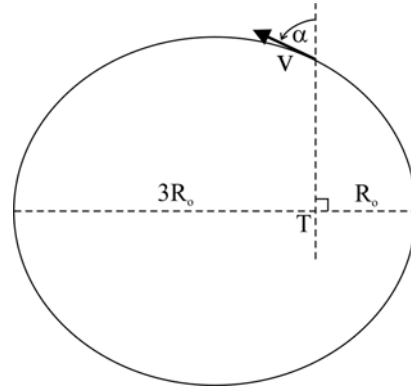


### Control 3 (3 horas)

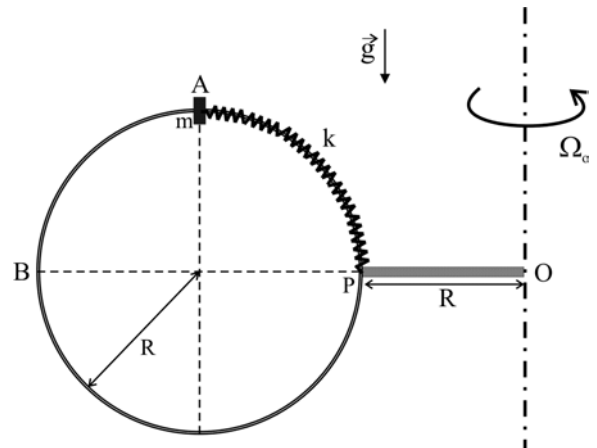
1. Considere un satélite que se mueve alrededor de la Tierra en una órbita elíptica de radio mínimo  $R_o$  y radio máximo  $3R_o$  (suponga  $C=GM$  conocido).

- a) Determine su rapidez,  $V$ , y el ángulo  $\alpha$  entre su vector velocidad y su vector posición en el momento en que este último es perpendicular al vector de radio mínimo de la elipse.
- b) Si en el instante descrito en a) el satélite duplica en forma instantánea su rapidez, determine el tipo de órbita resultante, su excentricidad y su radio mínimo.



2. Un anillo de masa  $m$  se encuentra inserto en un aro circular vertical de radio  $R$ . El aro se encuentra soldado a una barra horizontal OP de largo  $R$  que lo hace girar con velocidad angular constante respecto a un eje vertical que pasa por O. Un resorte ideal de constante elástica  $k$  y largo natural nulo liga a través del aro al anillo con el punto P. Se pide:

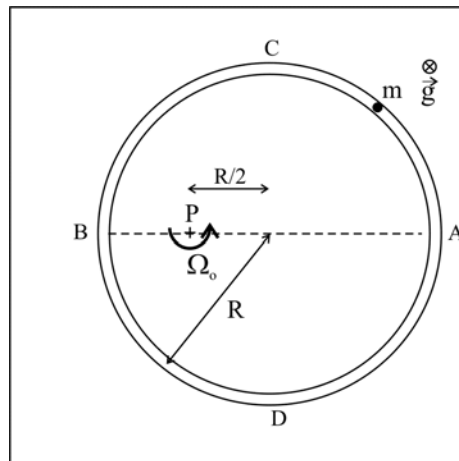
- a) Determinar la magnitud de la velocidad angular  $\Omega_o$  si el anillo permanece en reposo relativo al aro cuando se encuentra ubicado en el punto A (el punto más alto del aro). (1.5 puntos)
- b) Determinar la mínima rapidez relativa al aro que el anillo debe tener en el punto A para que en su movimiento alcance a llegar al punto B (punto opuesto a P). (3 puntos)
- c) Para la condición de b), determinar la(s) fuerza(s) que el aro ejerce sobre el anillo en el punto B. (1.5 puntos)



3. Una placa cuadrada horizontal gira con velocidad angular  $\vec{\Omega} = \Omega_o \hat{k}$  ( $\Omega_o > 0$ ) constante alrededor de un eje vertical que pasa por el punto P. Sobre la placa se encuentra un tubo circular horizontal (radio  $R$ ), cuyo centro se encuentra a una distancia  $R/2$  de P. Por el interior del tubo puede deslizarse sin roce una partícula de masa  $m$ .
- a) Si la partícula se encuentra en reposo relativo en el punto más alejado de P (punto A), determine el periodo de las pequeñas oscilaciones que se producen al desplazarla ligeramente desde esta posición de equilibrio relativo.

Considere ahora que la partícula se encuentra en reposo relativo en el punto más cercano a P (punto B), en una condición de equilibrio inestable. Luego de sufrir una pequeña perturbación, la partícula se desplaza por el interior del tubo.

- b) Determine la velocidad relativa que tiene la partícula cuando pasa por el punto A.
- c) Calcule la fuerza horizontal que el tubo ejerce sobre la partícula cuando ella se ha desplazado  $\pi R/2$  por el interior del tubo, es decir, cuando pasa por C o D, según haya sido la dirección de la perturbación inicial. ¿Es el mismo valor si la perturbación inicial fue en uno u otro sentido?.



Información potencialmente útil:

$$r(\theta) = \frac{h^2 / C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{C^2}} \cos \theta}$$

$$h = L_o / m \quad \varepsilon = E_o / m \quad C = GM$$

$$r(\theta) = \frac{r_o(1+e)}{1+e \cos \theta}$$

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{C} a^3$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reales} - m\vec{a}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') - m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}'$$

(PI)

1/3

$$a) \quad \vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \quad (1)$$

el ángulo  $\alpha$  es el ángulo de  $\vec{v}$  en  $\theta = 90^\circ$

$$r = \frac{r_0(1+e)}{1+e\cos\theta} \quad (*)$$

$$r(90^\circ) = r_{90} = r_0(1+e) \quad (2)$$

$$r_{\max} = 3r_0 = \frac{r_0(1+e)}{(1-e)} \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{2}}$$

$$\therefore \boxed{r_{90} = \frac{3}{2} r_0} \quad (3)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \text{en (1):} \quad \vec{v} = \dot{\theta} \left( \frac{dr}{d\theta} \hat{r} + r \hat{\theta} \right) \quad (4)$$

$$(*) \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{-r_0(1+e)(-e\sin\theta)}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{r_0(1+e)e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\text{evaluando en } \theta = 90^\circ \quad \left. \frac{dr}{d\theta} \right|_{90} = \frac{r_0(1+e)}{r_{90}} e = r_{90} e$$

$$(4) \Rightarrow \vec{v} = \dot{\theta}_{90} (r_{90} e \hat{r} + r_{90} \hat{\theta}) = \dot{\theta}_{90} r_{90} (e \hat{r} + 1 \hat{\theta})$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \alpha \\ \nwarrow \\ \text{---} \end{array} e \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{e} = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \arctan 2 = 63,4^\circ}$$

2/3

$$|\vec{v}_{q_0}| = \dot{\theta}_{q_0} r_{q_0} \sqrt{1+e^2} = \dot{\theta}_{q_0} r_{q_0} \sqrt{\frac{5}{4}}$$

pero  $\dot{\theta}_{q_0} = \frac{h}{r_{q_0}^2} \Rightarrow v_{q_0} = \frac{h}{r_{q_0}} \sqrt{\frac{5}{4}}$

ya sabemos que  $r_{q_0} = \frac{3}{2} r_0$ , sólo falta  $h$ .

$$\frac{h^2}{C} = r_0 (1+e) \Rightarrow h^2 = r_{q_0} \cdot C$$

$$\Rightarrow v_{q_0} = \frac{\sqrt{r_{q_0} \cdot C}}{r_{q_0}} \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{C}{r_{q_0}}} \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{10}{12} \frac{C}{r_0}}$$

$$v_{q_0} = \sqrt{\frac{5}{6}} \sqrt{\frac{C}{r_0}}$$



3/3

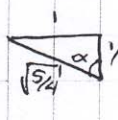
b) Determinar  $E$  y  $h$  después del impulso:

$$v_+ = 2 \left( \sqrt{\frac{5}{6}} \sqrt{\frac{C}{r_0}} \right) \rightarrow v_+^2 = \frac{10}{3} \frac{C}{r_0}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{K}{m} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \frac{C}{r_0} = \frac{5}{3} \frac{C}{r_0} \\ \frac{V}{m} &= -\frac{C}{r_{q0}} = -\frac{2}{3} \frac{C}{r_0} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E_+ &= \frac{5}{3} \frac{C}{r_0} - \frac{2}{3} \frac{C}{r_0} = \frac{C}{r_0} \\ &= \end{aligned}$$

$E > 0 \Rightarrow \text{Hiperbola!}$

$$h_+ = r_{q0} v_+ \sin \alpha$$



$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore h_+ = \frac{3}{2} r_0 \sqrt{\frac{10}{3}} \frac{C}{r_0} \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{6} \sqrt{C r_0}$$

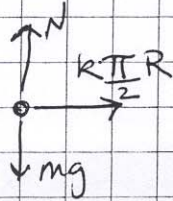
conociendo  $h_+$  y  $E_+$  es directo conocer  $e_+$  y  $r_{0+}$ 

$$e_+ = \sqrt{1 + \frac{2E_+ h_+^2}{C^2}} = \sqrt{1 + \frac{2 \left( \frac{C}{r_0} \right) (6 C r_0)}{C^2}} = \sqrt{13} \sim 3.6 \quad \checkmark$$

$$\frac{h_+^2}{C} = r_{0+} (1 + e_+) \rightarrow r_{0+} = \frac{h_+^2}{C(1 + e_+)}$$

$$r_{0+} = \frac{6 C r_0}{C(1 + \sqrt{13})} = \frac{6}{1 + \sqrt{13}} r_0 \sim 1.3 r_0$$

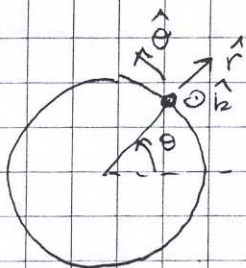
a) equilibrio:



$$\frac{k \pi R}{2} = m \Omega_0^2 2R$$

$$\boxed{\Omega_0^2 = \frac{\pi k}{4 m}}$$

b)



Fuerzas Reales:

$$\text{Resorte: } \vec{F}_R = -kR\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{N} = N_z \hat{k} + N_r \hat{r}$$

$$m\vec{g} = -mg \cos\theta \hat{\theta} - mg \sin\theta \hat{r}$$

Fuerzas aparentes:

$$\vec{\Omega}_0 = \Omega_0 \hat{k} = \Omega_0 (\cos\theta \hat{\theta} + \sin\theta \hat{r})$$

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \hat{r} + R \ddot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \hat{r} + R \ddot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{a}_0 = 2R \Omega_0^2 \hat{I} = 2R \Omega_0^2 (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})$$

$$-m\vec{a}_0 = \underline{-2mR \Omega_0^2 (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})}$$



$$\begin{aligned}\vec{\Omega}_0 \times \vec{r} &= \Omega_0 (\cos\theta \hat{\theta} + \sin\theta \hat{r}) \times R \hat{r} \\ &= \Omega_0 R \cos\theta (-\hat{k})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}) &= \Omega_0 (\cos\theta \hat{\theta} + \sin\theta \hat{r}) \times \Omega_0 R \cos\theta (-\hat{k}) \\ &= -R\Omega_0^2 \cos\theta (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})\end{aligned}$$

$$\vec{F}_c = -m \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}) = \underline{mR\Omega_0^2 \cos\theta (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}_0 \times \vec{v} &= \Omega_0 (\cos\theta \hat{\theta} + \sin\theta \hat{r}) \times R \dot{\theta} \hat{\theta} \\ &= R\Omega_0 \dot{\theta} \hat{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Cor}} = -2mR\Omega_0 \dot{\theta} \hat{k}}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\hat{r}: \quad -mR\dot{\theta}^2 = N_r - mg\sin\theta - 2mR\Omega_0^2 \cos\theta + mR\Omega_0^2 \cos^2\theta$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}: \quad mR\ddot{\theta} &= -kR\theta - mg\cos\theta + 2mR\Omega_0^2 \sin\theta \\ &\quad - mR\Omega_0^2 \cos\theta \sin\theta\end{aligned}$$

$$\hat{k}: \quad 0 = N_z - 2mR\Omega_0 \dot{\theta}$$

3/3

$$\hat{\theta}: \ddot{\theta} = -\frac{k}{m}\theta - \frac{g}{R}\cos\theta + 2\Omega_0^2\sin\theta - \Omega_0^2\cos\theta\sin\theta$$

$$\int_{\dot{\theta}_i}^0 d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(-\frac{k}{m}\theta - \frac{g}{R}\cos\theta + 2\Omega_0^2\sin\theta - \Omega_0^2\cos\theta\sin\theta\right) d\theta$$

$$-\frac{1}{2}\dot{\theta}_i^2 = -\frac{k}{m}\left(\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) - \frac{g}{R}\sin\theta \Big|_{\pi/2}^{\pi} - 2\Omega_0^2\cos\theta \Big|_{\pi/2}^{\pi} + \frac{\Omega_0^2}{2}\cos^2\theta \Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$-\frac{1}{2}\dot{\theta}_i^2 = -\frac{k\pi^2}{2m}\frac{3}{4} + \frac{g}{R} + 2\Omega_0^2 + \frac{\Omega_0^2}{2}$$

$$\dot{\theta}_i^2 = \frac{k}{m}\frac{\pi^2}{4}\frac{3}{4} - \frac{2g}{R} - 5\Omega_0^2 \quad \text{però } \Omega_0^2 = \frac{\pi}{4}\frac{k}{m}$$

$$\dot{\theta}_i^2 = \frac{k}{m}\frac{\pi}{4}(3\pi - 5) - \frac{2g}{R}$$

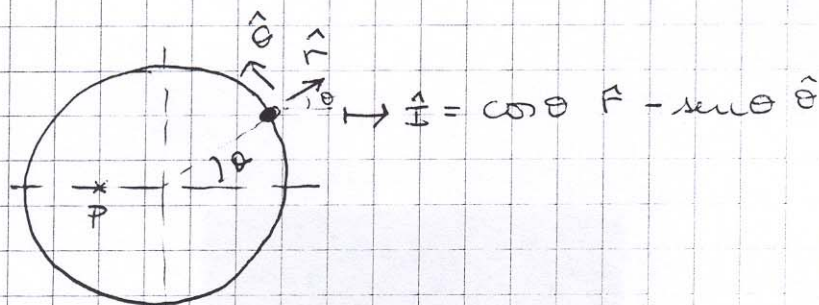
$$v_i = R\dot{\theta}_i = \sqrt{\frac{kR^2}{m}\frac{\pi}{4}(3\pi - 5) - 2gR}$$

$$c) \dot{\theta}_B = 0 \quad \theta_B = \pi$$

$$N_r = -2mR\Omega_0^2 - mR\Omega_0^2 = -3mR\Omega_0^2$$

$$N_z = 0$$





$$\begin{aligned}\vec{r} &= R \hat{r} \\ \dot{\vec{r}} &= R \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \ddot{\vec{r}} &= -R \dot{\theta}^2 \hat{r} + R \ddot{\theta} \hat{\theta}\end{aligned}$$

$$\vec{a}_o = -\frac{\Omega_o^2 R}{2} \hat{I} = -\frac{\Omega_o^2 R}{2} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

$$\vec{N} = N \hat{r}$$

$$\vec{F}_g = -m \vec{\Omega}_o \times (\vec{\Omega}_o \times \vec{r}) = m \Omega_o^2 R \hat{r}$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m \vec{\Omega}_o \times \vec{v} = 2m \Omega_o R \dot{\theta} \hat{r}$$

$$-m \vec{a}_o = m \frac{\Omega_o^2 R}{2} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

cc. en  $\ddot{\theta}$ :

$$m R \ddot{\theta} = -m \frac{\Omega_o^2 R}{2} \sin \theta$$

a)

$$\ddot{\theta} = -\frac{\Omega_o^2}{2} \sin \theta \rightarrow \omega_o = \frac{\Omega_o}{\sqrt{2}}$$

$$\left( T = \frac{2\pi}{\omega_o} \right)$$

2/3

b)

$$\ddot{\theta} = -\frac{\Omega_0^2}{2} \sin \theta$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\dot{\theta}^2} d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \int_{\pi}^0 -\frac{\Omega_0^2}{2} \sin \theta \, d\theta$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{\Omega_0^2}{2} \cos \theta \Big|_{\pi}^0 = \frac{\Omega_0^2}{2} (1 + 1) = \Omega_0^2$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{2} \Omega_0$$

$$\rightarrow \boxed{v = \sqrt{2} \Omega_0 R}$$



3/3

c)

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{\Omega_0^2}{2} \cos \theta \Big|_{\pi}^{\theta}$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{\Omega_0^2}{2} (1 + \cos \theta)$$

$$\dot{\theta}^2 = \Omega_0^2 (1 + \cos \theta)$$

ec. de mto en  $\hat{r}$ : C:  $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{\theta} = -\Omega_0$

D:  $\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \dot{\theta} = +\Omega_0$

$$-mR\dot{\theta}^2 = N + m\Omega_0^2 R + 2m\Omega_0 R\dot{\theta} + m\frac{\Omega_0^2 R}{2} \cos \theta$$

$$\frac{N}{mR\Omega_0^2} = - \left( 1 + 2\frac{\dot{\theta}}{\Omega_0} + \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\dot{\theta}^2}{\Omega_0^2} \right)$$

punto C:  $\theta = \frac{\pi}{2} \quad \dot{\theta} = -\Omega_0 \quad \boxed{\frac{N_C}{mR\Omega_0^2} = 0}$

punto D:  $\theta = \frac{3\pi}{2} \quad \dot{\theta} = +\Omega_0 \quad \boxed{\frac{N_D}{mR\Omega_0^2} = -4}$

o<sub>0</sub> son distintos (debido a Coriolis).