

FI-2001 MECANICA

Prof. Patricio Cordero S.

Escuela de Ingeniería y Ciencias

Universidad de Chile

22 de junio

Control N° 3

22 de julio, 2013

Duración: 2:55 hrs

P1) Considere un planeta de masa M , radio R_T y con período de rotación T en torno a su propio eje (24 hrs en el caso de la Tierra), igual que la Tierra, pero sin atmósfera. Desde este planeta se dispara una nave de masa m con una velocidad inicial \vec{v}_1 tangencial a la superficie y en la misma dirección del sentido de rotación del planeta (ver figura). A partir de ese momento no actúa otra fuerza sobre la nave, más que la atracción gravitacional ejercida por el planeta. La magnitud de \vec{v}_1 se mide con respecto a la superficie del planeta, y es la necesaria para que la nave quede en una órbita elíptica cuyo radio máximo coincida con el radio de la órbita circular geostacionaria (esto es, una órbita circular cuyo período $T_{\text{órbita}}$ coincide con el período de rotación T del planeta). Al alcanzar el apogeo (el punto más distante al planeta) la nave sufre un nuevo cambio de velocidad de modo que queda en la órbita circular geostacionaria.

- Determine la magnitud de \vec{v}_1
- Determine el cambio de momentum que debe sufrir el satélite en el para quedar en la órbita ya descrita.

P2) Un cilindro de eje vertical y radio R está fijo sobre una plataforma horizontal (un gran disco) que rota con velocidad angular $\Omega \hat{k}$ (Ω constante positiva) en torno a un punto fijo O ubicado a una distancia $2R$ del centro del cilindro (punto O'). Una partícula P de masa m desliza sin roce por la plataforma y en contacto con el borde exterior del cilindro de radio R y eje vertical.

Si se designa ϕ al ángulo $OO'P$, la partícula inicia su movimiento en la posición $\phi = 0$, con una velocidad angular inicial muy pequeña.

Se pide:

- Encontrar una expresión para la velocidad angular $\dot{\phi}$ (para cualquier instante previo a la separación).
- Determinar una ecuación para el ángulo ϕ_s en que la partícula se separa del cilindro.

P3) Se tiene un sólido homogéneo de masa M con forma de paralelepípedo rectangular de dimensiones $a \times b \times c$ con $a < b < c$.

- Determine su matriz de inercia I^G .
- Determine las frecuencias de las pequeñas oscilaciones de los tres péndulos que consisten en que el sólido descrito oscila, debido a su peso, en torno a cada una de tres aristas—colocada en un eje fijo horizontal—de largos a , b y c respectivamente.

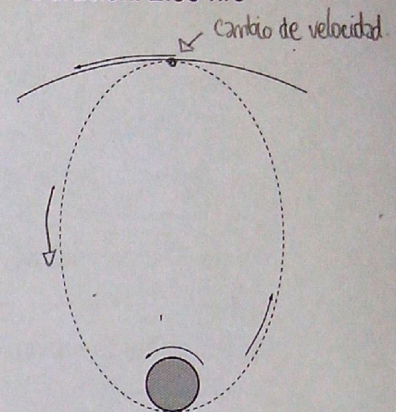


Figura 1: Planeta de radio R_T , órbita elíptica y trozo de órbita geostacionaria.

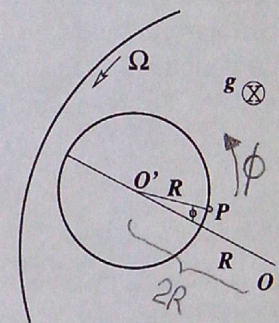


Figura 2: Plataforma horizontal que gira tiene un cilindro fijo de radio R perpendicular a ella.

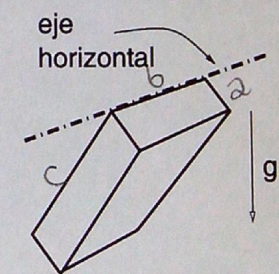


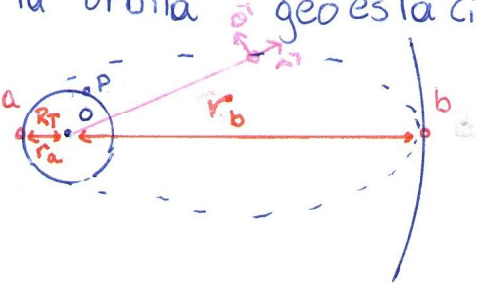
Figura 3: Caso en que la arista b está fija al eje horizontal.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \cos^2 \theta$$

(a)

Para la órbita geoestacionaria

$$T_{or} = T = \frac{2\pi}{\omega_{or}}$$



$$\rightarrow -\frac{GMm}{r_b^2} = -m r_b \omega_{or}^2$$

$$r_b^3 = \frac{GM}{\omega_{or}^2}$$

$$\vec{v}_B' = r_b \cdot \omega_{or} \cdot \hat{\theta} \quad (\text{para órbita geoestacionaria})$$

• Para la órbita elíptica ($R_T = r_a$)

$$E_a = \frac{1}{2} m (\dot{r}_a)^2 - \frac{GMm}{r_a} = \frac{1}{2} m (\dot{r}_b)^2 - \frac{GMm}{r_b} = E_b \quad \left/ \begin{array}{l} r^2 \dot{\theta} = cte \\ \rightarrow \dot{\theta}_b = \dot{\theta}_a \cdot \left(\frac{r_a}{r_b}\right)^2 \end{array} \right.$$

$$r_a^2 \dot{\theta}_a^2 - r_b^2 \left(\dot{\theta}_a^2 \cdot \frac{r_a^4}{r_b^4} \right) = 2GM \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

$$v_a^2 = r_a^2 \dot{\theta}_a^2 = \frac{2GM \left(\frac{r_b - r_a}{r_a r_b} \right)}{1 - \frac{r_a^2}{r_b^2}} = 2GM \frac{\frac{r_b - r_a}{r_b r_a}}{\frac{(r_b + r_a)(r_b - r_a)}{r_b^2}} = 2GM \frac{r_b}{r_a} \cdot \frac{1}{r_b + r_a}$$

$$\Rightarrow v_a^2 = 2GM \left(\frac{r_b}{r_a} \right) \cdot \frac{1}{r_b + r_a}$$

$$v_a r_a = v_b r_b$$

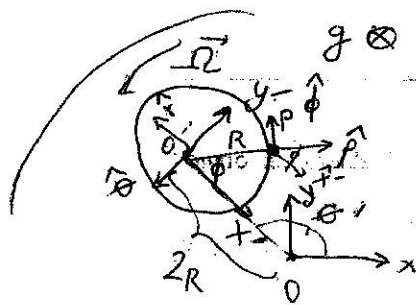
$$v_b = v_a \frac{r_a}{r_b} \rightarrow v_b^2 = 2GM \left(\frac{r_a}{r_b} \right) \frac{1}{r_b + r_a}$$

Si p es un punto sobre la superficie

$$v_a = v_1 + v_p \leftrightarrow v_1 = v_a - r_a \cdot \omega_{\parallel}$$

(b)

$$\Delta \vec{p} = m \vec{v}_b' - m \vec{v}_b = m (v_b' - v_b) \hat{\theta}$$



$$(a) \quad \vec{r}' = R\hat{p}, \quad \vec{v}' = R\dot{\phi}\hat{\phi}, \quad \vec{a}' = R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{p}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{k} = \Omega\hat{k}'$$

$$\vec{R} = 2R(\hat{r}) \rightarrow \vec{R} = 2R\Omega\hat{\theta}$$

$$\ddot{\vec{R}} = -2R\Omega^2\hat{r} = +2R\Omega^2\hat{x}' = 2R\Omega^2(-\sin\phi\hat{\phi} + \cos\phi\hat{p})$$

$$\hat{F} = N\hat{p} - mg\hat{k} + N_k\hat{k}$$

$$-m\vec{\Omega} \times (\vec{R} \times \vec{v}') = -m\Omega^2 R \hat{k}' \times \hat{\phi} = m\Omega^2 R \hat{p} \quad (\text{centrífuga})$$

$$-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' = +2m\Omega R\dot{\phi}\hat{p} \quad (\text{Coriolis})$$

$$\text{Ecuación } (\hat{\phi}) : mR\ddot{\phi} = -m\ddot{\vec{R}} \cdot \hat{\phi} = m2R\Omega^2 \sin\phi$$

$$\text{Integrando una vez : } \dot{\phi}\dot{\phi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2}\right) = 2\Omega^2 \sin\phi \dot{\phi} = \frac{d}{dt}(-2\Omega^2 \cos\phi)$$

$$\rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2} = 2\Omega^2(1 - \cos\phi) \rightarrow \dot{\phi}^2 = 4\Omega^2(1 - \cos\phi)$$

$$(b) \text{ Ecuación } (\hat{p}) : -mR\dot{\phi}^2 = N + m\Omega^2 R + 2m\Omega R\dot{\phi} - 2mR\Omega^2 \cos\phi$$

Condición de separación: $N=0$. Reemplazando la expresión para $\dot{\phi}$ queda:

$$-4mR\Omega^2(1 - \cos\phi_s) = m\Omega^2 R + 4m\Omega^2 R\sqrt{1 - \cos\phi_s} - 2mR\Omega^2 \cos\phi_s$$

$$\rightarrow -4(1 - \cos\phi_s) = 1 + 4\sqrt{1 - \cos\phi_s} - 2\cos\phi_s$$

$$6\cos\phi_s = 5 + 4\sqrt{1 - \cos\phi_s}$$

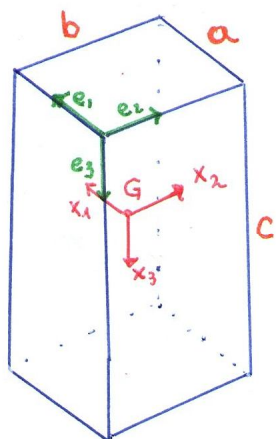
$$\frac{3}{2}\cos\phi_s - \frac{5}{4} = \sqrt{1 - \cos\phi_s} \quad (1)^2$$

$$\frac{9}{4}\cos^2\phi_s + \frac{25}{16} - \frac{15}{4}\cos\phi_s = 1 - \cos\phi_s$$

$$\frac{9}{4}\cos^2\phi_s - \frac{11}{4}\cos\phi_s + \frac{9}{16} = 0$$

$$\cos^2\phi_s - \frac{11}{9}\cos\phi_s + \frac{1}{9} = 0 //$$

(a)



$$\mathbb{I}^G = \begin{bmatrix} I_{x_1 x_1} & I_{x_1 x_2} & I_{x_1 x_3} \\ I_{x_2 x_1} & I_{x_2 x_2} & I_{x_2 x_3} \\ I_{x_3 x_1} & I_{x_3 x_2} & I_{x_3 x_3} \end{bmatrix}$$

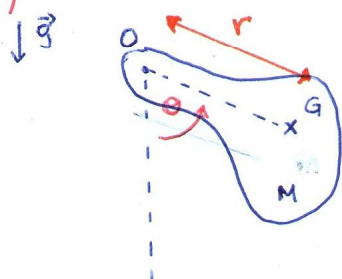
$$I_{x_1 x_1} = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} x_2^2 + x_3^2 dx_1 dx_2 dx_3 \cdot \frac{M}{abc} = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2)$$

$$I_{x_2 x_2} = \frac{1}{12} M (a^2 + c^2) \quad I_{x_3 x_3} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

Ya que los ejes x_i son ejes principales de inercia $\forall i \neq j \quad I_{x_i x_j} = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{I}^G = \frac{M}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

(b)



$$EHT = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 - M g \cos \theta \cdot r \quad / I_O = I_G + M r^2 \quad / \cdot \frac{d}{dt}$$

$$0 = I_G \ddot{\theta} + M r^2 \ddot{\theta} + M g \sin \theta \cdot r$$

$$\ddot{\theta} = - \frac{M g r}{\underbrace{I_G + M r^2}_{\omega_{po}^2}} \sin \theta$$

para cada eje $e_i \Rightarrow \omega_{po}^2 e_i = \frac{M g r_i}{I_{x_i x_i} + M r_i^2}$

donde

$$r_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$r_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$r_3^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$