## D: FUERZAS CENTRALES Y MOVIMIENTOS PLANETARIOS

D.1.- Considere el movimiento de una partícula de masa *m* bajo la acción de una fuerza central del tipo

$$\vec{F} = -cr^n \hat{r} \qquad c>0$$

a) determine el período para pequeñas oscilaciones en torno a la órbita circular.
b) ¿cuál es el radio de esa órbita?
c) demuestre que las órbitas son estables para $n > -3$

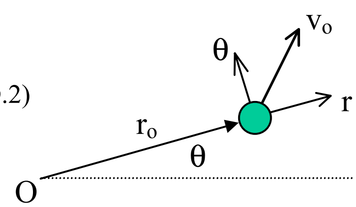
D.2.- Una partícula de masa *m* se mueve bajo la acción de un campo de fuerza definido como

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\hat{r}$$

La velocidad de la partícula es $\vec{v}_0 = v_1\hat{r} + v_2\hat{\theta}$ , cuando se encuentra a una distancia $r_o$ del centro de atracción.

a) calcule la energía potencial asociada a *F*
b) calcule la rapidez de la partícula en función de su distancia r al centro de atracción.
c) calcule el ángulo entre la velocidad y el radio vector cuando $r = r_o/2$

(Prob. D.2)




D.3.- Una partícula de masa *m* es atraida hacia un punto fijo con una fuerza que en componentes esféricas está definida como:

$$\vec{F}(r) = -12Eo\left[\frac{r_0^6}{r^7} - \frac{r_0^{12}}{r^{13}}\right]\hat{r}$$

donde $E_o$ *y* $r_o$ son constantes positivas. Si esta es la única fuerza que actúa sobre la partícula, determine:

a) rapidez mínima que debe tener la partícula cuando se encuentra a una distancia $r=r_o$ del punto de atracción para que logre escapar del campo de fuerza.
b) distancia máxima (o mínima) entre el punto de atracción y la partícula, si ésta se mueve a lo largo de la recta definida por ambas posiciones, de modo que pasa por el punto donde $r = r_o$ con la mitad de la rapidez especificada en a).

D.4.- Un sátelite se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra a un a altura $h_o$ sobre la superficie. Calcule el incremento mínimo de velocidad del satélite para que escape del campo gravitacional terrestre.

D.5.- Una partícula de masa *m* está sometida a una fuerza de atracción definida como:

$$\vec{F}(r) = -\frac{k}{r}\hat{r}$$

a) encuentre una expresión para el potencial efectivo asociado a esa fuerza. Grafique
b) discuta los posibles movimientos de la partícula.
c) encuentre el radio y la rapidez correspondiente a la órbita circular.
d) calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones radiales en torno a la órbita circular.

D.6.- Una nave espacial, con sus cohetes apagados, está describiendo una órbita circular de radio $R$ alrededor del centro de la Tierra. Su capitán enciende los cohetes durante un tiempo muy breve, dando a la nave un impulso en la dirección tangencial al movimiento. Si el período orbital resultante es igual a *27/8* del periodo que tenía la nave en la órbita original, determine la rapidez de la nave cuando pasa por el punto en que se encuentra más alejada del centro de la tierra.

D.7.- Un sátelite es colocado en órbita alrededor de la Tierra desde una altura de *600 kms* sobre la superficie con una velocidad inicial de *30.000 km/h* paralela a ésta. Asumiendo que el radio de la Tierra es *6378 km* y que su masa es de $5{,}976 * 10^{24}$ *kg*, determine la excentricidad de la órbita resultante y la velocidad del sátelite en su apogeo.

D.8.- Se lanza una partícula de masa $m$ con una rapidez inicial $v_o$ en una dirección tal que, de mantenerse el movimiento en línea recta, pasaría a una distancia $b$ del origen de un campo de fuerza de repulsión definido como:

$$f(r) = \frac{cm}{r^2} \qquad c > 0$$

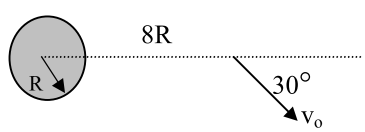
a) calcule la distancia $r_{min}$ entre el centro del campo de fuerzas y la trayectoria de la masa.
b) sugiera una metodología para calcular el ángulo de dispersión $\alpha$.

D.9.- Se coloca en órbita un satélite alrededor de la Tierra, con las condiciones iniciales siguientes (ver figura):

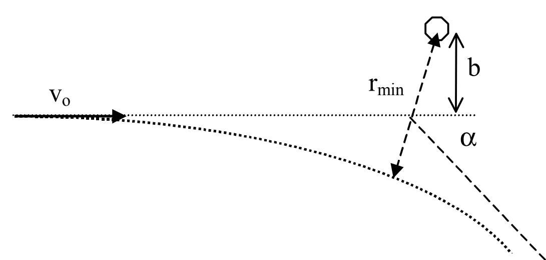
$r_0 = 8R$ $\qquad \theta = 30°$ $\qquad v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{8R}}$

donde $R$ *y* $M$ son respectivamente el radio y la masa de la Tierra y $G$ es la constante gravitacional, determine:

a) ecuación de la trayectoria $r = r(\theta)$
b) la excentricidad de la órbita resultante.
c) perigeo y apogeo
d) ¿choca el satélite con la Tierra?



(Prob. D.9)



(Prob. D.10)

D.10.- Un satélite se encuentra en órbita circular de radio $3R$ alrededor de la Tierra, donde $R$ es el radio terrestre. La rapidez del satélite decrece bruscamente en $\Delta v$, dando lugar a una órbita elíptica que roza la superficie de la Tierra en un cierto punto. Determine:

a) magnitud de $\Delta v$
b) la ecuación de la trayectoria elíptica $\rho = \rho(\theta)$
c) la rapidez del satélite cuando pasa rozando la superficie de la Tierra (no considere el roce con la atmósfera)
d) el tiempo transcurrido desde que frena hasta que llega a la superficie de la Tierra.

D.11.- La distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna es igual a *60* veces el radio $R$ de la Tierra, y la masa de la luna es *1/81* la masa $M$ de la Tierra. El radio de la luna es *7/25* veces el radio de la Tierra. A partir de esta información, y suponiendo que la Tierra y la Luna están fijas,

a) determine la aceleración de gravedad en la superficie de la Luna, en función de la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra.

b) encuentre una expresión para la fuerza neta que se ejerce sobre una partícula de masa $m$ que se mueve en línea recta entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna, y una expresión para la energía potencial asociada. Grafique la función de energía potencial en función de la distancia $r$ de la partícula al centro de la tierra.
c) si una partícula sale desde la superficie de la Tierra hacia la Luna con rapidez inicial $v_o$, determine con que. rapidez llega a la superficie lunar (si es que llega).

D.12.- Dos satélites, de masa $m$ cada uno, están describiendo órbitas cerradas alrededor de la Tierra, moviéndose en un mismo plano y en el mismo sentido. El satélite 1 está describiendo una circunferencia de radio $R$ y el satélite 2 una elipse tal que sus distancias mínima y máxima al centro de la Tierra son $R$ *y* $8R$, respectivamente. Si los dos satélites se acoplan en un choque inelástico de muy corta duración, cuando el satélite 2 está pasando a la distancia mínima de la Tierra, determine:

a) el cuociente entre la energía cinética del conjunto inmediatamente antes del choque y la energía cinética después del choque.
b) las características de la órbita del "satélite compuesto" resultante.

D.13.- El objetivo de este problema es deducir la ley de gravitación de Newton:

a) primera ley de Kepler "las órbitas de los planetas son elipses con el sol en uno de sus focos", aceptando esto como hipótesis y que el sol ejerce una fuerza central, demuestre que

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}$$

(k > 0)
b) considere dos órbitas circulares y suponiendo válida la tercera ley de Kepler demuestre que la constante k es proporcional a la masa del planeta.

D.14.- Considere una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central cuya magnitud es proporcional a su distancia al origen del campo de fuerza $(\mathbf{F} = -K\mathbf{r})$

a) analice si es posible que esta partícula escape de este campo de atracción.
b) determine el periodo orbital si la partícula se encuentra girando en una órbita circular a una distancia $r_o$ del origen
c) si en la condición especificada en el punto anterior se da un pequeño impulso a la partícula en la dirección radial, determine el periodo de las pequeñas oscilaciones en torno a la órbita circular.
d) repita los cálculos anteriores, si la fuerza es del tipo $F = -F_o$ (constante).

D.15.-Una nave espacial se está moviendo con rapidez $v_o$ en el momento que una fuerza de atracción empieza a actuar sobre ella, provocada por un objeto lejano no identificado.La fuerza está definida por la siguiente expresión $f(r) = -cm/(4r^3)$ donde $r$ es la distancia al centro de atracción. Si la nave no fuera afectada por esta fuerza pasaría a una distancia $D$ del centro de atracción:

a) determine la rapidez máxima que alcanza la nave.
b) determine la distancia mínima que alcanza al centro de atracción.

D.16.- Una partícula se mueve únicamente bajo la acción de una fuerza central cuyo potencial esta dado por la expresión $V(r)=mkr^3$, con k > 0.

a) determine la velocidad de la partícula si se mueve en una órbita circular de radio $R$.
b) si la partícula es desviada de su trayectoria como resultado de un pequeño impulso radial, determine el periodo de las pequeñas oscilaciones en la distancia al centro de atracción.

D.17.- Considere una cápsula espacial que describe una órbita circular de radio $R_o$ moviéndose con rapidez $v_o$ alrededor de un cuerpo no especificado. Súbitamente su cohete impulsor se enciende momentáneamente de modo que su velocidad aumenta hasta un valor $\alpha v_o$,con $\alpha > 1$.

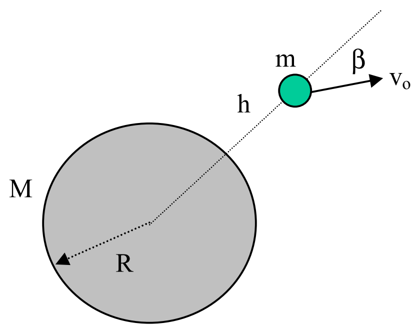
a) determine el máximo valor de $\alpha$ para que la cápsula no escape de la atracción gravitacional del cuerpo que la atrae.
b) demuestre que la distancia máxima alcanzada por la cápsula verifica la relación

$$R_{max}/R_o = \alpha^2 / (2-\alpha^2)$$

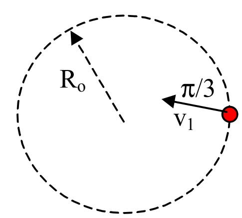
D.18.- Considere un satélite de masa *m* que órbita la Tierra con un periodo *T*

a) si la órbita es circular, encuentre expresiones para el radio de la órbita con respecto al centro de la Tierra $(R_o)$ y la rapidez del movimiento $(v_o)$.Especifique estos valores en términos del periodo *T* , del radio de la Tierra $(R_T)$ y de la gravedad *g* en la superficie de la Tierra.
b) considere que el satélite órbita la Tierra con el mismo periodo anterior *T*, pero con una trayectoria elíptica de excentricidad *e*. Determine la distancia del satélite al centro de la Tierra en el perigeo y en el apogeo de la órbita. Entregue sus resultados en función de la excentricidad *e* de la órbita elíptica y del radio $R_o$ de la órbita circular especificada en a)
c) para el caso especificado en b) determine la rapidez del satélite en el perigeo y en el apogeo, en términos de la excentricidad *e* de la órbita elíptica y de la rapidez $v_o$ de la órbita circular especificada en a)

D.19.- Se coloca en órbita un satélite de modo que a una altura *h* sobre la superficie terrestre se le deja libre con una velocidad $v_o$ en una dirección que forma un ángulo $\beta$ con el vector de posición definido desde el centro de la Tierra. Encuentre la ecuación de la trayectoria en términos de los parámetros del problema, y también en función del radio de la Tierra *R*, de la constante gravitacional *G* y de la masa de la tierra *M*.




(Prob. D.19)




(Prob. D.20)

D.20.- Un satélite de masa *m* se encuentra en órbita circular de radio $R_o$, sometido a una fuerza central cuya función de energía potencial es $V(r) = -k/r$. En un cierto instante el satélite recibe un impacto que altera su velocidad (no su rapidez) en un ángulo $\pi/3$, como se indica en la figura.. Determine las distancias máxima y mínima al centro de atracción en la nueva órbita del satélite.

D.21.- Un satélite de masa *m* gira en una órbita circular a una distancia *D* del centro de la Tierra. En un cierto instante se da un impulso al satélite que resulta en un cambio $\delta v$ en su velocidad.

a) suponiendo que el impulso se da en la dirección de movimiento del satélite determine la magnitud de $\delta v$ para que el satélite escape de la atracción gravitacional terrestre.
b) repita el cálculo suponiendo que el impulso es radial
c) suponga de nuevo el impulso es tangencial (como en a) y que el satélite permanece en órbita elíptica. Determine los radios máximo y mínimo de la órbita resultante.

D.22.- Suponga que la Tierra $(M_T)$ gira en torno al Sol $(M_S)$ en una órbita circular de periodo T (365 días) por efecto gravitacional.

a) demuestre la tercera ley de Kepler, es decir que $T^2$ es proporcional a $R_o^3$, donde $R_o$ es el radio de la órbita circular. Calcule explícitamente la constante de proporcionalidad.

b) suponga que se detiene abruptamente el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Calcule el tiempo que tardaría la Tierra en chocar con el Sol (desprecie el tamaño radial de ambos cuerpos). Exprese el resultado en función del periodo de la órbita circular T y evalúe explicitamente. ¿ son minutos, días, meses ?

D.23.- Una partícula de masa $m$ se encuentra a una distancia $a$ de un centro de atracción gravitatacional representado por una partícula de masa $M$, fija en el espacio. En el instante inicial, la partícula de masa $m$ es impulsada con una velocidad $v_o$ perpendicular a la recta entre las dos partículas. Determine:

a) el valor mínimo de $v_o$ para que la partícula escape del campo de atracción gravitacional.
b) determine el valor de $v_o$ para que la partícula permanezca en una órbita circular.
c) si la velocidad inicial es igual a la mitad de aquella calculada en el punto a), describa la trayectoria de la partícula y determine su distancia mínima al centro de atracción.