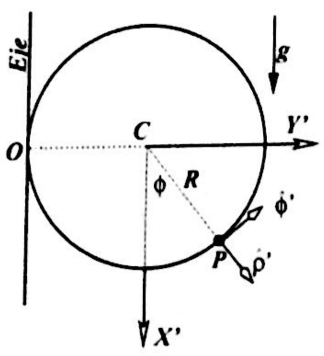
dfi fcfm

Departamento de Física – FCFM
Universidad de Chile
PROF. PATRICIO CORDERO S.
AUXILIARES: SERGIO COFRÉ Y CAMILA SANDIVARI

Mecánica
FI2001-5
Control No.3
~~8 de junio~~ 5 de agosto 2016
Duración: 3 hr

P1 Se tiene un planeta de masa m en órbita circunferencial de radio R alrededor de un Sol (masa M). Un cometa de masa $m/\sqrt{2}$ choca con el planeta. La órbita original del cometa es parabólica con radio mínimo igual a R y el choque se produce precisamente cuando el cometa alcanza su radio mínimo. Como resultado del choque las masas se funden en un solo planeta cuya masa es la suma de ambas. El choque conserva momentum lineal y angular pero no conserva energía. Determine la distancia máxima que se aleja del Sol el planeta compuesto.

P2 Un aro de radio R, gira en torno a un eje vertical—tangente al aro en el punto O (ver figura)—con velocidad angular $\vec{\Omega} = -\Omega\hat{\imath}'$ constante ($\Omega > 0$). Una partícula P de masa m puede moverse a lo largo del aro sin roce alguno. Se define un sistema de referencia no inercial S' centrado en el centro C del aro y con ejes X' e Y' en el plano del aro como indica la figura.



Como se sabe, la ecuación de movimiento genérica en un sistema no inercial es

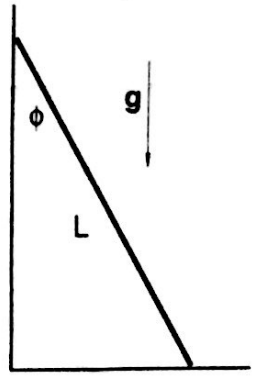
$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'\right) - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' \qquad (1)$$

(a) Escriba la ecuación de movimiento de P y su proyección a la dirección $\hat{\phi}'$ en la forma $mR\ddot{\phi} = f$. **(b)** Obtenga U tal que $f = -\frac{1}{R}\frac{dU}{d\phi}$ dando la expresión para U. **(c)** Suponiendo que $R\Omega^2 \ll g$ y que el punto de equilibrio es cercano a cero, determine—***en forma aproximada***—este ángulo de equilibrio.

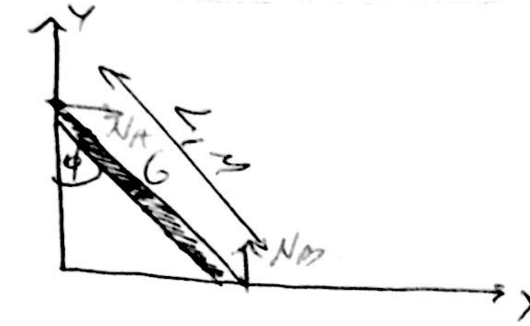
Indicación: *Puede ser conveniente usar en S' tanto los vectores unitarios cartesianos $(\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}',)$ como los vectores polares $(\hat{\rho}', \hat{\phi}')$.*

P3 Un tablón de longitud L y masa M (distribuida uniformemente) es dispuesto como se indica en la figura. El piso de contacto es horizontal y la pared es vertical, ambos con sus superficies perfectamente resbaladizas (roce nulo). Inicialmente el tablón forma un ángulo ϕ_0 con respecto a la vertical. Es soltado y resbala sin pérdida de energía.

(a) Obtenga la velocidad angular $\dot{\phi}$ del tablón como función de ϕ. Observe que las coordenadas del centro de masas del tablón están dadas por $x = (L/2)\sin\phi$ e $y = (L/2)\cos\phi$. **(b)** Obtenga la aceleración angular $\ddot{\phi}$ del tablón como función de ϕ **(c)** Calcule la fuerza normal de la pared sobre el tablón y obtenga una condición para determinar el ángulo ϕ para el que el tablón pierde contacto con la pared mientras resbala.



Pauta P3 C3 Mecánica
Prof: Patricio Cordero.
Aux: Sergio Cofré M.



a) Parametrizamos el centro de masa G,

$$\vec{R}_G = \frac{L}{2}(\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})$$

$$\vec{V}_G = \frac{L}{2}\dot{\phi}\,(\cos\phi\,\hat{x} - \sin\phi\,\hat{y})$$

$$\Rightarrow V_G = \frac{L\dot{\phi}}{2}\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = \frac{L\dot{\phi}}{2}$$

Usamos energía:

Tenemos un caso en que $O' = G$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}M V_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot I^G\vec{\Omega} \quad , \text{ con } \vec{\Omega} = \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\phi}\end{pmatrix} \text{ y } I_{33}^G = \frac{1}{12}mL^2$$

Por otro lado, la energía potencial es $U = mg\frac{L}{2}\cos\phi$

$$E_{MT} = K + U = \frac{mL^2}{6}\dot{\phi}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\phi$$

E_{MT} es constante ya que no hay fuerzas disipativas, y para $\phi(0) = \phi_0$, $\dot{\phi}(0) = 0$ se tiene que:

$$E_0 = mg\frac{L}{2}\cos\phi_0 = E_{MT} \Rightarrow \frac{mL^2}{6}\dot{\phi}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\phi = mg\frac{L}{2}\cos\phi_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \sqrt{\frac{3g}{2}(\cos\phi_0 - \cos\phi)}}$$

b) Para obtener $\ddot{\phi}$ basta con derivar la expresión anterior:

$$2\dot{\phi}\ddot{\phi} = \frac{3g}{2}\sin\phi\,\dot{\phi} \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = \frac{3}{2}\frac{g}{2}\sin\phi}$$

c) La fuerza normal N_A es la única fuerza en el eje X, por lo que

$$\Sigma F_x = N_x = m\vec{a}_x \quad , \text{ con } a_x = \frac{L}{2}\cos\phi\,\ddot{\phi} - \frac{L}{2}\sin\phi\,\dot{\phi}^2$$

Condición de despegue $N_x = 0 \Rightarrow \sin\phi\,\dot{\phi}^2 = \cos\phi\,\ddot{\phi}$, lo cual reemplazando por lo obtenido en a) y b) se tiene $\boxed{\cos\phi = \frac{2}{3}\cos\phi_0}$