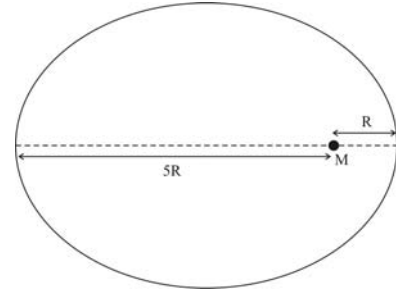


Control 3

(Tiempo: 3 horas)

1. Considere un satélite que se mueve alrededor de un planeta de masa M en una órbita elíptica de radio mínimo R y radio máximo $5R$.

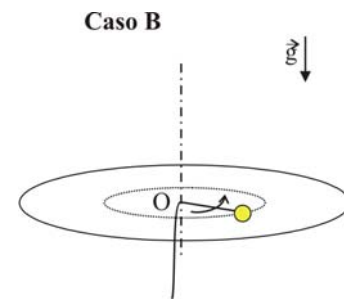
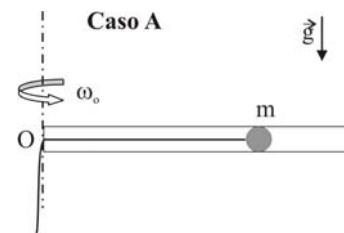
- a) Determine las velocidades máximas y mínimas del satélite en su movimiento.
- b) Si en el punto más alejado del planeta el satélite reduce su rapidez a la mitad, determine la velocidad máxima y el radio mínimo de la órbita resultante.



Nota: exprese sus resultados en términos de R y $C=GM$.

2. Considere las dos situaciones descritas en las figuras adjuntas. En ambos casos una partícula de masa m se encuentra atada a una cuerda ideal cuyo otro extremo pasa por un orificio ubicado en el punto O , de tal manera que la cuerda se alarga o acorta controladamente a una tasa constante v_o . En el caso A la partícula se encuentra en el interior de un tubo que gira con velocidad angular constante ω_o . En el caso B la partícula rota simplemente apoyada sobre una plataforma horizontal fija. En la condición inicial de ambos casos la partícula se encuentra a una distancia L del punto O y su velocidad angular es ω_o .

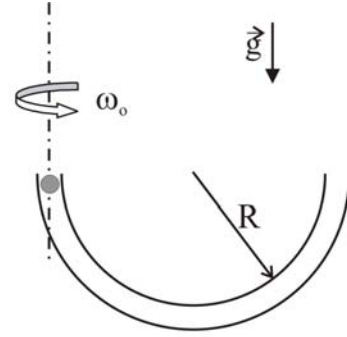
- a) Si no existe ningún tipo de roce, encuentre para cada caso una expresión para la tensión de la cuerda en función de la distancia de la partícula al punto O . ¿A qué distancia la tensión se duplica respecto del valor inicial?.
- b) Repita la parte a), pero ahora considerando un roce viscoso entre la partícula y el aire. En el caso A este roce tiene la forma $\vec{F}_R = -k \dot{r} \hat{r}$, mientras que en el caso B tiene la forma $\vec{F}_R = -k \vec{V}$, donde k es una constante conocida y \vec{V} es la velocidad de la partícula.



3. Considere un tubo de forma semicircular (radio R) que gira con velocidad angular ω_o respecto a un eje vertical, en la forma indicada en la figura adjunta. En un cierto instante se coloca una partícula de masa m en el extremo del tubo que está sobre el eje de rotación, soltándola desde el reposo. La partícula desliza con roce despreciable por el interior del tubo. Calcule:

a) Rapidez absoluta de la partícula al salir por el otro extremo del tubo.

b) Fuerza que la pared del tubo ejerce sobre la partícula justo antes de que ésta salga del tubo.



Información potencialmente útil:

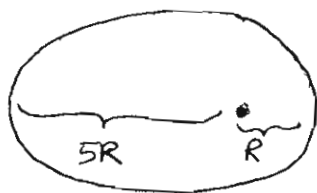
$$r(\theta) = \frac{h^2 / C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{C^2}} \cos \theta} \quad h = L_o / m \quad \varepsilon = E_o / m \quad C = GM$$

$$r(\theta) = \frac{r_o(1+e)}{1+e \cos \theta} \quad T^2 = \frac{(2\pi)^2}{C} a^3$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reales} - m\vec{a}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') - m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}'$$

①

a)



$$R_{\min} = R$$

$$R_{\max} = 5R$$

$$5R = \frac{R(1+e)}{(1-e)} \rightarrow 5(1-e) = 1+e$$

$$4 = 6e \rightarrow \boxed{e = \frac{2}{3}}$$

$$\frac{h^2}{C} = R(1+e) = \frac{5}{3}R$$

$$h = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{CR}$$

$$h = v_{\min} r_{\max} = v_{\min} \cdot 5R = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{CR} \Rightarrow \boxed{v_{\min} = \sqrt{\frac{1}{15}} \sqrt{\frac{C}{R}}}$$

$$h = v_{\max} \cdot r_{\min} = v_{\max} \cdot R = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{CR} \Rightarrow \boxed{v_{\max} = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{C}{R}} \sim 1.3 \sqrt{\frac{C}{R}}}$$

b) datos de nueva órbita: $r_{\max} = 5R$ $v_{\min} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{15}} \sqrt{\frac{C}{R}}$

$$\infty h = 5R \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{15}} \sqrt{\frac{C}{R}} = \sqrt{\frac{5}{12}} \sqrt{CR}$$

$$E = -\frac{C}{5R} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{15}} \sqrt{\frac{C}{R}} \right)^2$$

$$= -\frac{C}{5R} + \frac{1}{120} \frac{C}{R} = -\frac{23}{120} \frac{C}{R}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{C^2}} = \sqrt{1 + \frac{2}{C^2} \left(-\frac{23}{120} \frac{C}{R} \right) \left(\frac{5}{12} CR \right)} = \sqrt{1 - \frac{23}{144}} = \frac{11}{12}$$

$$r_{\min} (1+e) = \frac{h^2}{C} \rightarrow \boxed{r_{\min} = \frac{\frac{5}{12} R}{1 + \frac{11}{12}} = \frac{5}{23} R}$$

$$v_{\max} \cdot r_{\min} = h \rightarrow \boxed{v_{\max} = \frac{\sqrt{\frac{5}{12}} \sqrt{CR}}{\frac{5}{23} R} = \frac{23}{\sqrt{60}} \sqrt{\frac{C}{R}} \sim 3 \sqrt{\frac{C}{R}}}$$

$$\textcircled{2} \quad \dot{r} = v_0 \quad \ddot{r} = 0$$

a) Caso A

$$\hat{r}: m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T$$

$$\ddot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = \omega_0$$

$$\Rightarrow \boxed{T = m r \omega_0^2}$$

$$T_0 = m L \omega_0^2$$

$$2T_0 = m R \omega_0^2 \rightarrow R = \frac{2T_0}{m \omega_0^2} = \frac{2m L \omega_0^2}{m \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 2L}$$

Caso B

$$T = + m r \dot{\theta}^2$$

pero ahora $\dot{\theta}$ no es constante.

sólo fuerza central $\Rightarrow r^2 \dot{\theta} = h = \text{constante} = L^2 \omega_0$

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{m h^2}{r^3} = \frac{m (L^2 \omega_0)^2}{r^3}}$$

$$r = L \rightarrow T_0 = m L \omega_0^2$$

$$2T_0 = \frac{m (L^2 \omega_0)^2}{R^3} \Rightarrow R^3 = \frac{m (L^2 \omega_0)^2}{2T_0} = \frac{m (L^2 \omega_0)^2}{2m L \omega_0^2} = \frac{L^3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2^{1/3}} L}$$

b)

Caso A

$$\hat{r}: -mr\ddot{\theta}^2 = -T - k\dot{r} \quad \leftarrow \dot{r} = v_0$$

$$\dot{\theta} = \omega_0$$

$$T = mr\omega_0^2 - k\dot{r}$$

$$T_0 = mL\omega_0^2 - k\dot{r}$$

$$2T_0 = mR\omega_0^2 - k\dot{r}$$

$$R = \frac{2T_0 + k\dot{r}}{m\omega_0^2} = \frac{2(mL\omega_0^2 - k\dot{r}) + k\dot{r}}{m\omega_0^2}$$

$$R = 2L - \frac{k\dot{r}}{m\omega_0^2}$$

Caso B

$$\hat{r}: m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T - k\dot{r} \quad (1)$$

$$\hat{\theta}: m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -k r \dot{\theta} \quad (2)$$

para $\dot{r} = v_0$ $\ddot{r} = 0$

$$(2) \rightarrow m \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = -k r \dot{\theta}$$

$$\frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = -\frac{k}{m} r^2 \dot{\theta} \quad \left(\begin{array}{l} \text{também vale} \\ \text{de ec. de} \\ \text{mom. angular} \end{array} \right)$$

$$\text{seja } h = r^2 \dot{\theta} \Rightarrow h = h_0 e^{-\frac{k}{m} t} \quad \bar{\omega} = \frac{m}{k}$$

$$(1): T = m r \dot{\theta}^2 - k \dot{r}$$

$$r = L + v_0 t$$

$$\Rightarrow t = \frac{r-L}{v_0}$$

$$T = m \frac{h^2}{r^3} - k v_0$$

$$h(r) = h_0 e^{-\frac{r-L}{v_0 \bar{\omega}}}$$

$$T(r) = \frac{m}{r^3} \left(h_0 e^{-\frac{r-L}{v_0 \bar{\omega}}} \right)^2 - k v_0$$

$$\bar{\omega} = \frac{m}{k}$$

$$h_0 = L^2 \omega_0$$

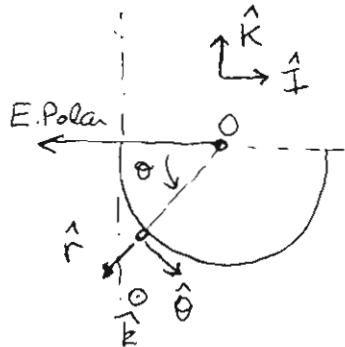
$$T(r=L) = T_0 = -kV_0 + mL\omega_0^2$$

$$T(r=R) = 2T_0 \Rightarrow$$

$$-kV_0 + \frac{m}{R^3} \left(h_0 e^{-\frac{R-L}{\sqrt{0.6}}} \right)^2 = 2(-kV_0 + mL\omega_0^2)$$

ecuación para R

(3)



a)

$$\hat{k} = -\sin\theta \hat{r} - \cos\theta \hat{\theta}$$

$$\hat{i} = -\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{m}\vec{g} = -mg \hat{k} = -mg(-\sin\theta \hat{r} - \cos\theta \hat{\theta})$$

$$\vec{N} = N_r \hat{r} + N_k \hat{k}$$

Para calcular las fuerzas mercales:

$$\vec{\Omega}_e = \omega_0 \hat{k} = \omega_0(-\sin\theta \hat{r} - \cos\theta \hat{\theta})$$

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{r} = R \hat{r}$$

$$\vec{a}_0 = -R\omega_0^2 \hat{i}$$

Fuerzas mercales:

$$-m\vec{a}_0 = -m(-R\omega_0^2 \hat{i}) = mR\omega_0^2(-\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v} = -2m\omega_0(-\sin\theta \hat{r} - \cos\theta \hat{\theta}) \times R\dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$= 2m\omega_0 \sin\theta R\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta})$$

$$\vec{F}_{cor} = 2m\omega_0 R\dot{\theta} \sin\theta \hat{k}$$

$$\vec{\Omega}_e \times \vec{r} = \omega_0(-\sin\theta \hat{r} - \cos\theta \hat{\theta}) \times R\hat{r} = R\omega_0 \cos\theta \hat{k}$$

$$\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}) = \omega_0(-\sin\theta \hat{r} - \cos\theta \hat{\theta}) \times R\omega_0 \cos\theta \hat{k}$$

$$= R\omega_0^2 \cos\theta (\sin\theta \hat{\theta} - \cos\theta \hat{r})$$

$$\vec{F}_f = -mR\omega_0^2 \cos\theta (\sin\theta \hat{\theta} - \cos\theta \hat{r})$$

Ec. de Movimiento:

$$\hat{\theta}: m R \ddot{\theta} = mg \cos \theta + m R \omega_0^2 \sin \theta - m R \omega_0^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \cos \theta + \omega_0^2 \sin \theta - \omega_0^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{R} \cos \theta + \omega_0^2 \sin \theta - \omega_0^2 \cos \theta \sin \theta \quad \bigg| \int_i^f$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}_f^2 = \frac{g}{R} \sin \theta \Big|_0^{\pi} + \omega_0^2 \underbrace{[-\cos \theta]}_2 \Big|_0^{\pi} - \omega_0^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi}$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}_f^2 = 2 \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_f = 2 \omega_0}$$

Velocidad absoluta final

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{r} + \vec{v}'$$

$$= R \omega_0 \hat{j} + \omega_0 R \hat{j} + R 2 \omega_0 \hat{k}$$

$$= 2 R \omega_0 (\hat{j} + \hat{k})$$

$$\boxed{v_f = 2\sqrt{2} R \omega_0}$$

b)

$$\hat{r}: -mR\dot{\theta}^2 = N_r + mg \sin \theta + mR\omega_0^2 \cos^2 \theta - mR\omega_0^2 \cos \theta$$

en la condición final

$$\theta = \pi$$

$$\dot{\theta} = 2\omega_0$$

$$N_{rf} = -mR4\omega_0^2 - mR\omega_0^2 - mR\omega_0^2$$

$$N_{rf} = -6mR\omega_0^2$$

 $\hat{k}:$

$$0 = N_k + 2m\omega_0 R \dot{\theta} \sin \theta$$

en la condición final $\theta = \pi \Rightarrow N_{kf} = 0$

$$\therefore \boxed{|\vec{N}_f| = 6mR\omega_0^2}$$