M}{\pi} g \sin\alpha \hat{k}$$

$$\dot{\vec{l}} = \Sigma \vec{\tau} \Rightarrow MR^2 \ddot{\alpha} = -\frac{2\sqrt{2} R M}{\pi} g \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} = \underbrace{-\frac{2\sqrt{2} g}{\pi R}}_{\omega_{p.o}^2} \sin\alpha} \longrightarrow \boxed{\omega_{p.o}^2 = \frac{2\sqrt{2} g}{\pi R}}$$

0.5 1.0

d) Para este caso cambia $\vec{l}$ pues $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{l} = \frac{MR^2}{2\pi} (\pi + 2) \dot{\alpha} \Rightarrow \ddot{\alpha} = -\frac{4\sqrt{2} g}{(\pi+2) R} \sin\alpha \Rightarrow \boxed{\omega_{p.o} = \frac{4\sqrt{2} g}{R(\pi+2)}}$$

1.0

Puntajes:

a) 2.0 pts.
b) 1.0 pto.
c) 2.0 pts.
d) 1.0 pto.
+ 1.0 base
7.0.