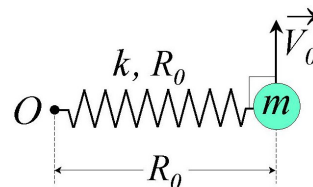


CONTROL N° 3

9 de Junio de 2004
Tiempo: 2:30 horas

Problema 1

Una partícula de masa m se mueve en un plano horizontal sin roce, sujeta a uno de los extremos de un resorte de largo natural R_0 y constante elástica k ; el otro extremo del resorte se encuentra fijo a un punto O del plano. En $t=0$ y estando el resorte en su largo natural, la partícula se lanza con velocidad V_0 en una dirección perpendicular a la línea del resorte, como se indica en la figura.



- Demuestre que R_0 es la mínima distancia de O a que puede acceder la partícula.
- Encuentre V_0 en función de los parámetros del problema, para que la máxima distancia entre O y la partícula sea $R_1 = 2R_0$.
- ¿Cuál es velocidad de la partícula cuando ésta alcanza la distancia R_1 ?

Problema 2

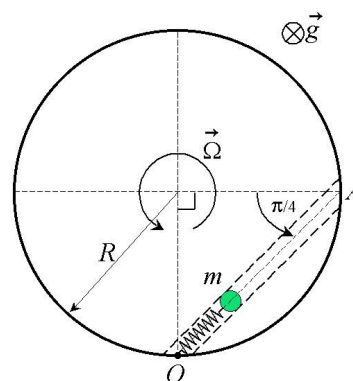
Una partícula P de masa m puede deslizarse sin roce por el interior de un tubo OA , que a su vez está fijo a un aro de radio R , con la geometría que se indica en la figura. La partícula está unida al extremo de un resorte de constante elástica k y largo natural cero, cuyo otro extremo está fijo al punto O .

El aro gira en torno a un eje vertical que pasa por su centro, con velocidad angular constante Ω , donde $\Omega^2 = k/2m$.

Si inicialmente P se encuentra en el punto medio entre O y A , y su velocidad relativa al tubo es V_0 en la dirección de O hacia A .

Determine:

- La posición de P relativa al tubo en función del tiempo.
- La reacción que ejerce el tubo a P .

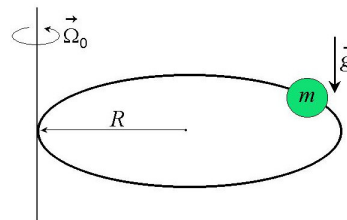


Problema 3

Un aro horizontal, de radio R , gira con velocidad angular constante Ω_0 en torno a un eje vertical que pasa por el aro (a distancia R de su centro). Una argolla de masa m puede deslizarse sin roce en el aro.

Inicialmente la argolla está en el punto opuesto al eje y se le da una velocidad V_0 relativa al aro, en la misma dirección de giro del aro.

Determine la velocidad mínima V_0 para que la argolla llegue hasta el eje.



Solución Problema 1:

a) Demostración que R_0 es la distancia mínima de P a O .

En primer lugar vamos a demostrar que $r = R_0$ es un mínimo local: Usamos coordenadas polares, de variables (r, ϕ) , donde r es la distancia de P a O .

$$\text{Del enunciado } \vec{V}_0 \text{ es } \perp \text{ a } \hat{r}, \text{ entonces: } \vec{V}_0 = V_0 \hat{\phi} = \dot{r}(0) \hat{r} + R_0 \dot{\phi}(0) \hat{\phi} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r}(0) = 0 & (1.1) \\ R_0 \dot{\phi}(0) = V_0 & (1.2) \end{cases}$$

$$\text{Por otra parte: } \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 = -\frac{k}{m} [r - R_0]$$

$$\text{Reemplazando } \dot{\phi}(0) \text{ de (1.2)} \Rightarrow \text{en } t=0: \ddot{r}(0) - R_0 \frac{V_0^2}{R_0^2} = -\frac{k}{m} [R_0 - R_0] \Rightarrow \ddot{r}(0) = \frac{V_0^2}{R_0} > 0 \quad (2)$$

(1.1) \wedge (2) $\Rightarrow R_0$ es un mínimo local para r

Ahora debemos demostrar que no hay otro mínimo menor que R_0 : El movimiento se rige por una fuerza central \Rightarrow se conserva la energía mecánica total (EMT) y el momento angular (\vec{l}_O).

Conservación del momento angular:

Inicial: $l_{O0} = \vec{R}_0 \times m \vec{V}_0 = R_0 m V_0 \sin(\pi/2) = m R_0 V_0$	$\forall r: l_O = r \hat{r} \times m (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi}) = m r^2 \dot{\phi}$
--	--

$$l_O = cte \Rightarrow r^2 \dot{\phi} = R_0 V_0 \Rightarrow \dot{\phi}(r) = \frac{R_0 V_0}{r^2} \quad (3)$$

Conservación de la energía:

Inicial: $EMT_0 = \frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} k (R_0 - R_0)^2 = \frac{1}{2} m V_0^2$	$\forall r: EMT = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} k (r - R_0)^2$
--	---

$$EMT = cte \Rightarrow \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} k (r - R_0)^2 = \frac{1}{2} m V_0^2, \text{ usando (3)} \Rightarrow \dot{r}^2 + \frac{R_0^2 V_0^2}{r^2} + \frac{k}{m} (r - R_0)^2 - V_0^2 = 0$$

$$\text{Un valor } r = r_{\min} \text{ debe satisfacer } \dot{r} = 0 \Rightarrow P(r) = V_0^2 \left[\frac{R_0^2}{r^2} - 1 \right] + \frac{k}{m} (r - R_0)^2 = 0 \quad (4)$$

Analizando los términos de (4) se puede ver que: si $r < R_0 \Rightarrow P(r) > 0 \Rightarrow \boxed{\nexists r_{\min} < R_0}$

Es decir R_0 es la mínima distancia de O a que puede acceder la partícula.

b) Condiciones para que $r_{\max} = 2R_0$

En $r = R_1$: $l_{O1} = R_1 V_1 \sin(\pi/2) = 2R_0 V_1 \quad (\angle(\vec{r}, \vec{V}) = \pi/2 \text{ porque imponemos que } R_1 \text{ es } r_{\max}).$

$$l_O = cte \Rightarrow l_{O0} = l_{O1} \text{ es decir: } R_0 V_0 = 2R_0 V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{V_0}{2} \quad (4)$$

$$\text{En } r = R_1 = 2R_0: EMT_1 = \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} k R_0^2, \text{ pero } EMT = cte \Rightarrow \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} k R_0^2$$

$$\text{Reemplazando (4): } m V_0^2 - m \frac{V_0^2}{4} = k R_0^2 \Rightarrow \boxed{V_0 = 2R_0 \sqrt{\frac{k}{3m}}}$$

c) La velocidad V_1

$$\text{Reemplazando este valor de } V_0 \text{ en (4): } \boxed{V_1 = R_0 \sqrt{\frac{k}{3m}}}$$

Solución Problema 2:

En este problema interesa analizar el movimiento de la partícula dentro del tubo. Lo más conveniente es usar un sistema no inercial cartesiano, donde una de sus coordenadas coincide con el tubo.

Como se muestra en la figura, se define:

- un sistema fijo de coordenadas polares con origen en el centro del aro, de variables (r, θ) .
- un sistema móvil de coordenadas cartesianas con origen en O , de variables (x, y) , cuyo eje x coincide con la recta OA para todo el movimiento.

La ecuación general para el movimiento de la partícula visto desde el sistema no inercial es:

$$m \vec{a}^{rel} = \vec{F} - m [\vec{a}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{rel})] \quad (1)$$

donde:

$$\vec{r}^{rel} = x \hat{i} \quad ; \quad \vec{V}^{rel} = \dot{x} \hat{i} \quad ; \quad \vec{a}^{rel} = \ddot{x} \hat{i}$$

$$\vec{F} = -k x \hat{i} + N_y \hat{j} + N_z \hat{k} - mg \hat{k}$$

$$\vec{a}_0 = -\Omega^2 R \hat{r} = \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = 0$$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}^{rel} = \Omega \hat{k} \times \dot{x} \hat{i} = \Omega \dot{x} \hat{j}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{rel}) = \Omega \hat{k} \times (\Omega \hat{k} \times x \hat{i}) = \Omega \hat{k} \times \Omega x \hat{j} = -\Omega^2 x \hat{i}$$

Reemplazando estos términos en (1):

$$m \ddot{x} \hat{i} = -k x \hat{i} + N_y \hat{j} + N_z \hat{k} - mg \hat{k} - m \left[\Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} + 2\Omega \dot{x} \hat{j} - \Omega^2 x \hat{i} \right]$$

entonces, las ecuaciones escalares en el sistema no inercial son:

$$\text{según } \hat{i}: \quad m \ddot{x} = -k x - m \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} + m \Omega^2 x \quad (2.1)$$

$$\text{según } \hat{j}: \quad 0 = N_y - m \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} - 2m \Omega \dot{x} \quad (2.2)$$

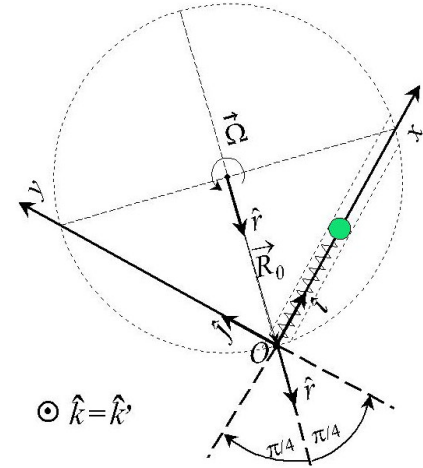
$$\text{según } \hat{k}: \quad 0 = N_z - mg \quad (2.3)$$

a) la distancia de P a O en función del tiempo:

Reemplazando en (2.1) el valor $\Omega^2 = \frac{k}{2m}$ y ordenando los términos, obtenemos la siguiente ecuación diferencial para $x(t)$:

$$\ddot{x} + \frac{k}{2m} x = \frac{k\sqrt{2}}{4m} R$$

de donde la solución para $x(t)$ es: $x(t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t - \frac{\sqrt{2}}{2} R$



$$\hat{r} = -\cos(\pi/4) \hat{i} - \sin(\pi/4) \hat{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j}$$

las condiciones iniciales son:

$$x(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \Rightarrow B - \frac{\sqrt{2}}{2} R = \frac{\sqrt{2}}{2} R \Rightarrow B = R\sqrt{2}$$

$$\dot{x}(0) = V_0 \Rightarrow \Omega A = V_0 \Rightarrow A = \frac{V_0}{\Omega} \quad (\text{si tomamos } V_0 = 0 \Rightarrow A = 0)$$

Por lo tanto:

$$x(t) = \frac{V_0}{\Omega} \sin \Omega t + \sqrt{2} R \cos \Omega t - \frac{\sqrt{2}}{2} R \quad (3)$$

b) la reacción que ejerce el tubo a P:

la reacción que ejerce el tubo sobre P es $\vec{N} = N_y \hat{j} + N_z \hat{k}$ donde N_y y N_z están dadas por las ecuaciones (2.2) y (2.3) respectivamente.

de (2.2): $N_y = m \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} + 2m \Omega \dot{x}$

de (3): $\dot{x}(t) = V_0 \cos \Omega t + \sqrt{2} R \Omega \sin \Omega t \Rightarrow N_y = m \Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} + 2m [\Omega V_0 \cos \Omega t + \sqrt{2} R \Omega^2 \sin \Omega t]$

de (2.3): $N_z = mg$

Finalmente:

$$\vec{N} = m \left[\Omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\Omega V_0 \cos \Omega t + 2\sqrt{2} R \Omega^2 \sin \Omega t \right] \hat{j} + mg \hat{k}$$

Solución Problema 3:

En la figura, representada en el plano del movimiento (horizontal), se define:

- un sistema fijo de coordenadas polares con origen en el eje vertical de rotación que se indica en el enunciado, de variables (r, θ) .
- un sistema móvil de coordenadas polares con origen en el centro del aro, de variables (ρ, ϕ) .

En este problema también interesa analizar el movimiento de la partícula dentro del sistema no inercial recién definido, donde la ecuación general de este movimiento es:

$$m \vec{a}^{rel} = \vec{F} - m [\vec{a}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}^{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{rel})] \quad (1)$$

evaluando los términos de la ecuación (1) para este caso:

$$\vec{a}^{rel} = -R \dot{\phi}^2 \hat{\rho} + R \ddot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\vec{F} = -N_\rho \hat{\rho} + N_z \hat{k} - mg \hat{k}$$

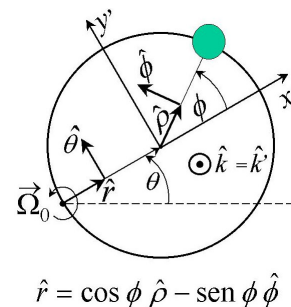
$$\vec{a}_0 = -\Omega_0^2 R \hat{r} = -\Omega_0^2 R \cos \phi \hat{\rho} + \Omega_0^2 R \sin \phi \hat{\phi}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = 0$$

$$\vec{r}^{rel} = R \hat{\rho}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}^{rel} = \Omega_0 \hat{k} \times R \dot{\phi} \hat{\phi} = -\Omega_0 R \dot{\phi} \hat{\rho}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{rel}) = \Omega_0 \hat{k} \times (\Omega_0 \hat{k} \times R \hat{\rho}) = \Omega_0 \hat{k} \times \Omega_0 R \hat{\phi} = -\Omega_0^2 R \hat{\rho}$$



Reemplazando estos términos en (1):

$$m(-R\dot{\phi}^2 \hat{\rho} + R\ddot{\phi} \hat{\phi}) = -N_{\rho} \hat{\rho} + N_z \hat{k} - mg \hat{k} - m \left[-\Omega_0^2 R \cos \phi \hat{\rho} + \Omega_0^2 R \sin \phi \hat{\phi} - 2\Omega_0 R \dot{\phi} \hat{\rho} - \Omega_0^2 R \hat{\rho} \right]$$

entonces, las ecuaciones escalares en el sistema no inercial son:

$$\text{según } \hat{k}: \quad 0 = N_z - mg \quad (2.1)$$

$$\text{según } \hat{\rho}: \quad -mR\dot{\phi}^2 = -N_{\rho} + m\Omega_0^2 R \cos \phi + m2\Omega_0 R \dot{\phi} + m\Omega_0^2 R \quad (2.2)$$

$$\text{según } \hat{\phi}: \quad mR\ddot{\phi} = -m\Omega_0^2 R \sin \phi \quad (2.3)$$

$$\text{de la ecuación (2.3): } \ddot{\phi} = -\Omega_0^2 \sin \phi = \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}_0^2] = \Omega_0^2 [\cos \phi - \cos \phi_0]$$

$$\text{condiciones iniciales: } \begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \dot{\phi}(0) = \frac{V_0}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\phi}^2(\phi) = \frac{V_0^2}{R^2} + 2\Omega_0^2 [\cos \phi - 1] \quad (3)$$

V_{0m} es el valor mínimo de V_0 para la partícula llegue justo al eje \Leftrightarrow con $V_0 = V_{0m}: \dot{\phi}(\phi = \pi) = 0$

Imponiendo esta condición de borde en (3):

$$\frac{V_{0m}^2}{R^2} + 2\Omega_0^2 [-1 - 1] = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{0m}^2 = 4\Omega_0^2 R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{0m} = 2\Omega_0 R}$$