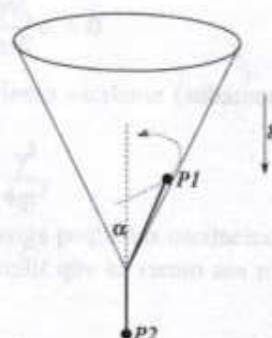


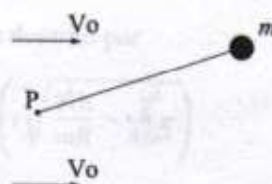
Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

P1 Una partícula P_1 de masa m se mueve sobre la superficie interior de un cono de abertura α . Unido a la partícula por una cuerda de largo R se haya otra partícula P_2 de masa m , la cual cuelga por un orificio en el extremo del cono.



- Encuentre el radio de la órbita circular que realiza la partícula P_1 , si tiene una velocidad V_0 .
- Si la partícula P_2 es perturbada de manera que su posición vertical es levemente modificada, encuentre el período de las pequeñas oscilaciones verticales que realiza.

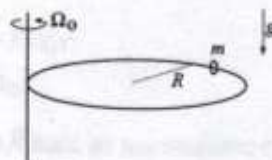
P2 Un objeto de masa M está atado a un punto fijo P mediante una cuerda inextensible de largo R . Adicionalmente, corre un viento con velocidad V_0 hacia la derecha, debido al cual, el objeto sufre una fuerza de roce viscoso la cual es proporcional a la velocidad relativa de la partícula con el viento. La constante de proporcionalidad es γ .



El movimiento ocurre en dos dimensiones y la gravedad es despreciable.

- Determine la ecuación de movimiento para el objeto.
- Considere que inicialmente el objeto está en reposo, formando un ángulo ϕ_0 con la dirección del viento. Suponga $\phi_0 \ll 1$. Encuentre la condición para que el movimiento sea subamortiguado (oscilante). Escriba la solución al movimiento.

P3 Un aro horizontal, de radio R , se hace girar con velocidad angular constante Ω_0 respecto a un eje vertical que pasa por el aro (a distancia R del centro). Una argolla de masa m puede deslizarse sin roce en el aro. Inicialmente la argolla está el punto opuesto al eje y se le da una velocidad V_0 , relativa al aro, en la misma dirección de giro del aro. Determine la velocidad mínima que hay que darle a la argolla para que llegue hasta el eje.



$$m\ddot{\mathbf{a}}' = \vec{F} - m\ddot{\mathbf{R}} - m\ddot{\Omega} \times (\ddot{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\ddot{\Omega} \times \vec{v}' - m\ddot{\Omega} \times \vec{r}'$$

Soluciones C3

P1 Si r es la distancia de P_1 al vértice del cono y h es la distancia de P_2 al vértice, entonces $r + h = R$ donde R es el largo de la cuerda. La energía potencial de ambas partículas entonces es

$$U = mg(r \cos \alpha - h) + \text{cte} = mgr(1 + \cos \alpha)$$

Se usó la “cte” para eliminar la aparición de la constante R que pudo haber en U .

Usando para P_1 coordenadas esféricas centradas en el vértice del cono y, puesto que no hay fuerzas en la dirección $\hat{\phi}$, la componente a_{ϕ} de la aceleración tiene que ser nula, lo que implica que $\ell = mr^2 \dot{\phi} \sin \alpha$ es constante. Esto permite escribir

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2 \sin \alpha}$$

La energía cinética de P_2 es $K_2 = \frac{m}{2} \dot{h}^2 = \frac{m}{2} \dot{r}^2$ y la otra es $\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \alpha)$ La energía total del sistema entonces es

$$E = m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2} + mgr(1 + \cos \alpha)}_{U^*}$$

El primer término no tiene el tradicional factor $\frac{1}{2}$ porque la masa total es $2m$. El potencial efectivo U^* tiene su mínimo cuando

$$r^3 = \frac{\ell^2}{m^2 g (1 + \cos \alpha)}$$

Si P_1 se mueve en órbita circular con rapidez V_0 , su momento angular tiene magnitud $\ell = mrV_0 \sin \alpha$ que se reemplaza en la ecuación anterior para deducir que la coordenada esférica r para la órbita circular vale r_0

$$r_0 = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)g}$$

El radio de la circunferencia es $\rho_0 = r_0 \sin \alpha$. La segunda derivada de U^* con respecto a r es

$$\left. \frac{d^2 U^*}{dr^2} \right|_{\text{circunf}} = \frac{3\ell^2}{mr_0^4} = \frac{3mg^2(1 + \cos \alpha)^2}{V_0^2 \sin^2 \alpha}$$

de donde la frecuencia de las pequeñas oscilaciones es

$$\omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{U''}{2m}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g(1 + \cos \alpha)}{V_0 \sin \alpha}}$$

P2 Las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son la tensión del hilo, $-T\hat{\rho}$ y la fuerza viscosa $-\gamma(\vec{v} - \vec{V}_0)$. Usando como base los vectores unitarios $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ asociados a la posición de la partícula, la velocidad del viento se puede

escribir $\vec{V}_0 = V_0(\hat{\rho} \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi)$. Con esto la ecuación de movimiento se descompone en

$$\begin{aligned} -mR\dot{\phi}^2 &= -T + \gamma V_0 \cos \phi \\ mR\ddot{\phi} &= -\gamma(R\dot{\phi} + V_0 \sin \phi) \end{aligned}$$

La primera ecuación determina la tensión una vez que se ha resuelto el movimiento. La segunda ecuación tiene la forma de la ecuación de un péndulo con fuerza viscosa. Si en la segunda ecuación se aproxima el seno al ángulo mismo se obtiene

$$\ddot{\phi} + \frac{\gamma}{m}\dot{\phi} + \frac{\gamma V_0}{mR}\phi = 0$$

La solución tiene comportamiento oscilante (subamortiguada) si

$$\frac{\gamma V_0}{mR} > \frac{\gamma^2}{4m^2}$$

es decir, para que el sistema tenga pequeñas oscilaciones en torno a $\phi = 0$ se debe cumplir que el viento sea más intenso que un mínimo:

$$V_0 \geq \frac{\gamma R}{4m}$$

y el movimiento mismo queda descrito por

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-t\gamma/m} \cos \left(t \sqrt{\frac{\gamma V_0}{mR} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} \right)$$

P3 Consideramos dos sistemas de referencia, uno (S) con origen en el punto donde el aro se une al eje y que no rota y otro (S') con origen en el centro del aro cuyo eje x' apunta siempre hacia afuera del eje y el eje z' es perpendicular al aro. El sistema S es inercial y S' no lo es. La relación entre los dos sistemas es:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= -R\Omega_0^2 \hat{x}' \\ \ddot{\vec{\Omega}} &= \Omega_0 \hat{z}' \end{aligned}$$

lo cual especifica que el vector \vec{R} hace un movimiento circular de radio R y velocidad angular Ω_0 . En el sistema S' , la cinemática de la argolla está dada en coordenadas polares por

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= R\hat{\rho}' \\ \vec{v}' &= R\dot{\phi}'\hat{\phi}' \\ \vec{a}' &= -R\dot{\phi}'^2\hat{\rho}' + R\ddot{\phi}'\hat{\phi}' \end{aligned}$$

Las fuerzas que actúan sobre la argolla son

$$\vec{F} = N_1\hat{\rho}' + (N_2 - mg)\hat{z}'$$

Se utiliza ahora la ecuación de Newton modificada para sistemas no inerciales, para lo cual hay que calcular una serie de términos. Estos son:

$$\begin{aligned} -m\ddot{\vec{R}} &= mR\Omega_0^2(\cos\phi\hat{\rho}' - \sin\phi\hat{\phi}') \\ -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') &= mR\Omega_0^2\hat{\rho}' \\ -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' &= 2mR\Omega_0\dot{\phi}\hat{\rho}' \end{aligned}$$

Recolectando todos los términos, la componente según $\hat{\phi}'$ de la ecuación de Newton es

$$mR\ddot{\phi} = -mR\Omega_0^2\sin\phi$$

y las otras dos permiten calcular las normales N_1 y N_2 . La ecuación anterior, puede ser multiplicada por $\dot{\phi}$ e integrada en el tiempo, obteniéndose

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 = \Omega_0^2(\cos\phi - \cos\phi_0)$$

La condición inicial corresponde a $\phi_0 = 0$ y $\dot{\phi}_0 = V_0/R$. La condición final significa que la partícula llega a $\phi = \pi$ y como se pide la velocidad V_0 mínima, se requiere que llegue con velocidad nula a ese punto, es decir $\dot{\phi} = 0$. Reemplazando

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 = -2\Omega_0^2$$

de donde se obtiene

$$V_0 = 2R\Omega_0$$