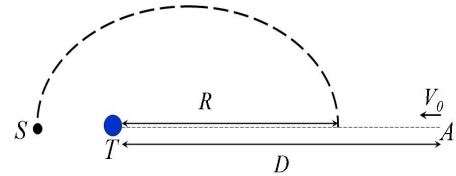


### PROBLEMA 1

Se descubre un asteroide  $A$  a una distancia  $D$  de la Tierra, que se mueve con rapidez  $V_0$  directo hacia ella (ver figura). Afortunadamente la Agencia Espacial Chilena cuenta con un satélite  $S$  que en ese mismo instante se ubica justo al otro lado de la Tierra como se muestra en la figura. El plan ideado para salvar la Tierra consiste en dar al satélite una órbita elíptica de tal manera que intercepte perpendicularmente la trayectoria del asteroide y choque con él.

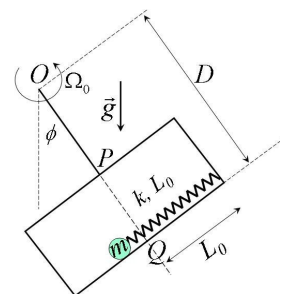


Para lograr este objetivo es necesario determinar la excentricidad de la órbita elíptica requerida.

- Si se observó que  $V_0^2 = 2GM/D$ , determine la distancia del asteroide a la Tierra en función del tiempo ( $t=0$  en la condición de la figura). [2 pts.]
- Determine la distancia  $R$  de intercepción, suponiendo conocida la excentricidad  $e$  de la órbita elíptica del satélite. (Sugerencia: exprese el semieje mayor de la órbita elíptica en función de  $R$  y  $e$  y utilice la 3a Ley de Kepler [ $T^2 = 4\pi^2 a^3 / GM$ ] para determinar el tiempo que  $S$  que tarda en interceptar al asteroide). [3 pts.]
- Si en  $t = 0$  el satélite  $S$  se encontraba a una distancia  $D/5$  de la Tierra, escriba una ecuación algebraica que permita calcular  $e$  (no la resuelva). [1 pto.]

### PROBLEMA 2

Un recipiente rectangular de ancho basal  $2L_0$  está soldado a un brazo  $OP$  que lo hace girar con velocidad angular constante,  $\Omega_0$ , en torno a un eje horizontal que pasa por el punto  $O$ . La distancia entre el punto  $O$  y el fondo del recipiente es  $D$ . En el fondo del recipiente una partícula de masa  $m$  se encuentra ligada mediante un resorte ideal de constante elástica  $k$  y largo natural  $L_0$  a uno de los costados del recipiente como muestra la figura. Desprecie todo roce y suponga que se cumple que  $k = m\Omega_0^2$ .

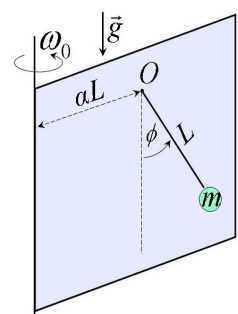


Si  $\phi(t = 0) = 0$  (eje  $OP$  vertical), la partícula está en el punto  $Q$  (resorte en su largo natural) y su velocidad relativa al recipiente es nula, se pide:

- Determinar la distancia de la partícula al punto  $Q$ , en función del tiempo.
- Determinar una condición entre  $\Omega_0$  y  $D$  tal que la partícula nunca se separe del fondo del recipiente.

### PROBLEMA 3

La puerta giratoria de la figura se mueve con velocidad angular constante  $\omega_0$  en torno a un eje vertical. En la puerta se ubica un péndulo formado por una partícula  $P$  de masa  $m$ , colgando desde el punto  $O$  mediante una cuerda de largo  $L$ . La distancia entre el punto  $O$  y el eje de giro de la puerta es  $D = \alpha L$ . Inicialmente la partícula se encuentra en una posición tal que la cuerda está en  $\phi = \pi/4$ .



Suponiendo que la cuerda se mantiene tensa y el péndulo se mantiene vertical (no se separa de la superficie de la puerta) y despreciando todo tipo de roces, determine:

- La velocidad angular  $\dot{\phi}$  en función de  $\phi$ . [3 pts.]
- La reacción de la superficie de la puerta sobre el péndulo [1 pto.]
- La tensión de la cuerda. [1 pto.]
- A partir de (b) y (c) imponga condiciones para el cumplimiento de los supuestos. Analice el efecto de la dirección del movimiento del péndulo. [1 pto.]

### Solución Problema N°1:

a) La distancia del asteroide en función del tiempo:

Sean  $r(t)$  y  $v(t)$  la distancia del asteroide a la tierra y su rapidez, respectivamente.

Entonces, la energía del asteroide antes del choque es:  $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{D} = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{2GM}{r}$

El asteroide se acerca  $\Rightarrow \frac{dr}{dt} < 0 \quad \frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2GM}{r}}$

$$\int_D^r r^{1/2} dr = -\int_0^t \sqrt{2GM} dt \Rightarrow \frac{2}{3} [r^{3/2} - D^{3/2}] = -\sqrt{2GM} t \Rightarrow r(t) = \left[ D^{3/2} - \frac{3\sqrt{2GM}}{2} t \right]^{2/3} \quad (1)$$

b) La distancia  $R$ :

i) Movimiento del Satélite: Sea  $r_0$  el valor  $r_{\min}$  para la órbita elíptica del satélite. Entonces, encontramos las siguientes expresiones para  $r_{\max} = R$  (donde intercepta perpendicularmente) y semi-eje mayor  $a$ :

$$R = r_0 \frac{1+e}{1-e} \quad ; \quad a = \frac{1}{2} \left[ r_0 + \frac{r_0(1+e)}{(1-e)} \right] = \frac{r_0(1-e+1+e)}{2(1-e)} = \frac{r_0}{1-e} \quad ; \quad \text{de donde } \frac{a}{R} = \frac{r_0}{(1-e)r_0(1+e)} \Rightarrow a = \frac{R}{1+e}$$

Sea  $t^*$  el tiempo que demora el satélite en llegar al punto de intercepción, que corresponde a la mitad del período de su órbita elíptica.

$$\text{De la tercera ley de Kepler: } T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} = \frac{4\pi^2}{GM} \left[ \frac{R}{1+e} \right]^3 = (2t^*)^2$$

ii) Movimiento del Asteroide: El asteroide también debe llegar al punto de intercepción durante el mismo tiempo  $t^*$ . Es decir,  $r(t = t^*) = R$ .

$$\text{En (1): } R^{3/2} = D^{3/2} - \frac{3\sqrt{2GM}}{2} t^* = D^{3/2} - \frac{3\sqrt{2GM}}{2} \frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left[ \frac{R}{1+e} \right]^{3/2} \Rightarrow R^{3/2} \left[ 1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2(1+e)^3}} \right] = D^{3/2}$$

$$\text{de donde: } R = D \left[ 1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2(1+e)^3}} \right]^{-2/3}$$

c) Expresión para la excentricidad de la órbita del satélite:

Por enunciado  $r_0 = D/5$ . Entonces:  $\frac{D}{5} = R \frac{1-e}{1+e}$ , de donde obtenemos el valor de la excentricidad  $e$

$$\frac{D}{5} = \frac{1-e}{1+e} D \left[ 1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2(1+e)^3}} \right]^{-2/3} \Rightarrow \frac{1-e}{1+e} \left[ 1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2(1+e)^3}} \right]^{-2/3} = \frac{1}{5}$$

### Solución Problema N°2:

Tomamos el sistema de referencia no inercial cartesiano  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  de la figura, con origen en  $Q$  y moviéndose junto con el recipiente con  $\vec{\Omega}_0 = \text{cte}$ . Entonces:

$$m \vec{a}^{rel} = \vec{F} - m(\vec{a}_Q + 2\vec{\Omega}_0 \times \vec{v}^{rel} + \vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}^{rel}))$$

$$\vec{a}_Q = \Omega_0^2 D \hat{k} \quad ; \quad 2\vec{\Omega}_0 \times \vec{v}^{rel} = 2\Omega_0 \dot{x} (\hat{j} \times \hat{i}) = -2\Omega_0 \dot{x} \hat{k} \quad ;$$

$$\vec{\Omega}_0 \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}^{rel}) = \Omega_0^2 x (\hat{j} \times (\hat{j} \times \hat{i})) = -\Omega_0^2 x \hat{i}$$

$$\text{Además: } \vec{F} = mg(\sin \phi \hat{i} - \cos \phi \hat{k}) - kx \hat{i}$$

Con la condición de enunciado  $k = m\Omega_0^2$ , las ecuaciones del movimiento en el sistema no inercial son:

$$\text{Según } \hat{i}: m \ddot{x} = mg \sin \phi - m\Omega_0^2 x + m\Omega_0^2 x = mg \sin \phi \quad (1)$$

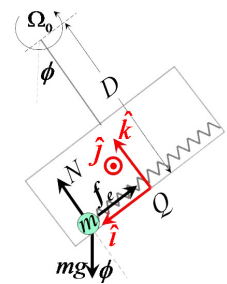
$$\text{Según } \hat{k}: 0 = N - mg \cos \phi - \Omega_0^2 D + 2m\Omega_0 \dot{x} \quad (2)$$

a) La distancia  $x$  en función del tiempo:

de (1):  $\ddot{x} = g \sin \phi$ , con las condiciones iniciales:  $\phi(0) = 0$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ ;  $x(0) = 0$

$$\text{Entonces: } \dot{x} = \dot{x}(0) - g(\cos \phi - \cos \phi(0)) = g(1 - \cos \phi) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pero } \Omega_0 = \text{cte y } \phi(0) = 0 \Rightarrow \phi(t) = \Omega_0 t \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{g}{\Omega_0} (1 - \cos \Omega_0 t) \quad (3)$$

$$\text{Análogamente, considerando que } x(0) = 0, \text{ obtenemos } x(t) = \frac{g}{\Omega_0^2} [\Omega_0 t - \sin \Omega_0 t]$$



b) Condición de no separación:

$$\text{de (2)} \quad N = mg \cos \phi + m\Omega_0^2 D - 2m\Omega_0 \dot{x}$$

$$\text{Reemplazamos } \dot{x} \text{ de (3)} : N = mg \cos \phi + m\Omega_0^2 D - 2m\Omega_0 \frac{g}{\Omega_0} (1 - \cos \Omega_0 t) = m(3g \cos \Omega_0 t + \Omega_0^2 D - 2g)$$

Nunca se separa  $\Rightarrow N \geq 0, \forall t \Rightarrow 3g \cos \Omega_0 t + \Omega_0^2 D - 2g \geq 0, \forall t$ . El mínimo ocurre cuando  $\cos \Omega_0 t = -1$

Entonces, la condición es:  $\Omega_0^2 D - 5g \geq 0 \Rightarrow \Omega_0^2 \geq 5g/D$

### Solución Problema N°3:

Tomamos el sistema no inercial de coordenadas cilíndricas  $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$  con origen en  $O$ , y girando junto con la puerta.

$$\vec{\omega}_0 = \text{cte} \Rightarrow m \vec{a}^{rel} = \vec{F} - m(\vec{a}_0 + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}^{rel} + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}^{rel}))$$

$$\vec{a}_0 = -\alpha \omega_0^2 L (\sin \phi \hat{\rho} + \cos \phi \hat{\phi})$$

$$\vec{\omega}_0 = -\omega_0 \cos \phi \hat{\rho} + \omega_0 \sin \phi \hat{\phi}$$

$$\vec{v}^{rel} = L \dot{\phi} \hat{\phi} ; \quad \vec{r}^{rel} = L \hat{\rho}$$

$$2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}^{rel} = 2\omega_0 \cos \phi L \dot{\phi} \underbrace{(-\hat{\rho} \times \hat{\phi})}_{-\hat{k}}$$

$$\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}^{rel}) = \vec{\omega}_0 \times (\omega_0 \sin \phi L \underbrace{(\hat{\phi} \times \hat{\rho})}_{-\hat{k}}) = \omega_0^2 L \sin \phi (\cos \phi \underbrace{(-\hat{\rho} \times -\hat{k})}_{-\hat{\phi}} + \sin \phi \underbrace{(\hat{\phi} \times -\hat{k})}_{-\hat{\rho}})$$

Las ecuaciones del movimiento en el sistema no inercial quedan como sigue:

$$\hat{\rho}: \quad -mL \dot{\phi}^2 = -T + mg \cos \phi + m\alpha \omega_0^2 L \sin \phi + m\omega_0^2 L \sin^2 \phi \quad (1)$$

$$\hat{\phi}: \quad mL \ddot{\phi} = -mg \sin \phi + m\alpha \omega_0^2 L \cos \phi + m\omega_0^2 L \sin \phi \cos \phi \quad (2)$$

$$\hat{k}: \quad 0 = N + 2m \omega_0 \cos \phi L \dot{\phi} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{a) de (2)} \quad \ddot{\phi} &= \dot{\phi} d\dot{\phi}/d\phi = -(g/L) \sin \phi + \omega_0^2 (\alpha \cos \phi + \sin \phi \cos \phi) \\ \dot{\phi}^2(\phi) &= \dot{\phi}_0^2 + (g/L) (2 \cos \phi - \sqrt{2}) + \omega_0^2 (\alpha (2 \sin \phi - \sqrt{2}) + \sin^2 \phi - 1/2) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{b) de (3)} \quad N = -2m \omega_0 \cos \phi L \dot{\phi}$$

$$\text{c) de (1)} \quad T = mL [\dot{\phi}^2 + (g/L) \cos \phi + \omega_0^2 (\alpha \sin \phi + \sin^2 \phi)]$$

Reemplazando  $\dot{\phi}^2$  de (4):

$$T = mL [\dot{\phi}_0^2 + (g/L) (3 \cos \phi - \sqrt{2}) + \omega_0^2 (\alpha (3 \sin \phi - \sqrt{2}) + 2 \sin^2 \phi - 1/2)]$$

d) Para que se cumplan los supuestos del enunciado, las expresiones de (b) y (c) no deben ser negativas.

#### Análisis del efecto de la dirección del movimiento del péndulo:

Observamos que el signo de  $\dot{\phi}$  tiene efecto en  $N$  pero no en  $T$ .

Si  $\dot{\phi}_0 = 0$ , entonces  $\cos \phi > 0$  (es decir  $\phi < -\pi/2$ ). En efecto, si evaluamos  $\dot{\phi}^2(-\pi/2)$  resultaría  $< 0$ , es decir, el péndulo no alcanza el valor  $\phi = -\pi/2$ . Entonces  $N > 0$  mientras el movimiento ocurra en la dirección  $(-\hat{\phi})$  y se hace negativa cuando el movimiento toma la dirección  $\hat{\phi}$ .

Ahora supongamos que  $\dot{\phi}_0 \neq 0$ : Cuando  $\dot{\phi} < 0$  y  $\cos \phi > 0$  (movimiento en los cuadrantes inferiores), el péndulo se acerca al eje de rotación de la puerta (eje  $AB$  en la figura). Sin embargo, si logra llegar a los cuadrantes superiores (donde  $\cos \phi < 0$ ) manteniendo el signo de  $\dot{\phi}$ , entonces el péndulo se alejaría del eje  $AB$ . Este cambio en la dirección de  $\vec{v}^{rel}$  (acercándose ó alejándose del eje  $AB$ ) cambia el signo de la fuerza de Coriolis (ecuación (3)), y por lo tanto el signo de  $N$ . Para que esto ocurra,  $\dot{\phi}_0$  debe ser tal que  $\dot{\phi}^2(-\pi/2) > 0$ . es decir,  $\dot{\phi}_0^2 > \sqrt{2}(g/L) + (\alpha(2 + \sqrt{2}) - 1/2)\omega_0^2$ .

**Nota:** La solución también estará correcta si se resolvió el problema considerando  $\dot{\phi}_0 = 0$ .

