Dinámica

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

IV

Índice general

Capítulo IV

DINAMICA

A modo de introducción, se incluye un párrafo que aparece en el libro de ejercicios numéricos de física de C. W. Misner y P. J. Cooney[1]:

> *El área de física que desarrolla un vocabulario para describir el movimiento se llama* **cinemática***. ... Un vuelco sensacional en este problema,* (del movimiento de los cuerpos) *que culminó con los trabajos de Galileo y Newton, fue el descubrimiento que ni la posición x ni la velocidad v tenían causas inmediatas, en contraste con la aceleración, que sí las poseía. Este resultado fue –y aún es– difícil de aceptar, porque la gente estudiosa de estas materias había logrado obtener gran parte de su información a través de la observación, a simple vista. El ojo es muy sensitivo a la velocidad pero a menudo ignora la aceleración, en consecuencia encontramos difícil de aceptar que las leyes fundamentales de física no consideren la velocidad.*
>
> *Nuestro sentidos táctiles (tacto y equilibrio) nos proporcionan la ayuda esencial que necesitamos para estudiar la aceleración, la segunda derivada de $x(t)$.*

La aceleración es central en las Leyes de Newton que dejamos establecidas en la siguiente sección.

IV.1. LEYES DE NEWTON, LA SINTESIS FINAL

La aparición de las tres leyes de movimiento y la ley de gravitación universal, todas descubiertas por Isaac Newton, constituyó la culminación de una serie de logros alcanzados durante los siglos XVI y XVII. Entre ellos se destacan: las leyes de Kepler en el

[1] *Spreadsheet Physics*, C. W. Misner y P. J. Cooney, Addison Wesley Publishig Company

campo de la astronomía, las ideas de Galileo y su descripción del movimiento de los cuerpos, el progreso logrado por Descartes en geometría analítica, Huygens y su libro acerca de la luz, el perfeccionamiento del reloj de péndulo... Estos y muchos otros, hicieron del siglo XVI y XVII un período brillante en el desarrollo de la humanidad. Todo sucedió en el lapso de tiempo comprendido entre dos generaciones: la de Galileo y Newton. Este último nació el mismo año de la muerte de Galileo, en 1642.

La revolución que produjo la publicación de su libro "Principia" (1687) que contenía sus leyes más famosas, no puede ser considerada como la obra de un sólo hombre, sino el broche genial que coronó el esfuerzo de quienes lo precedieron.

Las leyes de Newton desenmascaran el origen de la aceleración.

PRIMERA LEY

> Cada cuerpo material persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme, solamente si la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él, se anulan entre sí.

Esta es la ley de **inercia**. Es la definición de un **sistema inercial**. Por ejemplo, si en un cierto sistema de referencia un objeto que inicialmente estaba en reposo permanece en reposo, entonces este sistema constituye un sistema de referencia inercial.

Históricamente ésta fue una de las afirmaciones más difíciles de sostener. Es una abierta contradicción a la física Aristotélica que postulaba que la *fuerza* (o acción ejercida por un agente externo) era proporcional a la velocidad. Se oponía también al sentido común: cualquier observador puede comprobar que para mantener un carro en movimiento con velocidad constante, necesita aplicar una fuerza constante. Galileo, como vimos, ya había dado el primer paso al atribuir a los cuerpos esta *modorra* que los hacía mantener su movimiento adquirido. Newton generalizó este principio e incluyó el movimiento circular. Esta afirmación contradecía a los filósofos antiguos y también a Galileo que pensaban que el movimiento circular –en particular el de los planetas-, era natural y no necesitaba la presencia de una fuerza (o mejor de un agente extraño) que cambiara constantemente su velocidad. Newton coincidía con Descartes en esta disputa, quien afirmaba que una partícula que describe un movimiento circular tiende a seguir por la tangente a la circunferencia en ese punto, si no es retenida en su órbita por una cuerda.

Lo usual es que la velocidad de los cuerpos cambie. En este contexto, cuando se menciona la palabra *cambio*, se incluye los siguientes casos: variaciones de la velocidad en su módulo solamente, (es decir, en su magnitud), las variaciones de su dirección manteniendo el módulo del vector constante, o al caso en que ambas, módulo y dirección, cambian en forma simultánea.

La segunda ley de Newton, contiene la relación entre la fuerza externa y la aceleración adquirida por el cuerpo. Originalmente fue escrita utilizando el *momentum*, que es el producto de la velocidad por la masa inercial de un cuerpo.

SEGUNDA LEY

El cambio de momentum es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, y apunta en la dirección y sentido de la línea generada por la fuerza neta.

$$\vec{F}\,\Delta t = \Delta\,\vec{P}.$$

La segunda ley establece en forma cuantitativa *cómo* cambia el movimiento debido a la aparición de la fuerza. Al enunciar su segunda ley, Newton dió especial importancia al concepto de *cantidad de movimiento* (momentum) $\vec{P}$

$$\vec{P} \equiv m \cdot \vec{v}_0 \tag{IV.1}$$

en esta fórmula el concepto de masa es aceptado en forma intuitiva.

Si la masa permanece constante, entonces:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta(m \cdot \vec{v}\,) = m\,\Delta\vec{v}.$$

Ahora podemos introducir la aceleración en la fórmula anterior,

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \equiv m \cdot \vec{a}. \tag{IV.2}$$

Vemos que si $\vec{F} = 0$, entonces $\Delta\vec{v} = 0$, es decir, no cambia ni la dirección ni la magnitud de la velocidad y el movimiento permanece rectilíneo.

Por otra parte si la fuerza es constante y la masa no varía, se origina un movimiento con aceleración constante. Un ejemplo, es la caída libre de los cuerpos sobre la superficie de la Tierra.

La definición de *masa inercial* m, se hace a través de un experimento pensado, es decir, un experimento que es fácil describir y entender pero, difícil de realizar en la forma descrita[2].

[2] *Un ensayo escrito por el Profesor Igor Saavedra acerca de las ideas y conceptos introducidos por Newton al anunciar sus leyes, se incluye en un Apéndice, al final del libro.*

Por ahora aceptamos la masa inercial como un número real que asociamos con cualquier objeto y para el cual existe un procedimiento bien determinado que fija su valor sin ambigüedades.

Vemos que la expresión $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ incluye dos conceptos nuevos: fuerza y masa. Si aceptamos la definición de masa, entonces la segunda ley de Newton es una definición de fuerza, y viceversa. No hay forma de salir de este círculo vicioso puesto que tenemos una ecuación y dos conceptos nuevos.

Esta característica de las ecuaciones de Newton es común a todas las teorías realmente *nuevas*. No constituyen una extensión de los conceptos antiguos, sino más bien los conceptos antiguos *caben* y se ordenan dentro de este nuevo esquema. En este escenario se introducen conceptos nuevos –como la **fuerza**– y, simultáneamente se provee una receta consistente (vía leyes simples y universales) de cómo usarla en distintas circunstancias.

En este caso, la receta consiste en describir un procedimiento que defina la masa de un objeto en forma *única*: de una vez para siempre.

Con la masa ya definida y suponiendo que el objeto no sufre ningún cambio físico, tenemos el número que asociamos a m en las ecuaciones de Newton.

En forma *independiente*, definimos la fuerza que incluiremos en cada caso. Por ejemplo, fuerzas de interacción gravitacional si hay un objeto masivo en la cercanía, fuerzas de contacto si hay objetos que se tocan, fuerzas de roce si hay deslizamiento relativo entre superficies...etc. y, con cualquiera de estas u otras fuerzas que actúen sobre el cuerpo, aplicamos la segunda ley de Newton. Enseguida verificamos si la aceleración *observada* coincide con el comportamiento obtenido a partir de la teoría. Si hay acuerdo entre la teoría y la observación, aceptamos esta ley de movimiento como verdadera. Si aparece una contradicción que no encuentre explicación dentro del esquema descrito, debemos revisar la teoría.

Newton dió una (y sólo una) prescripción clara, concreta y corta para determinar en forma única las fuerzas que intervienen en una situación dada y que es necesario utilizar para resolver cualquier problema propuesto.

Cada vez que olvidemos incluir una de las fuerzas que, de acuerdo a la prescripción, deba ser considerada, llegaremos a un resultado erróneo y, en ese caso, se nos podrá señalar *sin ambigüedades*, qué fuerza se nos olvidó incluir en el problema.

En resumen, lo impresionante en las leyes de Newton es su esquema simple y claro de funcionamiento, que es capaz de predecir acertadamente una gran cantidad de fenómenos observados en la vida diaria.

TERCERA LEY

Si un cuerpo **A**, ejerce una fuerza sobre otro **B**, éste último ejerce sobre **A**, una fuerza igual en magnitud y dirección, pero en sentido opuesto. Estas fuerzas, denominadas de acción y reacción actúan siempre en puntos diferentes.

La tercera ley de Newton define una propiedad que deben tener todas las fuerzas. Las fuerzas de *acción* y reacción aparecen bien delineadas al existir dos objetos en contacto. Por ejemplo, esta prescripción indica que al tener dos bloques, A y B, y en el caso que uno, A, empuja al otro, B, se debe reemplazar A por una fuerza que actúa sobre B y, simultáneamente, una fuerza actuando sobre A, en la misma dirección que la anterior pero con sentido contrario.

Por ejemplo: al tirar un bloque mediante una cuerda se ejerce una fuerza (acción) F_0 sobre el bloque, en consecuencia –de acuerdo a la tercera ley de Newton– este objeto aplica sobre la mano una fuerza (reacción) cuya magnitud es la misma $|F_0|$, pero cuyo sentido es opuesto.

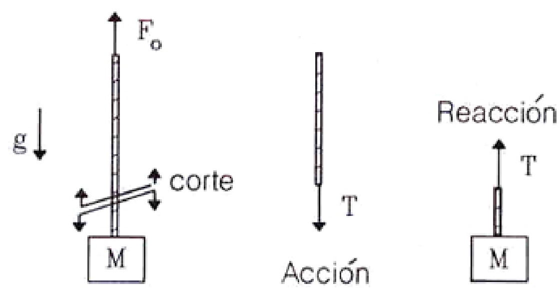


Figura IV.1: La Tercera Ley de Newton en acción. F_o representa la fuerza que se aplica sobre el bloque a través de la cuerda. El tipo que sujeta la cuerda soporta una fuerza $-F_o$. Al cortar esta cuerda, en forma imaginaria, debemos reemplazar en cada extremo cortado la tensión T de acuerdo a esta ley.

La utilidad de esta ley es transparente cuando analizamos sistemas complejos (con varios cuerpos interactuando entre ellos). En este caso debemos *cortar (imaginariamente)*, los vínculos que une cada uno de los cuerpos y reemplazarlo por su fuerza equivalente de acuerdo a la tercera ley de Newton.

IV.1.1. Dimensiones

Si la masa se mide en kgs. y la aceleración en (m/s^2), entonces la fuerza viene dada en newtons.

$$1\, newton \equiv 1\, kg \times 1\, \frac{m}{(s)^2} \equiv 1N, \qquad \text{MKS} \qquad \text{(IV.3)}$$

$$1\,newton = 1000\,gr \times \frac{100\,cm}{(s)^2} = 10^5\,\frac{gr \times cm}{(s)^2} \equiv 10^5\,dinas \qquad \text{CGS.} \qquad (IV.4)$$

Es interesante notar que, a pesar de que Newton fue un ciudadano Británico, el concepto de fuerza, que constituyó sin duda, una gran contribución a la ciencia, se midió hasta hace poco en Gran Bretaña, en otras unidades denominadas Libras. Hoy este desorden en las unidades está llegando a su fin debido a la necesidad de los países de uniformar sus unidades de medida. El newton como unidad de fuerza es universal.

IV.2. APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON: ESTÁTICA

Los problemas de dinámica, por complejos que sean, son al fin de cuentas, una superposición de problemas simples. A continuación resolveremos una serie de problemas cortos para ilustrar su uso.

Siempre que aparezca un problema de dinámica en el cual sea necesario calcular una fuerza, como la tensión que soporta una cuerda o la fuerza que soporta un piso...etc, debemos estudiar el cuerpo por partes, descomponerlo para aislar la fuerza que se nos pide. El proceso de aislar una parte de un objeto del resto es lo que llamamos un diagrama de cuerpo libre.

IV.2.1. Diagrama de cuerpo libre

Analizar las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo es equivalente a aislarlo del resto de los objetos que interactúan con él. Cada objeto que interactúa con este cuerpo es borrado y reemplazado por una fuerza de acuerdo con la tercera ley de Newton. El resultado de esta operación es un cuerpo aislado (libre) sobre el cual actúan diversas fuerzas. Es lo que se denomina un DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE del objeto.

Ejemplo

Analizar las fuerzas que actúan sobre un bloque que permanece en reposo sobre el piso.

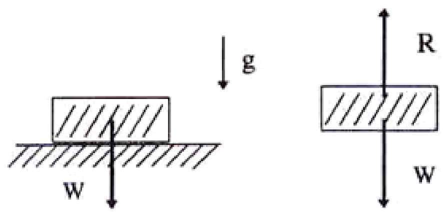


Figura IV.2:

Comenzaremos definiendo una de las fuerzas que debemos incluir en la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\,\vec{a}$, cuando estudiemos el movimiento de un objeto situado sobre la Tierra. Esta fuerza es el *peso*:

A cada objeto, le asignamos una fuerza, que definimos como: $\vec{W} = M \cdot \vec{g}$, y que apunta hacia el centro de la Tierra. Posteriormente analizaremos su origen, por ahora la aceptamos como una propiedad de cada objeto. Esta fuerza es, por definición:

$$\vec{W} = -Mg\,\hat{\jmath}, \qquad\qquad W \equiv \text{ peso del objeto.}$$

Como el bloque se apoya sobre el piso, al retirar el piso para hacer el diagrama de cuerpo libre, lo debemos reemplazar por una fuerza, que llamamos la *reacción* del piso $\vec{R}$. Estas, $\vec{R}$ y $\vec{W}$ son todas las fuerzas que actúan sobre el bloque.

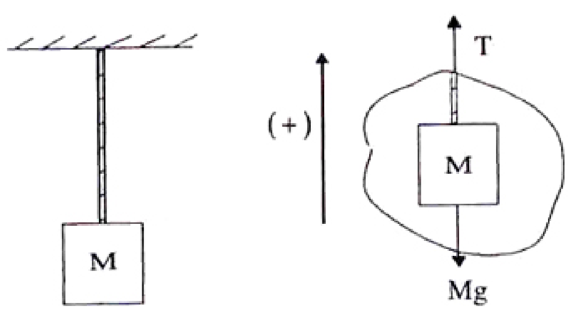


Figura IV.3:

Como además nos dicen que el bloque permanece en reposo en la dirección vertical entonces $v_y = 0$, en todo instante y por lo tanto $a_y = 0$, y, de acuerdo a la segunda ley de Newton, la suma de todas las fuerzas externas en esa dirección debe anularse. De esta forma la fuerza que ejerce el piso *sobre* el bloque debe ser *igual en magnitud y de sentido* *opuesto* al peso del bloque. Tomando como vector unitario $\hat{\jmath}$ en la dirección vertical y, sumamos todos los vectores en dicha dirección y obtenemos:

$$(+R - W)\hat{\jmath} = M(\vec{a} \cdot \hat{\jmath}) \equiv M a_y = 0 \Rightarrow R = W.$$

En la dirección x, no existen ni fuerzas ni aceleraciones.

Nota

• R representa el módulo del vector $\vec{R}$, y análogamente, W es el módulo del vector $\vec{W}$, son por lo tanto **positivos**. Si al resolver las ecuaciones uno de ellos resulta ser negativo, nos indica que el sentido asignado inicialmente a dicho vector, no corresponde con el sentido que tiene dicha fuerza.

Las ecuaciones, si son aplicadas consistentemente, proporcionan el sentido correcto de los vectores.

• En la segunda ley $\vec{F} = m\vec{a}$, la fuerza $\vec{F}$ denota la suma de **todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo**. Así, en rigor debemos escribir la segunda ley como:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Si el cuerpo no sufre ninguna aceleración, $(\vec{a} = 0)$ y $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$. Esta ecuación define la *estática* de objetos puntuales.

Ejemplo

Un objeto de masa M cuelga desde el techo mediante una cuerda, que suponemos sin masa. (Es decir la masa de la cuerda es despreciable al compararla con la masa del bloque). Encontrar la tensión en la cuerda.

Para calcular la tensión, cortamos la cuerda y hacemos el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte inferior del dibujo.

Como este elemento permanece en reposo absoluto, la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre él, debe ser cero. Además, como lo hemos aislado del resto del medio (de la parte superior de la cuerda, de la atracción de la tierra) debemos reemplazar cada uno de ellos por la interacción (**fuerza**) con que actuaba sobre nuestro sistema. Las denominamos T y $W = M\,g$.

Haciendo una elección juiciosa de las coordenadas (ver Figura) tenemos:

$$+T - Mg = Ma = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = Mg.$$

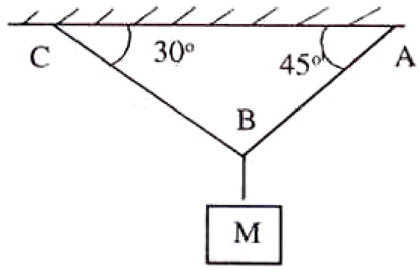


Figura IV.4:

Ejercicio

Calcular la tensión sobre cada una de las cuerdas AB y BC de la Figura.

Nota

Este es un problema en que están envueltas dos dimensiones espaciales. Opere en forma similar al ejemplo anterior, pero recuerde que la segunda ley de Newton es vectorial y por lo tanto debe usarla separadamente en cada una de las dos direcciones. En este caso Ud. no conoce la magnitud de ninguna de las dos reacciones en la cuerda, pero sí conoce su dirección y sentido; su dirección es la misma que adoptan las cuerdas y el sentido de la fuerza debe ser tal que mantenga la cuerda estirada (tensa).

Respuesta: $T_C = T_A \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad T_A = \dfrac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}\, M\, g$

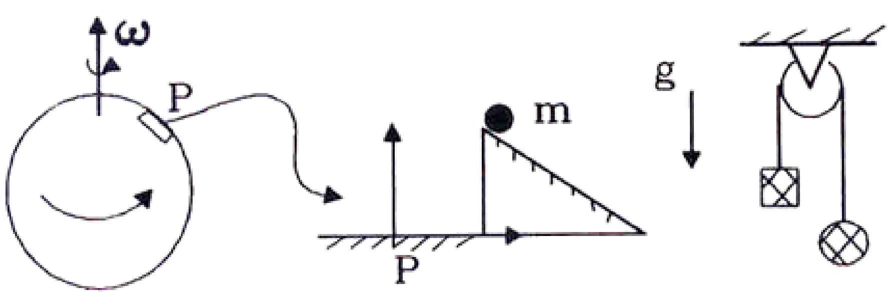


Figura IV.5:

IV.3. SISTEMAS INERCIALES

Existe otra condición adicional para que las Leyes de Newton sean aplicables en la forma enunciada. El sistema de referencia usado debe permanecer en reposo absoluto o con una velocidad constante con respecto a otro sistema que permanece en reposo absoluto.

Ilustremos esta afirmación con un ejemplo.

Si se deja caer una pedazo de plasticina en el interior del Metro cuando está detenido, la plasticina cae verticalmente hacia el suelo. Ahora si lo hacemos cuando el Metro está acelerando (en el momento de partir, por ejemplo) podemos verificar que la plasticina *no* cae en el mismo punto que en el caso anterior, verticalmente bajo el punto de lanzamiento, sino que se desvía con respecto al observador. En los dos casos el objeto fue lanzado bajo las mismas condiciones, y una vez en el aire está sujeto a la misma fuerza, la atracción gravitacional (despreciamos la resistencia del aire). Sin embargo, la diferencia está que *en el segundo caso, el Metro no constituye un sistema de referencia inercial, por estar acelerado,* y por lo tanto no podemos aplicar las Leyes de Newton en la forma usual; aparecen fuerzas no inerciales, que deben ser incluidas para poder predecir correctamente las trayectorias observadas.

Resumiendo: Las Leyes de Newton son válidas cuandos están referidas a un *Sistema Inercial*, es decir, uno que permanece en reposo absoluto o que se desplaza con una velocidad constante con respecto a otro que está en reposo absoluto.

> No existe en la naturaleza un sistema inercial.

Mas claro aún, las ecuaciones de Newton son válidas en un sistema de referencia que **no** existe en la naturaleza.

La pregunta obvia en este punto es con qué objeto enunciamos las leyes de Newton si no existe el sistema de referencia donde podamos aplicarlas.

Esta dificultad se resuelve de la siguiente forma:

> En todos los ejemplos que estudiemos, existe un sistema de referencia en el cual los efectos introducidos por el origen no-inercial del sistema de referencia son tan pequeños, que en condiciones normales, no somos capaces de distinguirlos.

Ejemplo

El sistema de referencia más usado es la superficie de la Tierra. Este no es inercial puesto que está girando con respecto a un eje. Sabemos que al girar existe un aceleración y por lo tanto deben aparecer efectos de las fuerzas no inerciales en este sistema.

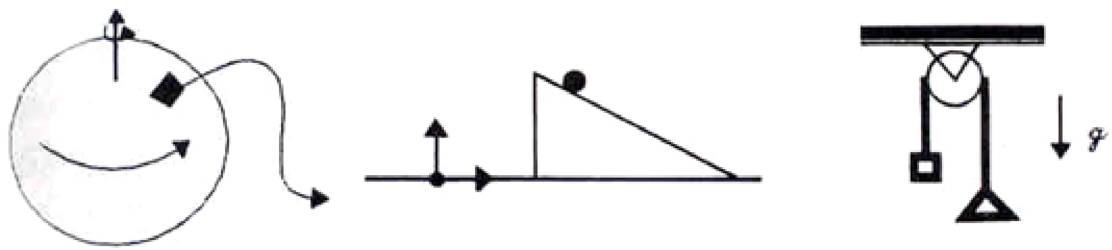


Figura IV.6: Normalmente ignoramos los efectos de la rotación de la Tierra. Su efecto en sistemas como planos inclinados, péndulos, etc. es muy pequeño, y si no contamos con instrumentos muy precisos, escapan a nuestra detección. Esto no significa que estén ausentes.

Si estudiamos el movimiento de partículas en un plano inclinado o el movimiento de un par de masas unidas mediante una cuerda que cruza una polea y en todas ellas la superficie de la Tierra es un buen sistema de referencia. Los efectos de la rotación son despreciables.

Con esto queda claro que *la física es una ciencia de aproximaciones*. El sistema de referencia inercial no existe, pero podemos encontrar uno que se adapte al grado de precisión de nuestras mediciones. En caso que sea necesario incluir la rotación de la Tierra en algún ejemplo, ubicamos nuestro sistema de referencia que no gira en el centro de la Tierra. En este ejemplo estamos despreciando el movimiento de rotación de la Tierra en torno al Sol. Pero este inconveniente puede resolverse ubicándonos en el centro del sistema solar...y así sucesivamente.

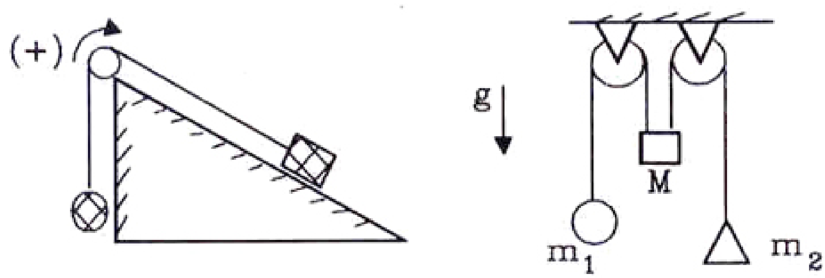


Figura IV.7: Los sistemas de la Figura sirven para aprender a usar las Leyes de Newton y comprobar la exactitud de sus predicciones con lo observado. En ellos las correcciones debidas a la rotación de la Tierra son despreciables, es decir, se confunden con los errores experimentales.

Existen algunos fenómenos, observables en la vida diaria, que se originan debido a la naturaleza no–inercial de la Tierra debido a su rotación. Nos limitaremos únicamente a describir algunos.

• Uno de ellos es el remolino que se forma en el lavamanos. Si observamos lo que sucede en cualquier punto del Hemisferio Sur, Santiago entre ellos, notaremos que el agua al escurrirse del lavamanos **gira** en dirección contraria a los punteros del reloj. Este remolino que forma el agua se debe exclusivamente a la rotación de la Tierra. Es más, en el Hemisferio Norte se puede observar el mismo fenómeno, pero ahora la rotación del agua se produce a favor de los punteros del reloj.

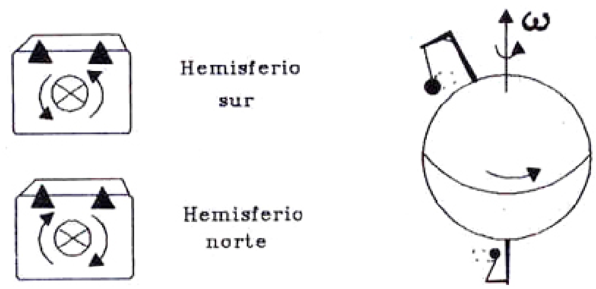


Figura IV.8:

• Si hacemos oscilar un péndulo justo en el Polo Sur –o mejor, justo en el eje de rotación de la Tierra–, no es difícil imaginar que al cabo de 24 horas, nuestro observador habrá dado una vuelta completa en torno a su eje. La *dirección de oscilación del péndulo* habrá permanecido, durante todo este tiempo, fija con respecto a las estrellas. La explicación para la rotación de este péndulo que gira sin razón aparente según el observador, se debe a que el péndulo, al estar sostenido por un hilo, no está obligado a seguir a la rotación de la Tierra, y por tanto oscila conforme a las leyes de Newton pero referidas a un sistema de referencia fijo al centro de la Tierra, con respecto a las estrellas– y que, obviamente, no gira con la Tierra.

Algo similar sucede con un péndulo que oscila en Santiago (o cualquier otro lugar). El péndulo oscila y a la vez comienza a rotar, más lentamente esta vez, con respecto a su eje.

Este es el péndulo de Foucault que se exhibe en algunos Museos de Ciencia y Tecnología.

• Todos sabemos que es muy peligroso caminar sobre un disco que está girando. Es muy difícil saber qué debemos hacer para equilibrarnos. Sin embargo la Tierra está girando y nosotros no perdemos el equilibrio. La explicación radica en la pequeña magnitud que tiene la velocidad angular de la Tierra. Consecuentemente, sus efectos son difíciles de captar.

• Otros fenómenos similares ocurren con las corrientes oceánicas, las direcciones de los vientos en las vecindades de la zona tropical, el movimiento de los glaciares que se desvían con respecto a las corrientes oceánicas que los ponen en movimiento ...etc.

Todos estos fenómenos se originan cada vez que existe un movimiento sobre un sistema de referencia que está en rotación. La aceleración que se genera se denomina la aceleración de Coriolis y tiene la expresión siguiente:

$$|\vec{a}_{\text{coriolis}}| = 2\, v_{relativa} \cdot \omega_{\text{ Tierra}}.$$

En consecuencia, cuando dejamos caer un objeto sobre la Tierra éste no cae verticalmente, sino que desvía su trayectoria debido a la aceleración de Coriolis. Afortunadamente este efecto es muy pequeño. Podemos **estimar** el valor máximo de la aceleración de Coriolis para un objeto que se deja caer desde una altura de 10 metros.

Sabemos que la desviación es pequeña, así que podemos considerar la velocidad relativa a la Tierra como la velocidad de caída libre. Esta es de aproximadamente 14 m/seg (cuando llega al suelo), si es lanzada desde una altura de 10 metros. Por otra parte, la velocidad angular de la Tierra es aproximadamente $0{,}7\times10^{-4}$ rad/seg, de esta forma el valor máximo de la aceleración de Coriolis es aproximadamente de 10^{-3} m/seg^2. Si comparamos este número con el valor de la aceleración de gravedad, 10 m/s^2, se percata que existen 4 órdenes de magnitud de diferencia entre ellas y que se necesita bastante más precisión que la habitual para detectar este efecto.

Ejercicio

Obtenga el valor de la velocidad angular de la Tierra establecido aquí.

IV.4. EJEMPLOS DE DINAMICA

Proseguimos resolviendo ejemplos con aplicaciones de las leyes de dinámica. En todos consideramos la Tierra como un sistema inercial.

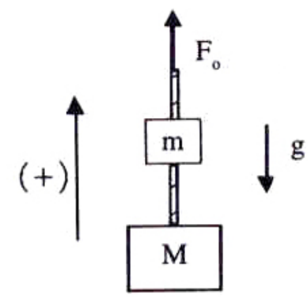
Ejemplo

Dos bloques m y M, están atados por una cuerda. El bloque superior m está sostenido verticalmente por otra cuerda a la cual se le aplica una fuerza $\vec{F}_0$. Los bloques están sometidos a la atracción gravitacional de la Tierra.

a) ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza $\vec{F}_0$ para mantener ambos bloques en reposo? (Suponga ambas cuerdas sin masa).

b) ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza $\vec{F}_0$ para comunicar a ambas masas una aceleración $\vec{a}_0$?

c) Suponga ahora que la cuerda que une ambas masas tiene, a su vez, una masa μ. ¿Cuál es la tensión de la cuerda que las une?



a) Definimos como positivo el sentido opuesto a la aceleración de gravedad $\vec{g}$. Si consideramos como nuestro sistema el conjunto de las dos masas, entonces en el diagrama de cuerpo libre, la suma de las fuerzas externas es F_0 y el peso de cada una de las masas:

$$\sum F_{ext} = F_0 - (M + m)g,$$

Incluyendo el término de la aceleración en la ecuación anterior, tenemos:

$$F_0 - (M + m)g = (M + m) \cdot a_0,$$

donde hemos supuesto que las masas son *aditivas*: si existen varias masas, la masa total es la *suma* de ellas.

No existe ninguna razón, para que esta suposición sea válida, pero los resultados que genera se ajustan a lo que se observa.

Si exigimos que $a_0 = 0 = v_0$, vale decir, que el sistema se encuentre en reposo, entonces:

$$F_0 = (M + m)\, g.$$

b) Si $a_0 \neq 0$, entonces $F_0 = (M + m)(g + a_0)$.

Ahora podemos dar a a_0 diferentes valores: si $a_0 < 0$, indica que la aceleración está apuntando en el mismo sentido que g, ahora si su módulo es igual a g, entonces $a_0 = -g$ y $F_0 = 0$. Este caso indica que el objeto está en caída libre y, obviamente, no se necesita aplicar ninguna fuerza sobre el cuerpo para lograr este resultado.

c) Calculemos la tensión en la cuerda que une las masas. En este caso tomemos como nuestro sistema, la masa M.

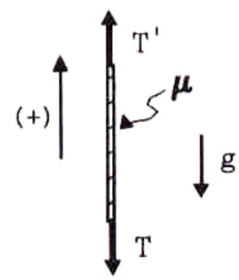
$F_{ext} \equiv T - Mg = Ma_0$ (Recordemos que T indica el módulo de la tensión $\vec{T}$ donde ya hemos incluido el signo correspondiente, lo mismo es válido para el peso de la masa M). Ordenando tenemos $T = M(a_0 + g)$.

El diagrama de cuerpo libre de la cuerda aparece en la Figura. Las fuerzas que actúan sobre ella son:

$$F_{ext} \equiv T' - T - \mu g = \mu a_0,$$

donde a_0 es la aceleración dada. Despejando, $T' = T + \mu(a_0 + g)$. Reemplazando el valor de T indicado más arriba obtenemos:

$$T' = (M + \mu)(a_0 + g)$$



Vemos nuevamente que si $a_0 = -g$ (caída libre), la tensión T' sobre el extremo superior de la cuerda es nula, como era de esperar, puesto que si el cuerpo está en caída libre, nadie sostiene la masa m.

Si $\mu = 0$, entonces $T' = T$: el módulo de la tensión en ambos extremos de la cuerda es la misma.

De la ecuación obtenida para T', se desprende que si $M \gg \mu$, podemos despreciar el efecto de la masa de la cuerda μ en la dinámica del sistema.

Si la masa de la cuerda es despreciable comparada con el resto de las masas que intervienen en el sistema en estudio, podemos suponer que la tensión es la misma en ambos extremos de la cuerda $T' = T$. Esta es una aproximación usada frecuentemente.

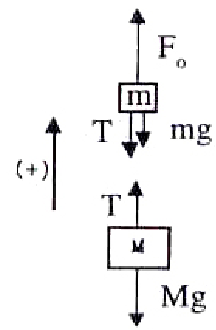
Podemos volver a este mismo ejercicio y analizarlo desde un punto de vista diferente. Al considerar como nuestro sistema las dos masas (unidas por una cuerda ideal, sin masa) entonces las fuerzas *externas* que actuaban sobre el sistema eran $\vec{F}_{ext} = +\vec{F}_0 - m\,\vec{g} - M\,\vec{g}$.

Ahora, si tomamos como nuestro sistema la masa M, entonces el diagrama de cuerpo libre nos muestra las fuerzas externas del sistema: $\vec{F}_{ext} = \vec{T} - M\,\vec{g}$. La pregunta que surge es: ¿por qué se dejó fuera la fuerza $\vec{T}$ (tensión en la cuerda) cuando se consideró cómo nuestro sistema el conjunto de las dos masas?

La respuesta es la siguiente: como consecuencia de la tercera ley de Newton *todas las fuerzas internas del sistema escogido se anulan mutuamente*, sólo sobreviven las fuerzas *externas* al sistema.

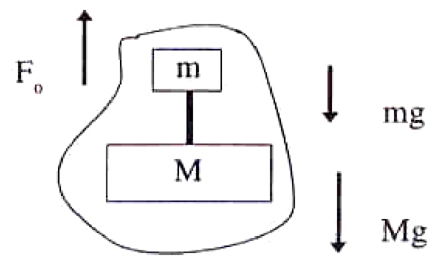
En el diagrama de Fuerzas que se acompaña intentamos explicar gráficamente este resultado. Dibujamos los diagramas de cuerpo libre de cada una de las masas m y M separadamente (no incluimos la masa de la cuerda) y sumamos todas las fuerzas que actúan sobre ambas masas. Por el principio de acción y reacción las tensiones T se anulan entre ellas y sólo sobreviven las fuerzas externas al sistema.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Sistema m.} \\ F^{\,m}_{ext.} &= \ F_0 - mg - T, \end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{aligned} &\text{Sistema M.} \\ F^{\,M}_{ext.} &= \ T - M\,g, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Sistema \{m + M\}} \\ F^{\,m+M}_{ext.} &= \ F^{\,m}_{ext.} + F^{\,M}_{ext.}. \\ F^{\,m+M}_{ext.} &= \ F_0 - m\,g - M\,g \end{aligned}\right\}$$



□

Ejemplo

Tres bloques idénticos de masa M son empujados por una fuerza horizontal F_0 sobre una mesa sin fricción.

a) ¿Cuál es la fuerza *neta* vertical sobre el bloque A?

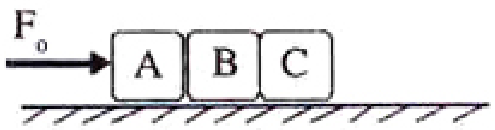
b) ¿Cuál es la fuerza *neta* horizontal sobre el bloque A?

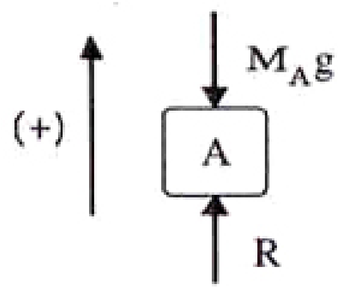
c) ¿Cuál es la aceleración del bloque C?

d) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el bloque B sobre el bloque A?

a) Fuerza vertical *neta* sobre A.

Como siempre, debemos comenzar con el diagrama de cuerpo libre de A. Reemplazo el piso por una fuerza que llamamos $\vec{R}$ (Reacción del piso). Debemos incluir el peso de la masa A. Como el bloque A se desliza sobre la mesa sin saltos, tenemos que la *velocidad* de A en la dirección *vertical* es nula. Como su velocidad vertical no cambia, su aceleración en esa dirección es nula.





Usando la segunda Ley de Newton obtenemos:

$$F_y = R - M_A g = 0 \Rightarrow R = M_A g.$$

La reacción del piso es igual al peso del cuerpo.

b) Para calcular la fuerza horizontal que actúa sobre A debemos aislarlo: sacar el bloque B. Para que las leyes de Newton se enteren de la existencia de B, debemos incluir una fuerza que lo reemplace: $\vec{F}_{BA}$ (acción de B sobre A, una fuerza de contacto). Como no existe fricción, los 3 bloques se desplazan hacia la derecha con una cierta aceleración a_0 (que *no* conocemos por el momento).

A partir de la segunda ley de Newton obtenemos:

$$\underbrace{\underbrace{F_0 - F_{BA}}}_{\text{Fuerza neta sobre el bloque A}} = M_A \cdot a_0$$

c) Aceleración del bloque C.

Como todos los bloques viajan juntos, la aceleración de C es la misma que la aceleración del conjunto. El sistema elegido para hacer el diagrama de cuerpo libre en este caso es el conjunto de los tres cuerpos, de modo que:

$F_{ext} = F_0$ (sólo consideramos la dirección x).

$$F_0 = [M_A + M_B + M_C] \cdot a_0.$$

Si todas las masas resultan ser iguales, tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{3}\left[\frac{F_0}{M}\right].$$

d) Ahora estamos en condiciones de calcular el valor de F_{BA}. Usando el resultado de la parte b) tenemos:

$$F_0 - F_{BA} = M\, a_0 = M\left[\frac{1}{3}\frac{F_0}{M}\right],$$

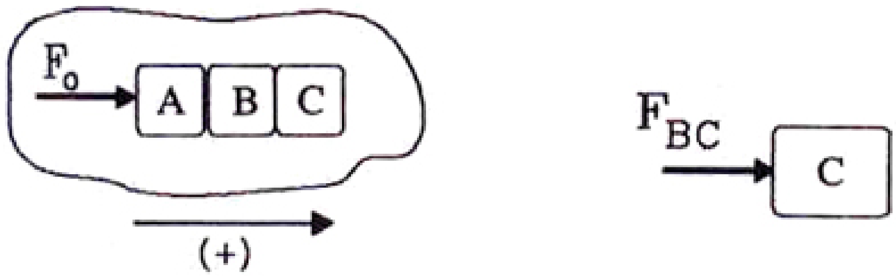


Figura IV.9:

despejando F_{BA}:

$$F_{BA} = \frac{2}{3}\,F_0,$$

y análogamente, la reacción de A sobre B es $F_{AB} = -F_{BA}$ de acuerdo al principio de acción y reacción, de modo que $F_{AB} = -\frac{2}{3}F_0$.

Para calcular la reacción de B sobre A, debemos hacer el diagrama de cuerpo libre de B y escribir la ecuación de fuerzas correspondiente:

$$F_{AB} - F_{CB} = M\,a_0,$$

como ya conocemos F_{AB} y a_0, obtenemos F_{CB} y entonces la fuerza del bloque B sobre C es:

$$F_{BC} = \frac{1}{3}F_0.$$

Es interesante notar que la intensidad de la fuerza neta, horizontal, que actúa sobre cada una de las masas es la misma. Por ejemplo, la fuerza sobre C es $\frac{1}{3}\,F_o$, sobre B es $-\frac{1}{3}\,F_o + \frac{2}{3}\,F_o = \frac{1}{3}\,F_o$, y sobre A es $F_o - F_{\mathrm{B}A} = F_o - \frac{2}{3}\,F_o = \frac{1}{3}\,F_o$.

Este resultado es natural, puesto que si todas las masas son iguales y tienen la misma aceleración, de acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza neta actuando sobre cada una de ellas debe ser la misma.

También es posible ver que la masa A está más comprimida que el resto: como es fácil de intuir.

Ejemplo

La figura representa una polea ideal (sin roce) sobre la que cuelgan dos masas M_1 y M_2, unidas por una cuerda sin masa e inextensible.

Encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema bajo la acción de la fuerza de gravedad.

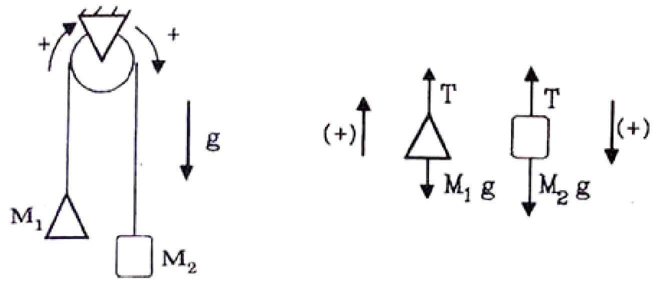


Figura IV.10:

De acuerdo a las suposiciones establecidas en el enunciado, la polea no gira y la cuerda se desliza sobre ella sin arrastrarla debido a la ausencia de roce.

Es claro que el sistema va a girar, salvo que las masas sean iguales. Una forma conveniente de resolver este caso es asignando, desde un comienzo, un valor positivo a una determinada rotación del sistema. Cuando se resuelve este problema a través de las ecuaciones de Newton, esta forma de asignar las coordenadas resulta simple y directa.

El diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas se indica en la Figura. *Note que mantenemos el sentido positivo a lo largo de la cuerda.*

Al cortar la cuerda la reemplazamos por una tensión que se transmite con igual magnitud al otro extremo puesto que la cuerda no tiene masa. La polea sólo cambia el sentido de la tensión. Las ecuaciones son:

$$T - M_1\, g = \quad M_1\, a,$$

$$-T + M_2\, g = \quad M_2\, a.$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas T y a, por lo tanto podemos resolver el problema. Al sumar ambas ecuaciones la tensión T desaparece y obtenemos la aceleración a. Reemplazando el valor de la aceleración en cualquiera de las ecuaciones obtenemos T.

$$a = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} \cdot g, \qquad T = \frac{2\, M_2\, M_1}{M_1 + M_2} \cdot g. \tag{IV.5}$$

Vemos que si $\mathrm{M}_2 = M_1$, la aceleración es nula como debe ser. Si $\mathrm{M}_2 = 0$, la aceleración de M_1 es $-$ g, de acuerdo a la convención de signos usada, y la tensión de la cuerda es nula, como era predecible.

Otro caso límite interesante es $M_2 \to \infty$. Demuestre que bajo estas condiciones la aceleración del sistema es g y la tensión alcanza el valor $T = 2\, M_1\, g$. Dé una razón física para justificar estos resultados.

Ejemplo

La masa M_3 en el sistema que se indica en la Figura [IV.11] representa la masa del tramo de la cuerda que se extiende entre las dos poleas ideales. Si despreciamos los trozos de cuerda que cuelgan de ambos lados, entonces podemos pensar en este problema como un intento de estudiar el efecto de la masa de la cuerda en el movimiento del sistema.

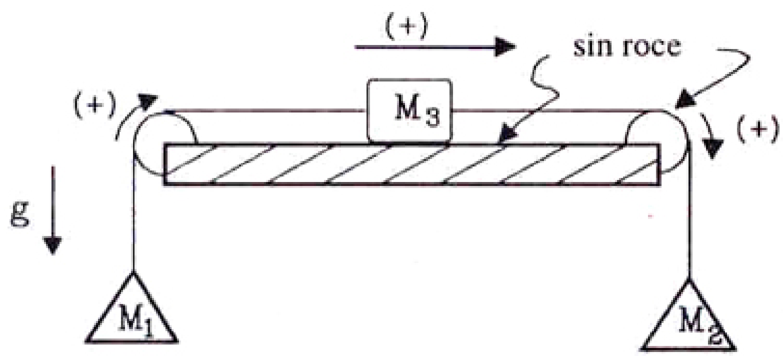


Figura IV.11: Este problema incorpora la masa de la cuerda –a través de M_3– a la dinámica de las masas del ejemplo anterior. Hemos reemplazado la cuerda por una masa puntual para evitar el análisis de la variación de masa debido al movimiento de la cuerda en los costados.

Las siguientes son cantidades conocidas que intervienen en el problema: M_1, M_2, M_3 y g. A partir de estos datos y de la información de la Figura se pide encontrar:

a) ¿Cuál es la fuerza neta sobre M_1 y M_2? Dé sus respuestas en función de M_1, M_2, g, T_1 y T_2 .

b) Si se mantiene fija la masa M_3 mediante una fuerza horizontal externa, por ejemplo con la mano, ¿cuál sería, en este caso, el valor de T_1?

c) Ahora suponga que M_1 se mantiene fijo aplicando una fuerza vertical con la mano, ¿cuál sería el valor de T_1?

d) ¿Cuál es la aceleración del sistema si se deja mover libremente? Dé sus respuestas en función de las masas M_1, M_2, M_3, y g.

La convención de signos para este ejemplo está indicada en la Figura.

a) Del diagrama de cuerpo libre de la masa M_1 se obtiene:

$$T_1 - M_1\, g = M_1\, a_1.$$

La fuerza neta sobre M_2 es:

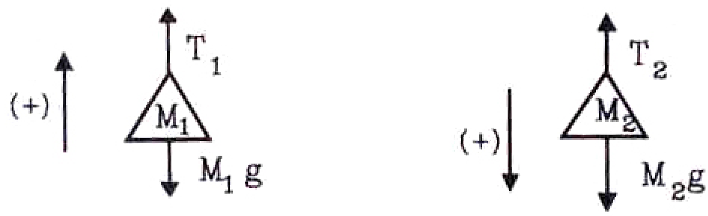


Figura IV.12:

$$-T_2 + M_2\, g = M_2\, a_2$$

Nota

Tomamos a_1 y a_2 como positivos. Si esto no resulta ser correcto, las ecuaciones nos lo indicarán.

Como la cuerda es inextensible, ambas aceleraciones deben ser iguales $a_1 \equiv a \equiv a_2$.

La fuerza neta sobre la masa M_3 es: $F_{ext}|_y = N_3 - M_3\, g = 0$, (no existe aceleración en la dirección del eje y, puesto que el bloque no salta ni tampoco se hunde durante su desplazamiento sobre la mesa).

$$F_{ext}|_x = -T_3 + T_4.$$

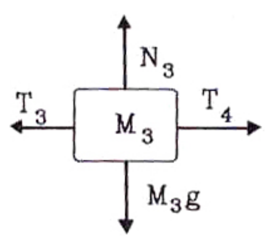


Figura IV.13: Diagrama de cuerpo libre de la masa que representa a la cuerda. Como no existe movimiento en la dirección vertical, la componente de la aceleración en esa dirección es nula.

b) Calculemos los valores de T_3 y T_4.

Como la masa de la cuerda es nula $|\vec{T_1}| = |\vec{T_3}|$, (Figura [IV.14]). La polea sólo cambia la dirección de la fuerza y no su *magnitud*. En cada punto de contacto de la cuerda con la polea se ejerce una fuerza (sobre la cuerda) perpendicular a la superficie de la polea.

La suma de todas esas fuerzas da como resultado una fuerza neta R, que es ejercida por la mesa y que cancela exactamente la suma de las dos tensiones T_1 y T_3.

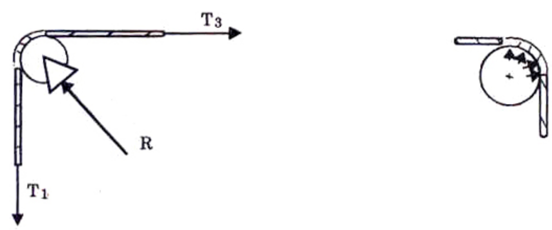


Figura IV.14:

La suma de todas las fuerzas actuando sobre la polea, incluyendo a las tensiones, se debe cancelar exactamente puesto que la polea no rota ni tampoco se acelera.

Los sentidos indicados para T_1 y T_3 son los correctos puesto que una cuerda sólo puede transmitir tensión, como es obvio.

El mismo razonamiento se aplica a la otra polea, de modo que $|\vec{T}_2| = |\vec{T}_4|$.

Reemplazando los valores de las tensiones, tenemos:

$$\text{Fuerza Neta sobre} \qquad M_3|_x = T_2 - T_1.$$

Ahora si M_3 se mantiene fija con la mano, la fuerza neta es $M_3 = T_2 - T_1 + F_{\text{mano}} = 0$, y todo el sistema permanece en reposo ($a = 0$). Reemplazando los valores $T_1 = M_1\, g$ y $T_2 = M_2\, g$ obtenidos en la parte a), tenemos que:

Fuerza aplicada por la mano $= (M_1 - M_2)\, g$.

c) Si sólo M_1 se mantiene fijo, entonces todo el sistema está en reposo. Resuelvo las ecuaciones de derecha a izquierda. Las ecuaciones de Newton aplicadas a la masa M_2, dan como resultado: $T_2 = M_2\, g$, puesto que M_2 no se mueve.

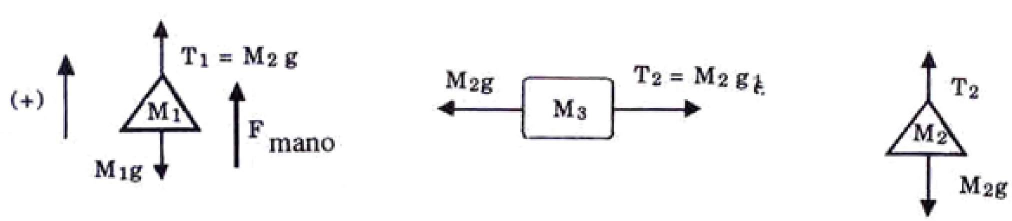


Figura IV.15: Diagrama de fuerzas correspondientes al caso c) para cada una de las masas.

Como M_3 permanece en reposo, entonces:

$$T_1 - T_2 = 0 \implies T_1 = T_2.$$

Las fuerzas actuando sobre M_1, cumplen la siguiente ecuación:

$$T_1 - M_1\, g + F_{mano} = 0, \qquad \text{pero} \qquad T_2 = M_2\, g = T_1,$$

entonces, reemplazando en la ecuación anterior, obtenemos el valor de la fuerza ejercida por la mano, que es el mismo resultado obtenido en la parte b), como era de esperar:

$$F_{mano} = -(M_2 - M_1)g.$$

Si $M_2 > M_1 \;\Rightarrow\; F_{mano} < 0 \Rightarrow$ Debo tirar la masa M_1 hacia abajo para mantenerla en posición.

d) Veamos ahora los valores que se obtienen si el sistema se mueve libremente. Suponemos que el sistema se desplaza hacia la *derecha* con aceleración a.

$$T_1 - M_1\, g = M_1\, a.$$

En este caso registramos sólo las ecuaciones en la dirección horizontal, puesto que en la dirección vertical no existe movimiento para M_3:

Figura IV.16: Diagrama de cuerpo libre para el caso d). Si $M_2 > M_1$, entonces $a > 0$, y el sistema se acelera en el sentido indicado en la Figura. Si $M_2 < M_1$, $a < 0$ y el sistema se mueve en el sentido opuesto.

$$T_2 - T_1 = M_3\, a,$$
$$-T_2 + M_2\, g = +M_2\, a.$$

Sumando las 3 ecuaciones obtenemos:

$$-M_1\, g + M_2\, g = (M_1 + M_2 + M_3)\, a \quad \implies \quad a = \frac{(M_2 - M_1)\, g}{M_1 + M_2 + M_3},$$

De la segunda ecuación, se llega a:

$$T_2 - T_1 = \frac{M_3(M_2 - M_1)\, g}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

Si $M_3 = 0$, entonces $T_2 = T_1 \equiv T$.

Análogamente, si $M_2 = M_1$ entonces $T_1 = T_2$ y además $a = 0$. El sistema permanece en reposo si lo estaba inicialmente.$\square$

Cabe notar que las reacciones denominadas por R que aparecen debido al cambio de dirección que sufre la tensión en las poleas, generan una fuerza neta sobre la mesa.

Ejemplo

¿Cuál es el valor de $\vec{F}_0$ para que M_1 (y por lo tanto M_2) permanezca en reposo con respecto a M? No existe roce en ninguna superficie. La cuerda es inextensible y no tiene masa.

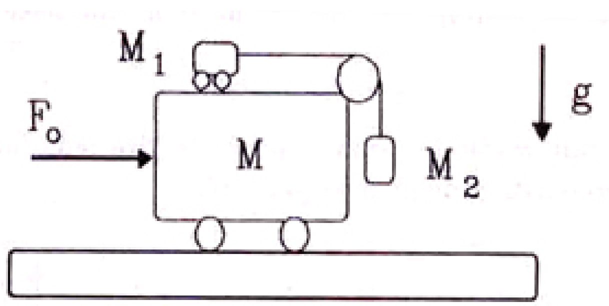


Figura IV.17: En este problema debemos encontrar el valor de la fuerza que le comunica al sistema una aceleración igual a la que experimenta la masa M_1 que va montada sobre el carro. La aceleración de ésta última se debe al peso de M_2.

Como M_1 sostiene a M_2, debe sufrir una aceleración generada a través de la tensión de la cuerda que los une. Para que M_1 permanezca en *reposo con respecto a M* el valor de su aceleración debe ser igual al que adquiere M debido a las fuerzas que actúan sobre ella. Estas fuerzas son: la reacción horizontal de M_2 sobre M, *la reacción R que se ejerce sobre la polea y que proviene de la tensión de la cuerda* y la fuerza externa $\vec{F}_0$.

No podemos ubicarnos en un sistema de referencia que se mueva con M puesto que *no* es un sistema inercial. (En realidad es posible, pero debemos incluir fuerzas no inerciales y no estamos preparados para hacerlo).

A continuación aplicamos las leyes de Newton para resolver el problema.

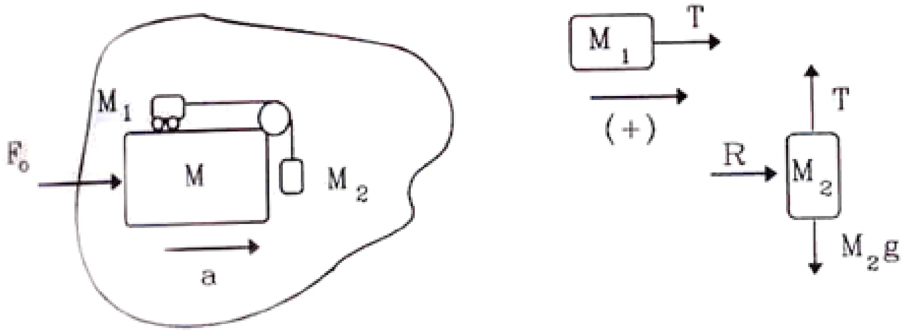


Figura IV.18: Se incluye a la izquierda el diagrama de cuerpo libre de *el sistema considerado como un todo.* A la derecha aparecen los diagramas de cuerpo libre de las masas M_1 y M_2.

Supongamos que F_0 tiene el valor correcto y que, por tanto, la masa M_1 no se mueve *con respecto a M.* A partir del diagrama de cuerpo libre de M_1 [IV.18] obtenemos para las fuerzas horizontales:

$$M_1\, a = T.$$

donde a es la aceleración que adquiere el sistema. De la misma Figura, las fuerzas *verticales* sobre M_2 dan la siguiente ecuación:

$$-T + M_2\, g = 0,$$

puesto que M_2 *no cae*, conserva la misma altura con respecto al piso durante todo el movimiento del sistema.

$$\Rightarrow a = \frac{M_2}{M_1}\, g,$$

pero, debido a que el sistema se mueve como un todo, entonces:

$$\begin{aligned} F_0 &= (M + M_1 + M_2) \cdot a \qquad \Rightarrow \\ F_0 &= (M + M_1 + M_2)\tfrac{M_2}{M_1} \cdot g. \end{aligned}$$

Este resultado parece razonable puesto que si $\mathrm{M}_2 = 0$ entonces la fuerza que es necesario aplicar es nula puesto que M_1 no se moverá por sí sola. Si M_2 es mucho mayor que M_1, entonces para evitar que M_2 se mueva, la fuerza inercial de M_1 ($\mathrm{M}_1 a$) debe ser igual a la fuerza que se ejerce sobre M_2 ($\mathrm{M}_2 g$) y como M_1 es pequeña, entonces la aceleración a debe tomar un valor muy alto.

Si M_1 se hace igual a cero, no existe ninguna posibilidad de mantener M_2 en reposo con respecto a M puesto que la tensión T se hace cero y no hay forma de equilibrar el peso de M_2. $\Box$

Ejercicio

Encontrar esta misma solución (Figura [IV.18]), analizando el diagrama de cuerpo libre en cada una de las masas.

Indicación: Recuerde incluir la reacción de la polea sobre M. $\Box$

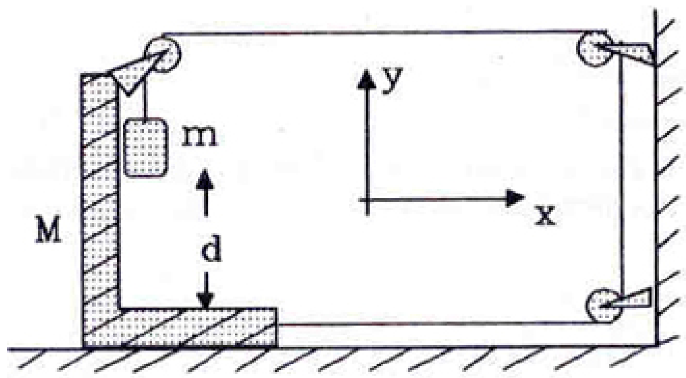


Figura IV.19:

Ejemplo

Las superficies que aparecen en la Figura [IV.19] no generan fuerzas de roce. Si en el instante $t = 0$ se suelta la masa m, calcule cuánto tiempo tarda en chocar con el piso. Los valores para cada una de las variables son: $m = 0,150$ kg, $M = 1,650$ kg, y la distancia d = 1 m.

La tensión en el hilo es la misma en el tramo horizontal superior o inferior puesto que el hilo *no* tiene masa y las poleas no ofrecen resistencia al movimiento.

En la parte a) de la Figura [IV.20] se indica el diagrama de cuerpo libre del sistema M y m. Considerando sólo las fuerzas horizontales, deducimos que,

$$T_1 = T_2 \equiv T$$

A continuación obtenemos la ecuación de movimiento para el sistema M y m. Como se mueve en la dirección positiva del eje x, la masa m se desliza cayendo sobre M pero siempre pegada a M, tal como lo indica la Figura. De esta forma $a_x^m = a_x^M \equiv a_x$.

Con el diagrama de cuerpo libre de la parte a) de la Figura, considerando sólo las fuerzas en la dirección x, se obtiene:

$$2\,T = (M + m)\,a_x.$$

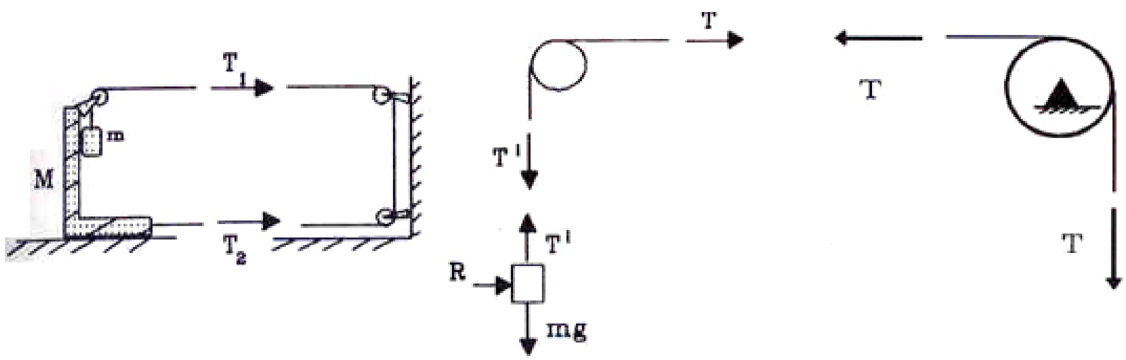


Figura IV.20: Aquí se incluye el sistema original y los diagramas de cuerpo libre de la masa M y m. La Figura muestra que si la masa M avanza, digamos 1 cm hacia la derecha, la distancia que recorre el hilo entre la masa M y la pared se acorta en 2 cm y, en consecuencia, la masa m baja *2 cm*.

Tenemos una ecuación y dos incógnitas: a_x y T. Necesitamos más información.

Examinando el movimiento de la masa m en la dirección y, a partir del diagrama de cuerpo libre de la parte b) de la Figura [IV.20], obtenemos:

$$+T' - m\,g = m\,a_y. \qquad (a_y^m \equiv a_y).$$

La aceleración de m es la única que tiene una componente adicional en la dirección y.

No hemos progresado mucho porque sumamos una ecuación a la anterior pero, aparecieron dos incógnitas: T' y a_y.

De la Figura se desprende que si en un intervalo Δt s, M avanza hacia la derecha Δx, metros, m cae, en el mismo intervalo, *dos veces esa cantidad* $2\,\Delta x$. Por lo tanto, *en cada instante, la componente vertical de la velocidad* de m, es el doble de la componente horizontal de la velocidad de M, si la cuerda permanece en tensión.

Concluimos que la aceleración de m debe ser el doble de la de M en todo instante. Para confirmar este resultado, basta examinar la definición de la aceleración:

$$a = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \quad a' = \frac{2\,v(t+\Delta t) - 2\,v(t)}{\Delta t} \implies a' = 2\,a.$$

En nuestro caso, este resultado se traduce en la siguiente ecuación:

$$a_y = 2\,a_x.$$

Con este resultado, tenemos tres ecuaciones y cuatro incógnitas. Aún nos falta una ecuación.

Relacionaremos T' con T. Por las mismas razones explicadas anteriormente (esencialmente el hecho que la cuerda no tenga masa y que las poleas no tengan roce),

$$T' = T.$$

Con esta ecuación tenemos cuatro incógnitas para cuatro ecuaciones y podemos resolver el problema. Como las ecuaciones no son complicadas no detallamos los pasos intermedios (**Ejercicio**). La respuesta es:

$$a_y = \frac{4\,m\,g}{M + 5\,m}.$$

A partir de esta ecuación podemos obtener el resto sin dificultades.

Para calcular cuánto demora en caer la masa m, se usa la fórmula de cinemática, válida para aceleraciones constantes, indicada a continuación:

$$y = y_o + v_o\,t + \frac{1}{2}\,a_y\,t^2.$$

Introduciendo los datos numéricos en la ecuación, obtenemos $t = 0,9$ s.$\square$

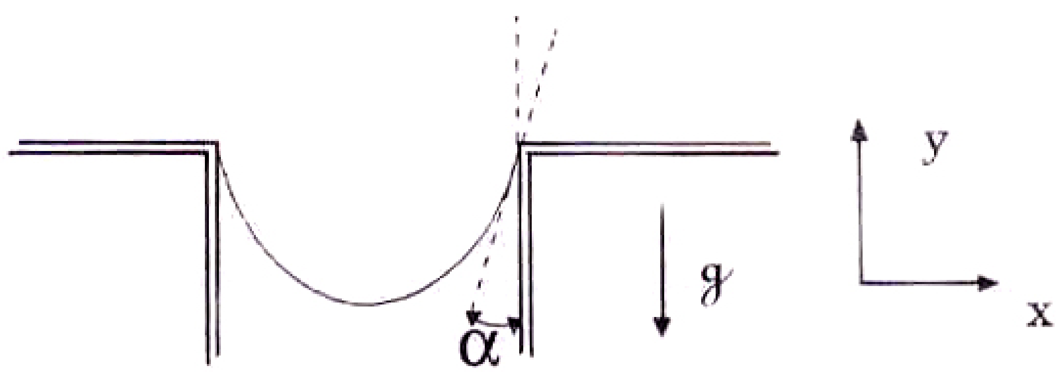


Figura IV.21: La cuerda está sostenida de sus extremos. Como es absolutamente flexible (se puede doblar sin ninguna dificultad), la forma que adopta depende de su longitud y del espacio que separa ambas paredes.

Ejemplo

La Figura [IV.21] muestra una cuerda de largo ℓ y de masa μ por unidad de largo, que cuelga entre dos paredes. La cuerda forma un ángulo α en el punto que toca a las paredes.

a) Encuentre el valor de la fuerza que se debe ejercer sobre cada uno de sus extremos para sostenerla.

b) Encuentre el valor de la tensión de la cuerda en su punto más bajo.

Por la simetría del problema, la fuerza necesaria para sostener la cuerda debe ser la misma en ambos extremos. Basta pensar que no hay forma de distinguir un extremo del otro.

Debido a su extrema flexibilidad, la cuerda transmite sólo tensiones en la dirección de su tangente en cada punto.

Estos dos puntos serán usados en la resolución de este ejemplo y son, además, de aplicación general.

a) Para encontrar la fuerza sobre los extremos usamos un diagrama de cuerpo libre que incluya a toda la cuerda y reemplazamos las paredes por las fuerzas necesarias para sostenerla.

El peso total de la cuerda es $W = -\mu\,\ell\,g$ y apunta en sentido negativo (ver Figura).

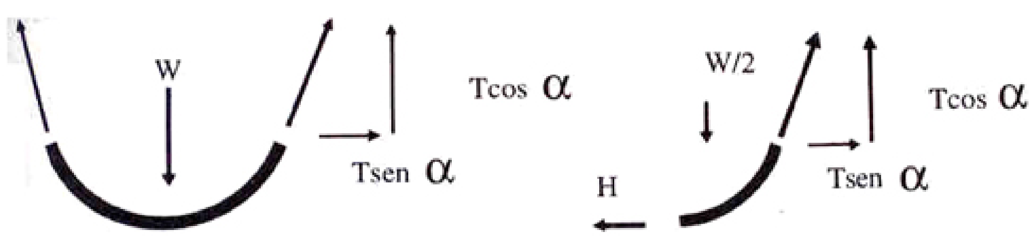


Figura IV.22:

Como la fuerza en el extremo superior se alinea con la dirección de la tangente a la cuerda, tiene una proyección vertical $T_y = T \cos\alpha$ y una componente horizontal $T_x = T\, sen\, \alpha$.

Ya que el sistema permanece en reposo, no tiene velocidad ni aceleración, por lo tanto la suma de las fuerzas externas debe anularse, en cada una de las direcciones:

$$\begin{aligned} \text{En el eje x:} \qquad T\, sen\, \alpha - T\, sen\, \alpha &= 0, \\ \text{En el eje y:} \qquad T \cos\alpha + T\cos\alpha - W &= 0. \end{aligned}$$

Sólo la última ecuación nos informa acerca del valor de la tensión en el extremo de la cuerda. La primera se cancela automáticamente debido a la simetría del problema.

Obtenemos para T, la siguiente expresión:

$$T = \frac{W}{2\cos\alpha} = \frac{\mu\,\ell\,g}{2\cos\alpha}.$$

Este resultado es razonable y coincide con lo esperado en casos particulares más simples: si $\alpha = 0$, las dos paredes están casi juntas y existen sólo componentes verticales. Cada extremo soporta la mitad del peso de la cuerda. Si $\alpha = \pi/2$, la fuerza necesaria para sostener la cuerda debido a su peso es infinita, sin importar el valor de su masa total. Este resultado nos señala que por pequeña que sea la fuerza aplicada sobre la cuerda (o, como en este caso, el efecto de su propio peso), para sostenerla, la cuerda debe deformarse.

b) Para calcular la tensión en el *punto más bajo* de la cuerda, debemos usar un diagrama de cuerpo libre que incluya explícitamente esa fuerza.

Tomemos la mitad derecha de la cuerda (ver Figura), y designemos la tensión en el punto más bajo como H (tangente a la cuerda). Ayudándonos de la geometría, podemos deducir que la fuerza en ese punto es horizontal: si no lo fuera uno de sus puntos vecinos estaría más bajo, contradiciendo la hipótesis inicial.

Aplicando nuevamente el equilibrio de fuerzas y recordando que debemos incluir el peso de la mitad de la cuerda: $W/2$, tenemos:

En el eje x: $$-H + T\,sen\,\alpha = 0, \Longrightarrow H = T\,sen\,\alpha,$$

En el eje y: $$T\,\cos\,\alpha - W/2 = 0.$$

La segunda ecuación se cumple automáticamente al reemplazar los valores obtenidos anteriormente.

Introduciendo el valor de T en la primera ecuación, obtenemos el resultado buscado:

$$H = \frac{\mu\,\ell\,g}{2}\,\tan\,\alpha.$$

Al igual que en la parte a), si $\alpha \longrightarrow \pi/2$, o sea, a medida que se intenta formar una línea recta con la cuerda, la tensión tiende a ∞. Por otra parte, si las paredes se acercan, la tensión en el punto más bajo disminuye tendiendo a cero con $\alpha = 0$.□

Ejemplo

Una niña se desliza por un plano inclinado sobre un carrito, tal como se observa en la Figura [IV.23]. Si el ángulo del plano inclinado con la horizontal es θ, y la niña, que tiene masa M, parte del reposo desde una altura h, calcule:

a) Cuánto se demora en llegar al piso.

b) Suponga que en el carro va una balanza y la niña se desliza parada sobre ella, ¿cuál es la lectura de la balanza?

a) Para encontrar el tiempo que tarda la niña en llegar al piso, debemos calcular la componente de la fuerza que apunta en la dirección paralela al piso de la cuña, con

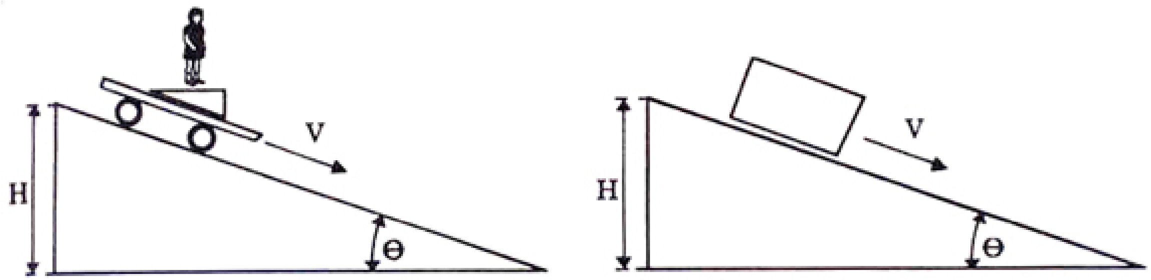


Figura IV.23: La niña se desliza por la pendiente. En la parte a) del problema podemos pensar en un bloque deslizándose. En el punto siguiente, lo imaginamos como dos bloques cayendo juntos y nos preocupamos de la fuerza de reacción del bloque inferior sobre el superior.

el valor de esta fuerza podemos encontrar la aceleración a través de la segunda ley de Newton. A continuación, con las ecuaciones de la cinemática, calculamos el tiempo que tarda en llegar al piso.

El hecho de identificar uno de los cuerpos como una niña es simplemente para relacionarlo con una situación real. Las leyes de Newton consideran a todos los cuerpos como masas puntuales *sin dimensiones espaciales*. Por esta razón, cuando utilizamos la segunda ley de Newton, trasladamos todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a un sólo punto. Más tarde, al incorporar el torque a nuestro análisis, aparecen más ecuaciones –que se suman a las anteriores–, y en ellas debemos especificar el lugar donde actúan las fuerzas.

Para calcular la aceleración del bloque, lo incluyo dentro del diagrama de cuerpo libre. En este caso conviene proyectar las fuerzas sobre un sistema de referencia donde el eje–x se alínea con la dirección del plano inclinado y el eje–y, en la dirección perpendicular a él. Esta elección de ejes coordenados nos facilita los cálculos.

Al sacar la cuña, la reemplazamos por una fuerza de contacto R, que apunta en la dirección del eje–y. Esta reacción no presenta componentes en la dirección x, porque hemos supuesto que el roce entre el bloque y el piso es despreciable. El peso de la niña (o el bloque) debe proyectarse sobre estos ejes coordenados (Figura [IV.24]). El resultado es:

$$\begin{aligned} &\text{En el eje–y} \qquad & M\,g\,\cos\theta - R =& \quad 0, \qquad a_y = 0, \\ &\text{En el eje–x} \qquad & M\,g\,sen\,\theta =& \quad M\,a_x. \end{aligned}$$

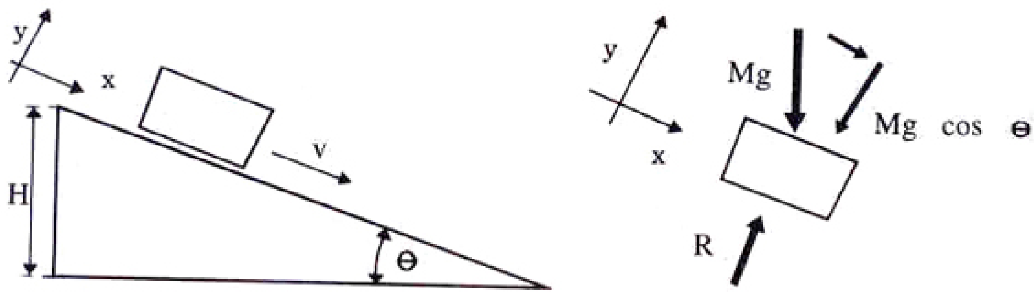


Figura IV.24:

El origen de cada una de estas ecuaciones es el siguiente: en la dirección y de la Figura, el bloque no cambia de velocidad, por lo tanto la componente a_y de la aceleración es nula, y la ecuación se reduce a la suma de las fuerzas externas en esa dirección.

Para los cálculos en la dirección x no debemos olvidar que a_x no es nula y que la única fuerza que tiene proyección en esa dirección es $M\,g$.

De la última ecuación obtenemos la aceleración:

$$a_x = g\,sen\,\theta.$$

(Note que la aceleración es independiente de la masa del cuerpo que resbala. Todos caen con la misma aceleración si no existe roce.)

A partir de esta aceleración poddemos encontrar el tiempo que tarda en alcanzar el borde inferior de la cuña:

$$\text{Como} \quad x = \frac{1}{2}\,a_x\,t^2, \quad \text{y} \quad d = \frac{h}{sen\,\theta}, \quad \text{pero,} \quad d = \frac{1}{2}\,g\,sen\,\theta\,T^2, \quad \text{obtenemos:}$$

$$T = \left[\frac{2\,h}{g\,\text{sen}^2\theta}\right].$$

La expresión a la derecha de T tiene dimensiones de tiempo, como debe ser. Por otra parte, de esta fórmula deducimos que si $\theta = \pi/2$, la aceleración $a_x = g$, conforme a lo que esperábamos, puesto que $\theta = 90^o$, corresponde al caso de caída libre.

Ahora si $\theta = 0^o$, el tiempo que demora es infinito debido a la ausencia de pendiente en la cuña.

b) Calculamos ahora el peso que marcaría una balanza puesta en la cuña que se ubica inmediatamente debajo de la niña (Figura [IV.23]). Precisemos también a qué cantidad física corresponde la lectura de la balanza: *lo que mide la balanza es la reacción del bloque inferior sobre la niña.*

Por el principio de acción y reacción, esta reacción es la misma fuerza (pero con sentido opuesto) con la cual la niña presiona al bloque inferior, es decir lo que denominamos el peso.

Para calcular esta fuerza tomamos un sistema de referencia con un eje vertical y el otro horizontal. Este cambio de sistema con respecto al punto anterior obedece a que necesitamos calcular una aceleración vertical, por tanto usamos un sistema de referencia en el cual uno de sus ejes coincida con esa dirección.

Escogemos como nuestro objeto de estudio la niña y construimos su diagrama de cuerpo libre (Figura [IV.25]). En este caso nos interesan únicamente las fuerzas verticales, puesto que en esa dirección actúa la reacción del bloque inferior:

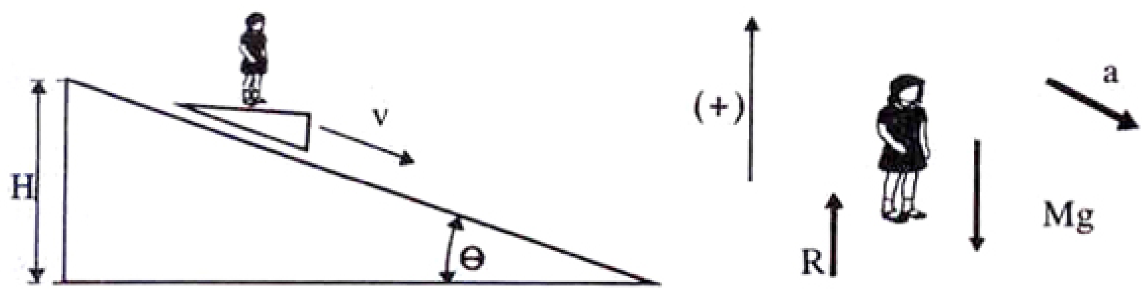


Figura IV.25:

$$R - M\,g = -M\,a,$$

la aceleración a que aparece en la ecuación, es la proyección de a_x, en la dirección vertical: la única aceleración distinta de cero obtenida en la pregunta anterior. Su proyección es $a_x\,sen\,\theta$. Reemplazando a por este valor y despejando R, obtenemos:

$$R = M\,g\,[1 - \mathrm{sen}^2\theta] = M\,g\,\cos^2\theta.$$

Si $\theta = 0$, entonces $R = M\,g$, como era de esperar, puesto que la cuña se transforma en una placa paralela al piso.

Si $\theta = \pi/2$, entonces $R = 0$, debido a que ambos, el bloque y la niña están en caída libre y no hay reacción de uno sobre el otro.□

IV.5. FRICCION

Sabemos muy bien que no existe el movimiento perpetuo. Si observamos un cuerpo deslizándose sobre otro, tarde o temprano el cuerpo se detendrá a menos que exista una fuerza externa que lo mantenga.

La fuerza que se opone al movimiento relativo entre los dos cuerpos se denomina *fuerza de roce cinético*. Se origina en la interacción de ambas superficies en contacto.

Un fenómeno similar ocurre cuando intentamos mover un cuerpo que está en *reposo*. Al hacerlo, notamos que a pesar de la fuerza aplicada, el cuerpo no se mueve. La fuerza que impide el desplazamiento se denomina *fuerza de roce estático*.

Se sabe muy poco acerca de estas fuerzas y es muy díficil medirlas porque dependen de las propiedades de la superficie, como: pulido, existencia de óxidos en la superficie, naturaleza de los materiales,... etc. También dependen de la historia de las superficies: si los bloques han sido deslizados previamente o no. Todo esto hace aún más difícil cuantificar su efecto.

Un ejemplo ilustrativo que aparece en la literatura consiste en lo siguiente: un vaso colocado sobre una bandeja de vidrio se tira con una cuerda y al medir la fuerza necesaria para moverlo se puede apreciar que es más o menos constante. Esto da una idea de la fuerza de roce o fricción cinética.

Sin embargo si la superficie se moja, el agua separa las partículas de polvo y la grasa que había sobre la superficie y al arrastrar el vaso se nota que la fuerza necesaria para hacerlo es ahora mayor. Los objetos tienden a pegarse. Al separarlos notamos que pueden existir rayas en el vidrio debido a que el contacto vidrio-vidrio es fuerte y se resiste a su separación.

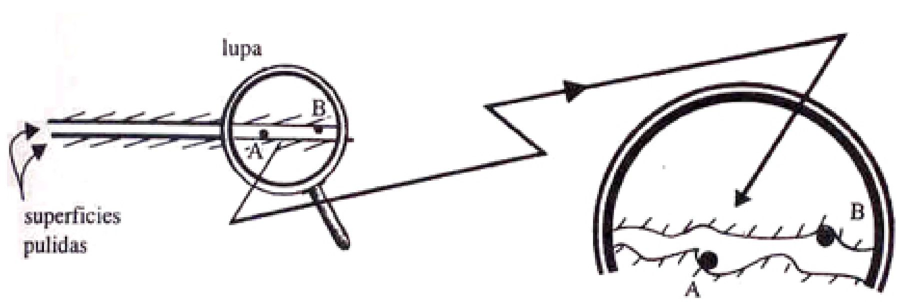


Figura IV.26: Dos superficies, por suaves que parezcan al tacto, tienen irregularidades que pueden ser vistas mediante un microscopio. Las fuerzas de roce tienen su origen en las microsoldaduras o en la resistencia al movimiento generada por estas irregularidades.

Las primeras investigaciones acerca de la fricción fueron realizadas por Leonardo da Vinci, hace 450 años atrás, pero nunca fueron publicadas y sólo se conocieron después que los investigadores franceses: Guillaume Amontons y Charles-Augustin de Coulomb, publicaron sus trabajos. Estos últimos propusieron *cuatro leyes* acerca del comportamiento de la fricción. Hoy sólo tres de ellas sobreviven, y su validez ha sido corroborada por aproximadamente 300 años de investigación en el tema.

Estas tres leyes son:

- La fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal que ejerce el cuerpo sobre la superficie.

- La fuerza de fricción no depende del tamaño de las superficies en contacto.

- El coeficiente de fricción depende de las propiedades de las superficies que se deslizan.

La cuarta ley, que es incorrecta, afirmaba que el roce no dependía de la velocidad relativa de las superficies. Al final de este capítulo comentaremos acerca de la dependencia que existe entre la fuerza de roce y la velocidad y su aplicación al caso de las cuerdas de un violín y el origen del ruido que generan los goznes de las puertas.

Podemos afirmar que el *roce estático* se origina por la aparición de reacciones químicas entre las moléculas de ambas superficies que logran ubicarse muy cerca una de otra. Esta ligazón molecular genera microsoldaduras en determinados puntos de las superficies en contacto y es el origen de la fuerza de fricción estática que impide el desplazamiento relativo de dos cuerpos inicialmente en reposo. Al deslizar una sobre otra, se rompen estos vínculos, las moléculas quedan vibrando y disipan parte de su energía como calor, hecho que se puede constatar al tocar las superficies.

Una vez que las superficies comienzan a desplazarse entre ellas, estas aristas microscópicas se enganchan unas con otras y dan origen al *roce cinético*.

Todo este argumento es *cualitativo*. Las prescripciones que siguen a continuación no pueden tener el caracter de una ley fundamental de la naturaleza sino más bien un *resultado empírico*: una conclusión más o menos general que se obtiene después de realizar muchos experimentos.

Supongamos que tenemos un bloque descansando sobre el piso y que intentamos desplazarlo aplicando una fuerza horizontal F que la vamos incrementando lentamente. La fuerza de roce estático la designamos por f.

A continuación describimos la forma como actúa la fuerza de roce cuando intentamos deslizar un bloque sobre un piso.

a) Cuando F varía desde 0 hasta un cierto valor F', la fuerza de fricción también aumenta junto con ella, desde 0 hasta F'.

b) Cuando $F = F'$ el bloque está a punto de comenzar a moverse. El valor de F' es fijo y depende en forma complicada de todos los parámetros mencionados más arriba. Por ahora olvidamos este último comentario y suponemos que tiene un valor conocido y fijo.

c) Al aumentar levemente el valor de F, es decir al hacer $F > F'$, la fuerza de roce permanece constante $f = F'$, y el bloque comienza a moverse.

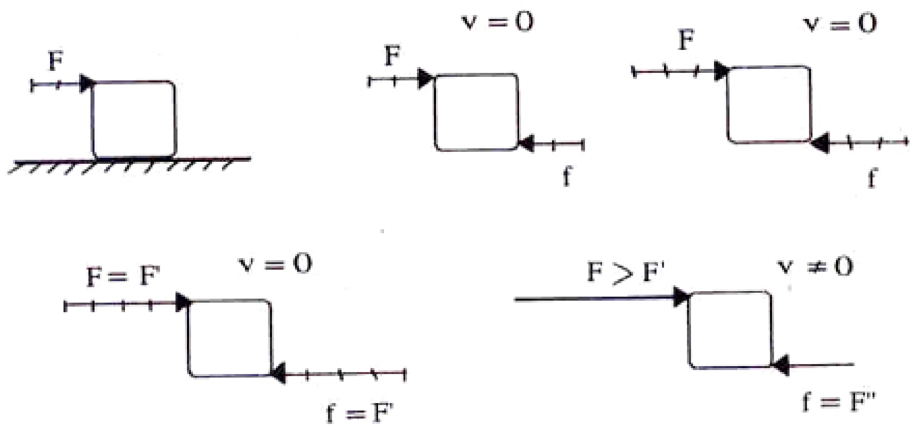


Figura IV.27: A medida que la fuerza horizontal F aumenta en magnitud, también lo hace la fuerza de roce f, hasta que llega a su cota máxima F'. Cuando F se hace mayor que este valor F', el bloque comienza a moverse y el roce estático se transforma en roce cinético.

> *d) Cuando F es mayor que F' y el bloque está en movimiento, la fuerza de roce disminuye $f < F'$. En la mayoría de los casos esta disminución es pequeña.*

Nos queda por determinar el valor de F'. Adoptamos la ley de Coulomb para el roce en seco y definimos el valor de F' de la siguiente forma:

Definición

El valor máximo de la fuerza de fricción $|\vec{F}'|$, es proporcional a la fuerza normal que se ejerce entre las superficies en contacto:

$$|\vec{F}'| = \text{Fuerza máxima de fricción estática} = \mu\,|\vec{N}|, \tag{IV.6}$$

donde $\vec{N}$ es la fuerza normal entre las superficies y μ se denomina el *coeficiente de fricción*, y esconde nuestra ignorancia acerca del estado y características de las superficies en contacto que intervienen en el desplazamiento relativo.

Como se mencionó, existe un valor máximo para la fuerza de fricción estática y otro levemente menor para la fuerza de fricción cinética. Para distinguir ambos definimos un coeficiente de fricción cinético μ_c y otro estático μ_e.

$$\vec{F}_{roce} \equiv \mu_e \cdot |\vec{N}|\hat{t}, \tag{IV.7}$$

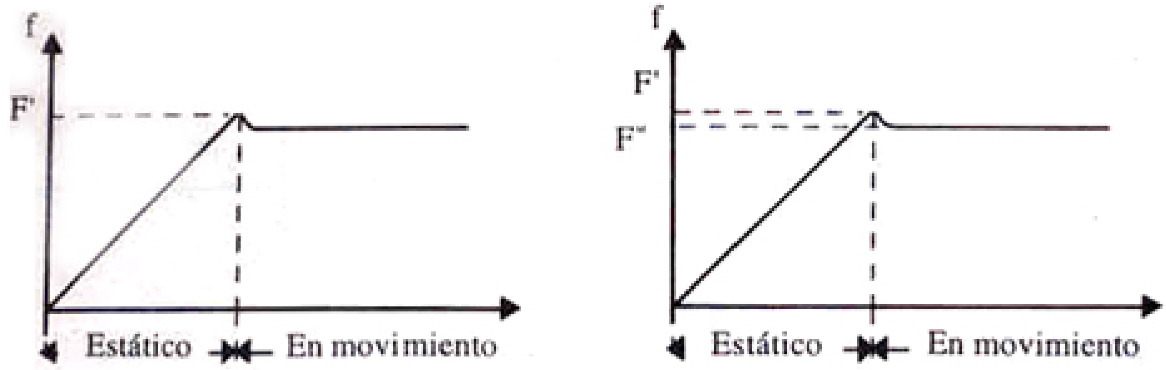


Figura IV.28: Se incluye un gráfico del valor con el cual la fuerza de roce responde a una fuerza externa. El movimiento comienza cuando se alcanza el valor F'. Posteriormente la fuerza de roce cambia y se estabiliza en el valor F", correspondiente al roce cinético.

donde $\vec{F}_{roce}$ *representa la fuerza de roce que actúa en la dirección tangente a la superficie de contacto* $\hat{t}$, *y apunta en el sentido opuesto al movimiento relativo, en el caso de la fricción cinética y en el sentido opuesto a la fuerza aplicada, en el caso de la fricción estática.*

En resumen: El módulo de las fuerzas F' y F'', es proporcional al módulo de la fuerza normal a la superficie. El factor de proporcionalidad son los coeficientes de fricción estática en el primer caso y cinética en el segundo. La dirección de la fuerza de roce es siempre tangencial a la superficie de contacto y su sentido se opone al movimiento relativo.

Para sacar del reposo a un cuerpo debemos aplicar en forma tangencial una fuerza $F > F'$ y una vez en movimiento al menos una fuerza F'' para mantener su velocidad.

Nota

Antes de empezar a resolver un problema, es fundamental tener claro cuáles son los datos (es decir, lo que se conoce) y cuáles son las incógnitas. Después de plantear las ecuaciones debemos numerarlas (cada signo "=" revela una ecuación). Si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, podemos resolver el problema, en caso contrario debemos buscar nuevas ecuaciones.

En todos los problemas en que interviene el roce debemos suponer, de un comienzo, el sentido que tendrá el movimiento. Esta condición se debe a que el roce siempre se opone al movimiento, por lo tanto, para decidir su dirección y sentido es preciso suponer conocida la

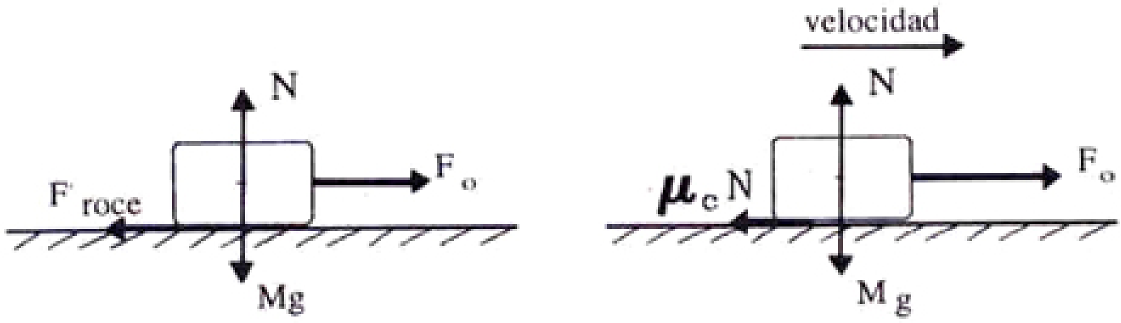


Figura IV.29: Se muestra el diagrama de cuerpo libre y la definición de la fuerza de roce con el coeficiente de roce *estático* (antes de que se produzca el movimiento) y el roce *cinético*, en el caso de un bloque deslizando sobre una superficie rugosa.

dirección y sentido en que viajará el móvil.

Si el movimiento obtenido a partir de esta suposición inicial ocurre en sentido opuesto, debemos resolver el problema nuevamente desde el comienzo cambiando el sentido del movimiento inicial.

Ejemplo

Resolvamos el movimiento de dos masas unidas por una cuerda de masa despreciable, una de ellas se desliza sobre un plano inclinado *con roce* y la otra cuelga, a través de una polea, del otro extremo de la cuerda.

En este problema suponemos conocidos: los valores de las masas, el coeficiente de roce cinético μ_c y el ángulo θ que forma el plano con el piso.

Se pide calcular la tensión de la cuerda y la aceleración de las masas M y m.

Recordemos que la cuerda debe estar siempre tensa. De esta forma la masa M se entera del movimiento de m únicamente a través de la tensión de la cuerda que debe (en módulo) ser la misma que la tensión que actúa sobre m. La polea del extremo no tiene roce y por lo tanto sólo cambia la dirección de la tensión. Como la cuerda es inextensible la aceleración de la masa M es la misma que la de m, sólo cambia su dirección.

Como ya establecimos cuáles eran las conexiones entre m y M, procedemos a elegir el sistema de coordenadas que mejor se adapte al problema. Designamos como eje–x a la dirección paralela a la superficie del plano inclinado. El eje–y es, por supuesto, perpendicular. Como el bloque se desliza sobre esta superficie, sin saltar o hundirse, éste es un sistema de coordenadas muy conveniente para resolverlo.

Enseguida hacemos el diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas. Para el

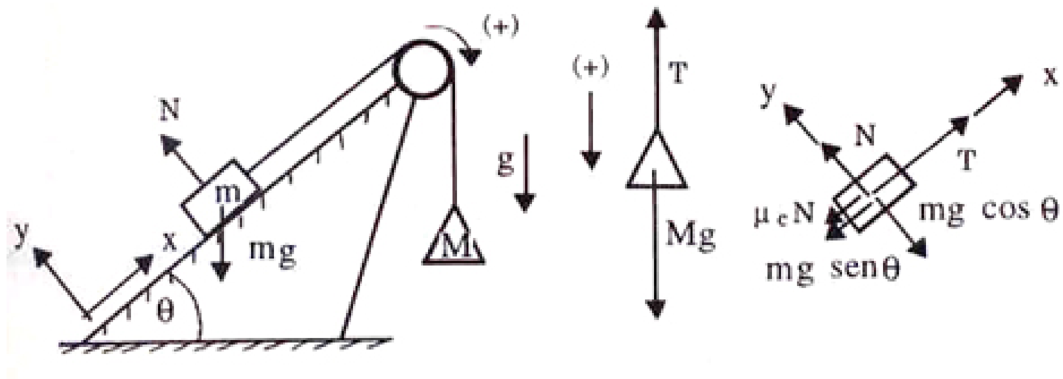


Figura IV.30: A cada una de las masas le asociamos una fuerza que corresponde a su peso. Sobre m actúa la reacción del piso que se descompone en una fuerza normal al piso y otra tangente que identifica a la fuerza de roce.

primer bloque de masa m tenemos, en el *eje–y*:

$$1) \quad N - m\,g\cos\theta = 0,$$

De esta ecuación tenemos: $N = m\,g\,\cos\theta$.

Suponemos que la masa m remontará el plano en la forma indicada en la Figura. Si esta suposición es correcta, su ecuación de movimiento es:

$$2) \quad -\mu_c N - mg\text{sen}\,\theta + T = m\,a.$$

La ecuación de movimiento para M es:

$$3) \quad -T + M\,g = +M\,a.$$

Las incógnitas son N, T y a. Y como tenemos tres ecuaciones, de forma que podemos despejarlas.

De la ecuación 1) despejamos N y su valor lo incluímos en 2), obteniendo:

$$\begin{aligned} -\mu_c m\,g\,\cos\theta - m\,g\text{sen}\,\theta + T &= ma \\ Mg - T &= Ma \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones se cancela T y entonces podemos despejar la aceleración obteniendo:

$$a = \frac{M - m(\mu_c + \tan\theta)\cos\theta}{M+m}\,g.$$

Si la aceleración resulta ser negativa, debemos volver a las ecuaciones 1, 2 y 3 y plantearlas suponiendo que el movimiento se verificará en el sentido opuesto.

Como siempre, debemos comparar nuestros resultados con otros ya conocidos o con situaciones cuya solución es fácil de obtener.

Si el ángulo es $\theta = \pi/2$, entonces la aceleración está dada por:

$$a = g\frac{M - m}{M + m},$$

el mismo resultado obtenido para el sistema de las dos masas con una polea resuelto anteriormente.

Si $m = 0$, entonces $T = 0$ y $a = g$, que es lo esperado puesto que M estaría en ese caso en caída libre.

Si M = 0, entonces tenemos dos posibilidades: la masa m se desliza plano abajo o se queda en reposo. Esta situación es un caso particular de un ejemplo más complicado que discutimos a continuación.□

Ejemplo

Suponga conocido el coeficiente de fricción estática entre la masa m y la superficie del plano inclinado, en la misma configuración estudiada en el ejemplo anterior.

Encuentre el rango de valores de m para el cual el sistema permanece en reposo.

En el ejemplo anterior supusimos que el peso de la masa M lo hacía caer, arrastrando consigo a la masa m.

Ahora debemos considerar otra posibilidad: si m aumenta su valor puede primero, detener el movimiento en el sentido indicado en el ejemplo anterior y, si m sigue aumentando, quedar a punto de levantar la masa M.

Estudiemos ambos límites en forma separada.

a) *El valor mínimo de m para que el sistema permanezca en reposo.*

Como no hay movimiento, debemos usar el valor del coeficiente de fricción estática. Este apunta hacia el vértice inferior del plano inclinado. La masa M se encuentra a punto de caer.

Conservando el convenio de signos del ejemplo anterior, el diagrama de cuerpo libre nos da la siguiente ecuación:

$$0 = -f_{\text{roce est.}} + T - m\, g\, sen\, \theta.$$

Como no existe aceleración, el diagrama de cuerpo libre para M es directo: $T = M\, g$.

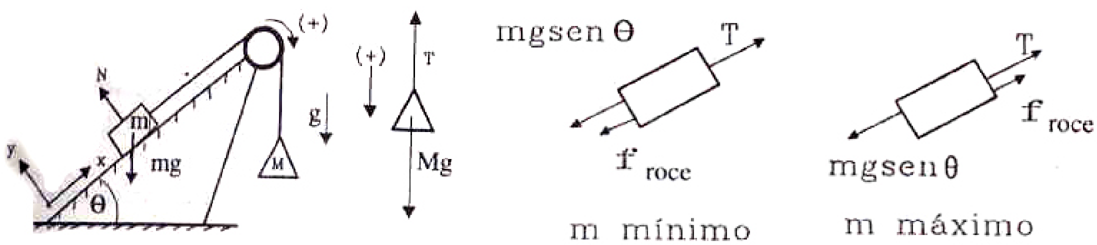


Figura IV.31: La fuerza de roce se opone al inicio del movimiento hasta que alcanza un valor límite igual a μN. En el primer caso apunta hacia el vértice inferior del plano (m mínimo). En el segundo caso invierte su sentido.

También, como estamos analizando el caso en el que m es *mínimo*, la fuerza de roce debe alcanzar su mayor valor: $f_{\text{roce est.}} = \mu\, m\, g\, \cos\,\theta$, puesto que $m\, g\, \cos\,\theta$ es la fuerza normal que actúa sobre el plano. Reemplazando en la ecuación anterior, se obtiene:

$$0 = -\mu\, m\, g\, \cos\,\theta + M\, g - m\, g\, sen\,\theta,$$

$$m_{\text{mínima}} = \frac{M}{\cos\,\theta\,[\mu_e + \tan\,\theta]}.$$

Siempre existe un valor finito de m que puede sostener la masa M. El coeficiente de roce estático μ_e, contribuye a disminuir el valor mínimo de m necesario para sostener M.

Si $\theta = \pi/2$, entonces $m = M$ es la única solución, puesto que en este caso la fuerza normal sobre el plano es nula y por lo tanto no hay roce.

b) *El valor mínimo de m para iniciar el movimiento del sistema.*

El diagrama de cuerpo libre es similar al anterior con la excepción del sentido que adopta la fuerza de roce estático. Como el cuerpo m está a punto de comenzar a deslizar hacia abajo, la fuerza de roce apunta hacia el vértice superior del plano inclinado. Conservando la convención de signos del caso anterior, tenemos:

$$0 = +\mu\, m\, g\, \cos\,\theta + M\, g - m\, g\, sen\,\theta,$$

$$m_{\text{máximo}} = \frac{M}{\cos\,\theta\,[\tan\,\theta - \mu_e]}.$$

Este resultado tiene sentido sólo si $\mu_e < \tan\,\theta$: la masa m no puede ser negativa.

El caso $\mu = \tan\,\theta$ cobra sentido si $M = 0$. Este refleja la situación en la cual m permanece en reposo debido únicamente a la fricción estática con el piso.

En resumen, el sistema permanecerá en reposo si la masa m toma un valor entre:

$$\frac{M}{\cos\theta\,[\tan\theta - \mu_e]} \geq m \geq \frac{M}{\cos\theta\,[\tan\theta + \mu_e]}.\square$$

Cuando usamos μ_e siempre debemos tener presente que:

El roce estático responde a cualquier fuerza externa con la misma fuerza en dirección y magnitud pero, en sentido opuesto. Si la fuerza externa aumenta en intensidad, la fuerza de roce estático también lo hace hasta alcanzar un valor máximo.

Si la fuerza aplicada es mayor que este valor máximo, el cuerpo comienza a moverse, en cuyo caso debemos usar el coeficiente de roce cinético y poner la fuerza de roce en sentido opuesto a la dirección del movimiento.

Ejemplo

Obtener el valor *mínimo* de la fuerza F_0 para que m no deslice por el borde del bloque M (Figura [IV.32]).

Suponga conocidos los valores del coeficiente de roce estático entre ambos bloques, $\mu_{1\,e}$, el roce cinético entre la masa M y el piso $\mu_{2\,c}$, y los valores de las masas m y M, que se indican en la Figura [IV.32].

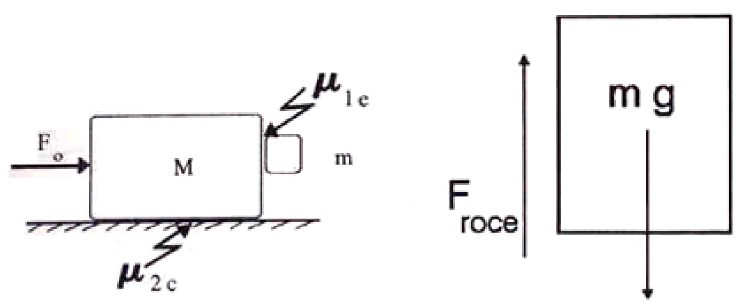


Figura IV.32: Aquí debemos aplicar una fuerza de reacción normal (en este caso una fuerza horizontal) de una magnitud tal que la fuerza de roce estático, no permita caer al bloque m. Se acompaña el diagrama de cuerpo libre de la masa m.

Comenzamos examinando la componente horizontal de las fuerzas que actúan sobre todo el sistema (las masas M y m) para obtener una ecuación para F_0. Junto a ella aparece la aceleración a_0, que tampoco conocemos. (Dos incógnitas y una ecuación),

$$F_0 - \mu_{2\,c}(M+m)g = (M+m)a_0.$$

Para obtener más ecuaciones debemos analizar el diagrama de cuerpo libre de m. Su componente horizontal da la siguiente ecuación:

$$R = m\,a_0,$$

donde $\vec{R}$ es la fuerza que ejerce el bloque M sobre m. Incluimos otra ecuación, pero ésta trajo una nueva incógnita: R.

La ecuación de Newton para la componente vertical envuelve al roce estático, sin embargo como nos piden el *valor mínimo* de la fuerza F_0 para que m no caiga, usamos entonces *el valor máximo de la fuerza de roce*. La ecuación es:

$$\mu_{1\,e}\,R - m\,g = 0.$$

Aquí hemos supuesto, al igual que en la ecuación anterior, que la masa m no se desliza, y por esta razón hemos podido usar $(M+m)\,g$, como la fuerza normal actuando sobre el piso . Si la masa m estuviera cayendo, la fuerza normal sobre el piso sería $M\,g + \mu_{1e}\,R$. En otras palabras, $\mu_{1e}\,R$ es igual a $m\,g$, sólo si la aceleración de la masa m es nula.

Volviendo a nuestro problema: ahora tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas: R, a_0 y F_0. Podemos entonces resolver el problema.

Despejando a_0 de las dos primeras ecuaciones, tenemos:

$$a_0 = \frac{g}{\mu_{1\,e}},$$

reemplazando este valor en la última ecuación, obtenemos:

$$F_0 = (M+m)\cdot g \cdot \left[\mu_{2\,c} + \frac{1}{\mu_{1\,e}}\right].$$

Verifiquemos si esta ecuación reproduce los resultados esperados en los casos límites. Si $\mu_{1\,e}$ es muy pequeña, la fuerza para mantener m en su lugar, debe ser apreciable, tal como se desprende de las ecuaciones.

También se puede observar que si no existe roce entre el piso y el bloque: $\mu_{2\,c} = 0$, entonces necesitamos una fuerza F_0 menor para mantener el bloque de masa m en reposo.

Ejemplo

Un bloque se desplaza con una *velocidad constante* V_1 sobre un plano horizontal bajo la acción de una fuerza F_1, también constante. El coeficiente de roce cinético entre ambas superficies es μ_c.

En un cierto instante le damos un golpecito lateral y posteriormente le aplicamos una fuerza constante F_2 –sin dejar de aplicar la fuerza F_1–, de forma que adquiera una componente *adicional* de velocidad V_2, *constante* y perpendicular a V_1.

Calcule el valor de la fuerza F_2 necesaria para comunicar al bloque esta velocidad adicional V_2. Suponga V_1 y V_2 conocidos.

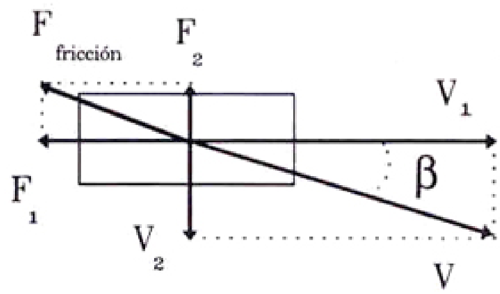


Figura IV.33:

Como el bloque se mueve con velocidad constante, la fuerza que debemos ejercer: $F_1 + F_2$, para mantener el movimiento debe ser constante, y su dirección y sentido, coincidir con el vector suma de velocidades $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$.

En cuanto a su magnitud, ésta debe ser la misma que la fuerza de roce cinético $\vec{f}$ pero, obviamente, en sentido opuesto.

Para mantener la velocidad constante las fuerzas F_1 y F_2 deben tomar los siguientes valores:

$$F_1 = f_{\text{cinética}} \cos\beta, \quad \text{y} \quad F_2 = f_{\text{cinética}} \operatorname{sen}\beta.$$

De la figura sabemos que $\tan\beta = \frac{V_2}{V_1}$ y de la trigonometría usamos la siguiente igualdad:

$$sen\,\beta = \frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}, \qquad \text{de aquí tenemos:}$$

$$F_2 = f_{\text{cinética}} \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}.$$

Si la velocidad V_2 es muy pequeña, entonces $sen\,\beta \approx \tan\beta$, y reemplazando el valor de la fuerza de fricción, obtenemos:

$$F_2 = \mu_c\, M\, g\, \frac{V_2}{V_1}.$$

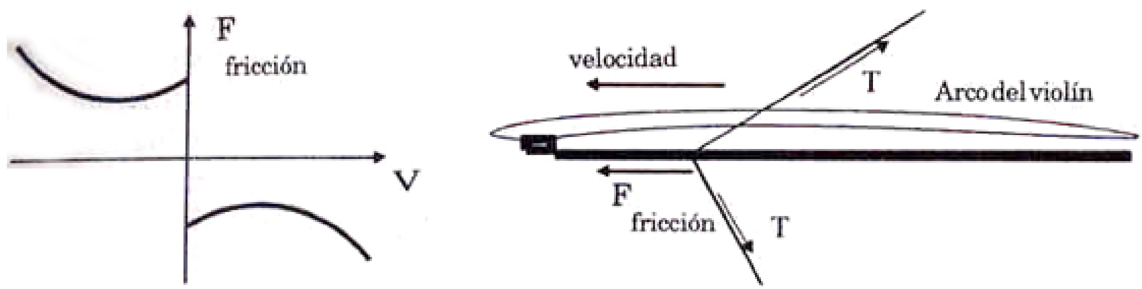


Figura IV.34:

M es la masa del bloque, la que suponemos conocida.□

Es interesante analizar este resultado. Si la velocidad V_2 es muy pequeña comparada con V_1, entonces F_2, la fuerza necesaria para desviar a un objeto que resbala en la dirección de la velocidad V_1 es también pequeña.

Una aplicación de este resultado ocurre cuando intentamos sacar un clavo sin usar una herramienta. En ese caso se dobla el clavo y se tira haciéndolo girar permanentemente de lado a lado. Esta acción se realiza entonces exclusivamente para disminuir la fuerza necesaria para extraer el clavo de acuerdo al resultado obtenido en el último ejemplo.

Conviene analizar con espíritu crítico esta afirmación. Obviamente el hecho de girarlo genera un aumento de la temperatura entre el clavo y la madera y también un cierto desgaste que facilita la extracción. Con estos comentarios, es evidente que el resultado obtenido depende de otros parámetros que no se consideraron en el último ejemplo. Sin embargo, es interesante plantear y analizar esta situación, dado que es un truco al que se recurre en muchas ocasiones, por ejemplo, al instalar una conexión en una manguera de regadío.

Dependencia de la fuerza de fricción en la velocidad.

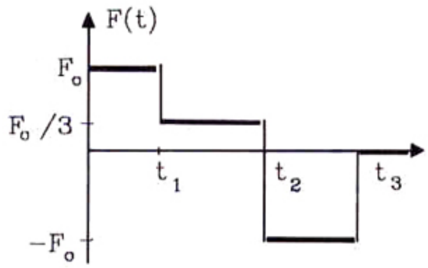
Esta dependencia es de gran importancia práctica. Es de interés conocerla en los casos de corte de metales, velocidad de los proyectiles, en la industria automotriz...etc.

La investigación en esta área encuentra muchas dificultades técnicas. Un ejemplo es el caso de una bala viajando por el cañón. Los experimentos han demostrado que la fuerza de fricción disminuye a medida que aumenta la velocidad, en forma rápida al comienzo y más lentamente después. A velocidades de alrededor de 100 m/s la fuerza de fricción comienza a aumentar con la velocidad. Esta dependencia se incluye en la Figura. La fricción resulta ser proporcional al cuadrado de la velocidad.

Esta misma dependencia de la fuerza de fricción en la velocidad ocurre entre una cuerda de violín y su arco y es la razón que sea posible escuchar sus acordes.

Una explicación cualitativa de este fenómeno y de otros más, aparece en la revista *Quantum*, en el número 6 de 1992. Una explicación más detallada del movimiento entre el arco y la cuerda del violín se puede encontrar en el libro: *Instrumentos Musicales: Artesanía y Ciencia*, H. Massmann y R. Ferrer, Dolmen, 1993, pags.158–162.

IV.6. EJERCICIOS



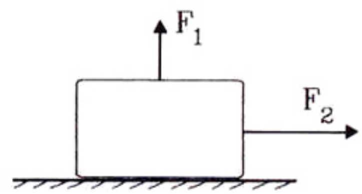


Figura IV.35: Problema # 1 Problema # 2

1.– Un objeto se encuentra sobre un plano liso, sin roce y es sometido a una fuerza $\vec{F}$ que varía en función del tiempo de acuerdo al gráfico que se acompaña. Si la masa del objeto es m, obtenga:

i) Aceleración del objeto en función del tiempo. (Graficar).

ii) Velocidad de esta masa, si parte inicialmente del reposo (Graficar).

iii) Posición del objeto en función del tiempo, si parte del origen.

2.– Sobre un plano sin roce se encuentra un objeto de masa $m = 2$ kg. Sobre él actúan dos fuerzas $\mathrm{F}_1 = 3\,\mathrm{N}$ y $\mathrm{F}_2 = 6\,\mathrm{N}$ como muestra la Figura. Encuentre:

a) El vector aceleración del objeto.

b) Dirección, sentido y magnitud de su velocidad en función del tiempo, si parte del origen.

3.– Un bloque de masa m se suelta desde el reposo en un plano inclinado sin roce.

a) Encuentre la aceleración del objeto.

b) Analice todas las fuerzas que actúan sobre él, indicando su valor.

4.– Sobre una superficie lisa se pretende tirar el carrito de masa m que se muestra en la Figura, de modo que no se despegue del suelo.

Para las dos situaciones señaladas en la Figura, obtenga el valor de las fuerzas que actúan sobre el carro y compare el resultado.

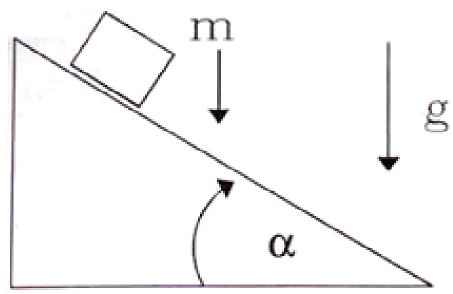
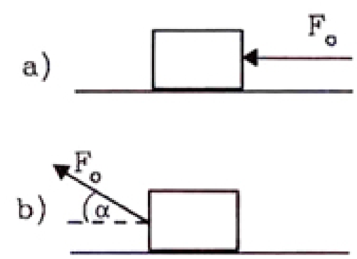


Figura IV.36: Problema # 3



Problema # 4

5.– Una locomotora tiene motores que la impulsan con una fuerza F_o y posee masa M. A ella se une un vagón de masa m. Si el conjunto se mueve por un riel de roce despreciable, determine:
a) Aceleración del sistema.

b) Fuerzas que actúan sobre la locomotora y el vagón.

c) Tensión de la barra que une ambos objetos.

6.– Una locomotora de masa M, que arrastra un carro de masa m y se autopropulsa con una fuerza F_o, avanza por un plano inclinado con pendiente α.

Calcule:

a) La aceleración del sistema.

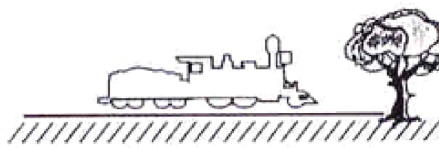
b) Las fuerzas que actúan sobre la locomotora y el vagón.

c) La tensión de la barra que une ambos objetos.

7.– Un pintor que pesa 900 Newton trabaja en una silla colgante en un edificio de altura. Al terminar su turno debe volver al último piso para bajar a la calle. Para subir con la silla tira de la cuerda de tal forma que la fuerza que él ejerce sobre el asiento de la silla es de 500 Newton. La silla misma pesa 300 Newton.

a) ¿Cuál es la aceleración del pintor y la silla?

b) ¿Cuál es la fuerza total sobre el soporte de la polea?



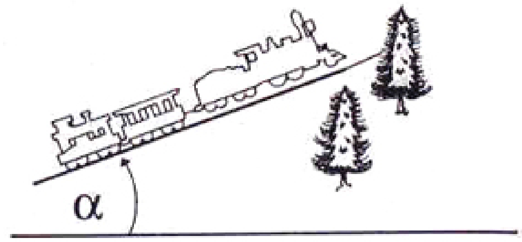
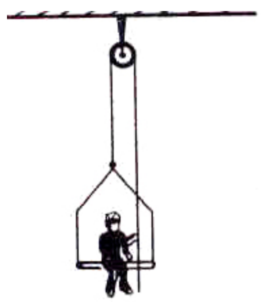


Figura IV.37: Problema # 5 Problema # 6



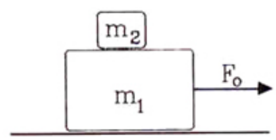


Figura IV.38: Problema # 7 Problema # 8

8.– Un cuerpo de masa $m_1 = 100$ kg es arrastrado a lo largo de una superficie sin roce con una fuerza F_0, de modo que su aceleración es de 6 m/s^2 respecto al suelo.

El cuerpo $m_2 = 20$ kg se desliza por sobre el cuerpo de 100 kg, con una aceleración de 4 m/s^2, referida al piso.

a) ¿Cuál es la fuerza de roce ejercida por la masa m_1 sobre m_2?

b) ¿Cuál es la fuerza neta sobre el cuerpo de masa 100 kg?

c) ¿Cuál es el valor de $\vec{F_0}$?

d) Después que el cuerpo de 20 kg se desliga del cuerpo de 100 kg. ¿Cuál es la aceleración del cuerpo de 100 kg?

e) ¿Cuál es el coeficiente de roce cinético entre los bloques?

9.– Un auto se aproxima a una pendiente con una velocidad V_0. Justo al comenzar la pendiente, el auto prosigue sólo con el impulso inicial. Suponiendo que el roce con el camino y el viento es despreciable, encuentre la altura máxima h que logrará alcanzar con esta velocidad.

10.– Suponga que N masas iguales de m (kg) cada una, cuelgan unidas mediante una cuerda. Determine la tensión de la cuerda ideal (sin masa) que une el cuerpo k–ésimo con el $(k-1)$–ésimo. Verifique su resultado para N = 2.

11.– Una pelota de 2 kg cae libremente y en un cierto instante tiene una rapidez de 6 [m/s]

a) ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5[m]?

b) ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5[s]?

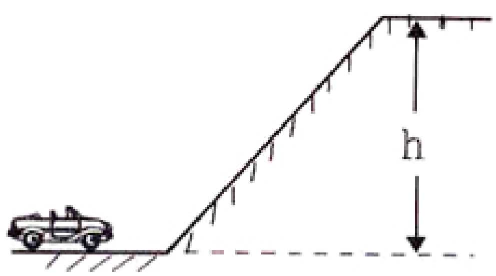
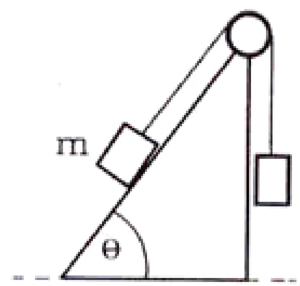


Figura IV.39: Problema # 9



Problema # 12

12.– Dos bloques de masa m y M están unidos por una cuerda y una polea ideales. Cuando se colocan en la posición indicada en la Figura (m sobre el plano inclinado, liso y M colgando verticalmente), el cuerpo de masa m, sube con una aceleración cuya magnitud es 29/5 [m/s^2].

Si a continuación se invierten las posiciones (M se coloca sobre el plano y m cuelga verticalmente) el cuerpo de masa M también sube pero con aceleración de magnitud 9/10 [m/s^2]. Determine:

a) El valor de θ.

b) La razón entre las masas: m/M.

c) ¿Qué ocurriría si no despreciáramos el roce?

13.– Se desea tirar un carrito de masa m sobre una superficie rugosa (de coeficiente de roce cinético μ), como muestra la Figura.

Calcule el valor de la fuerza con que se tira el carro en función del ángulo θ de la figura, si se quiere que el carro se mueva con rapidez constante.

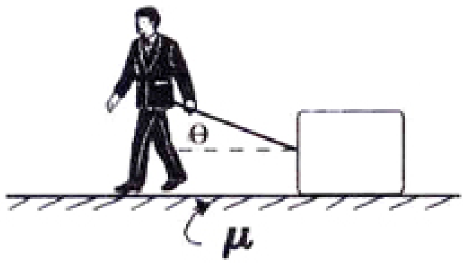
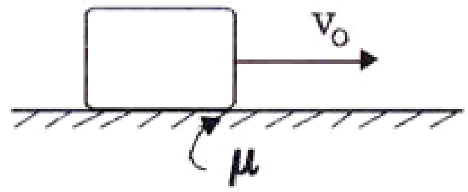


Figura IV.40: Problema # 13



Problema # 14

14.– Un objeto de masa m se mueve con velocidad V_0 sobre una superficie rugosa que posee coeficiente de roce cinético μ.

a) Obtenga la aceleración del objeto.

b) ¿Cuánto tarda en detenerse?

15.– El bloque B de masa m parte del reposo desde el extremo superior del plano inclinado, que permanece fijo a la Tierra. Después de bajar una distancia D, el cuerpo lleva una velocidad igual al 50 % de la velocidad que hubiera adquirido si el roce con el plano fuera nulo.

Encuentre una expresión para el coeficiente de roce μ entre el plano y la masa B, en función de θ.

16.– Un objeto de masa m se encuentra en reposo sobre un plano rugoso (de coeficiente de roce estático μ_e y cinético μ_k). Se intenta moverlo aplicando una fuerza que forma un ángulo θ con la horizontal.

Encuentre el tamaño de la fuerza mínima (F_{min}) que es necesario realizar para mover el objeto.

17.– La cuña lisa de masa M, se desliza bajo la acción de una fuerza horizontal F. Sobre ella se coloca un bloque de masa m.

a) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas.

b) Determine el valor que debe tomar la fuerza aplicada F, para que el bloque más pequeño no resbale sobre la cuña. Suponga que no existe roce entre los bloques.

c) Ahora considere la existencia de roce sólo entre ambos bloques. (No existe roce entre la cuña y el piso). Calcule el valor máximo y el mínimo que debe tomar F, para el bloque no resbale sobre la cuña. Suponga los coeficientes de roce estático y cinético conocidos.

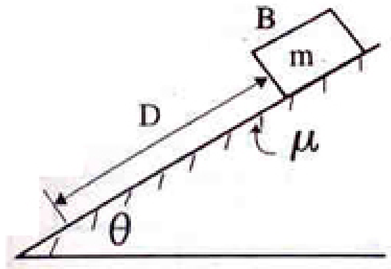
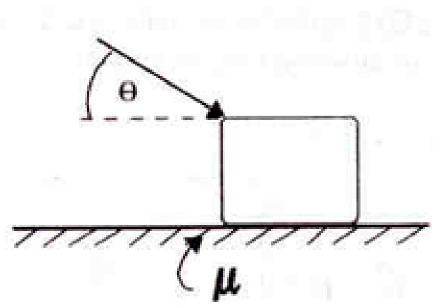


Figura IV.41: Problema # 15



Problema # 16

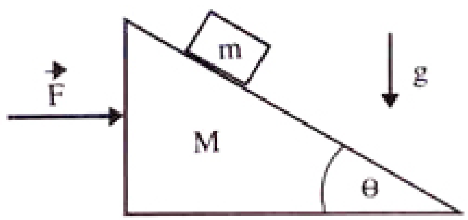
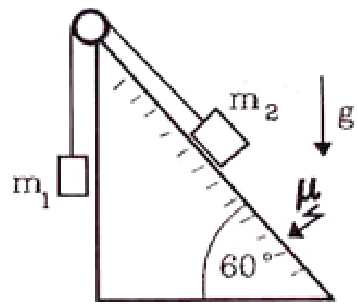


Figura IV.42: Problema # 17



Problema # 18

18.– El plano inclinado de la Figura forma un ángulo de 60° con la horizontal y es rugoso.

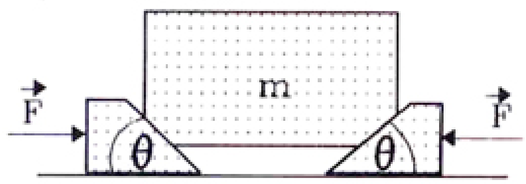
El bloque m_1 y el bloque m_2 se encuentran detenidos, obtenga el valor de la tensión de la cuerda y la fuerza de roce.

19.– Las fuerzas $\vec{F}$ aplicadas a cada bloque impiden que baje la cuña de masa m. Calcule el valor de la fuerza F, suponiendo que el roce entre las superficies es despreciable.

20.– Se tiene una tabla de masa M y sobre ella un paquete de masa m. Sobre dicho paquete se aplica una fuerza F. Entre la tabla y el suelo existe un coeficiente de roce μ_1 y entre el paquete y la tabla el coeficiente es μ_2.

¿Qué inclinación debemos darle a la fuerza F de modo que la tabla esté a punto de moverse cuando el paquete sobre la tabla comience a moverse?

21.– El plano inclinado forma un ángulo de 60° con la horizontal. Está fijo a la Tierra y posee un coeficiente de roce cinético μ. El bloque m_1 desciende con una *aceleración*



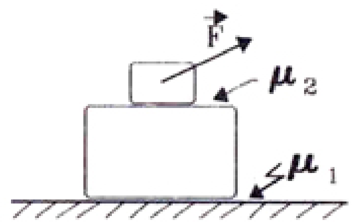


Figura IV.43: Problema # 19 Problema # 20

cuyo valor es la mitad del valor que tendría en el caso que no consideráramos el roce entre las superficies. Calcule el coeficiente de roce cinético si $m_1 = 2\,m_2$ y confeccione un diagrama de cuerpo libre para ambas masas.

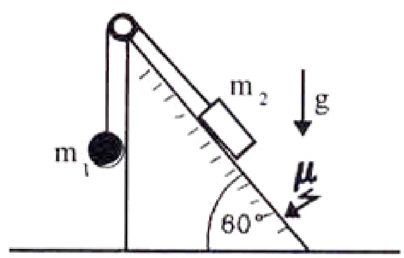


Figura IV.44: Problema # 21

22.– Un paquete de masa m, se mueve con rapidez V_0 sobre una superficie sin roce y al final de su camino logra entrar en el tablero horizontal de un trineo de masa M, que se puede mover sin roce sobre el hielo. El coeficiente de roce entre el paquete y el trineo es μ. El paquete se desliza sobre el trineo hasta que finalmente queda en reposo, *con respecto a éste.*

a) ¿Cuál es la velocidad del conjunto, una vez que el paquete queda en reposo con respecto al trineo?

b) ¿Cuánto tiempo demora el paquete, en quedar en reposo con respecto al trineo?

c) ¿Qué distancia recorre la masa m sobre M antes de detenerse sobre ella?

Indicación: Cuando el paquete desliza sobre el trineo su aceleración es distinta a la del trineo.

23.– Dos masas m y M se encuentran unidas por una barra de masa despreciable y largo ℓ. En estas condiciones ambas realizan un movimiento circular uniforme en torno al centro de masa del sistema, con frecuencia f.

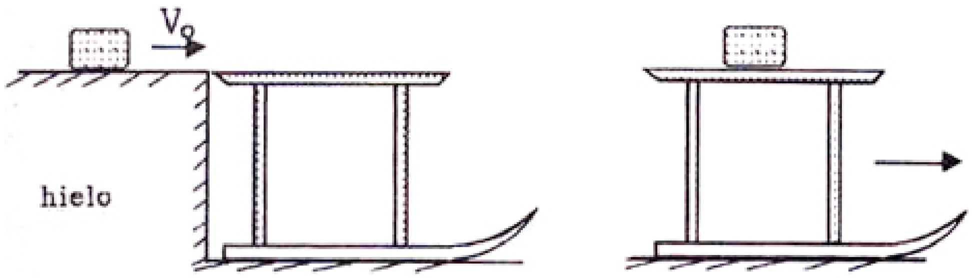


Figura IV.45: Problema # 22

Calcule la tensión en la barra que une ambas masas.

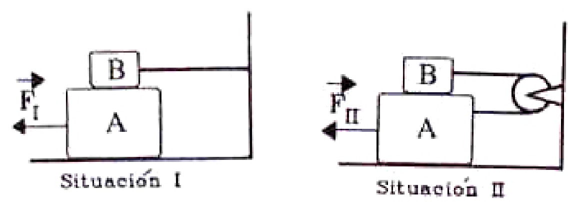


Figura IV.46: Problema # 23 Problema # 24

24.– Con dos bloques A y B, se arman las configuraciones I y II que se indican en la Figura. Las cuerdas y poleas que se usan tienen masas despreciables y las masas m_A y m_B cumplen la siguiente relación: $m_A = 2m_B$.

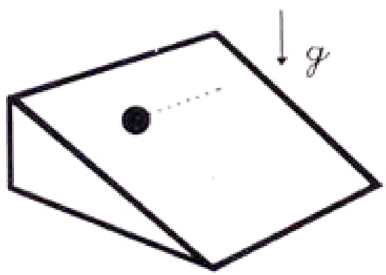
La magnitud de las fuerzas aplicadas F_I y F_{II} es tal que el bloque A se mueve con velocidad constante en ambas situaciones. Calcule el cuociente entre el módulo de F_I y F_{II}.

El coeficiente de roce es constante, vale μ y es el mismo entre todas las superficies en contacto.

25.– Un pequeño cubo de masa m se ubica sobre un plano inclinado con un ángulo α. El coeficiente de fricción cinética entre el cubo y la superficie es $\mu_c = 2 \tan \alpha$.

Encuentre el mínimo valor de la fuerza *horizontal* que es necesario aplicar para comenzar a mover el cubo.

26.– Una masa m se desliza sobre una mesa sin roce, conectada a una masa M que cae por un borde de la mesa. Ambas están conectadas a través de las poleas, de masa



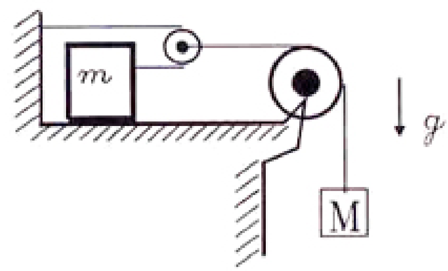


Figura IV.47: Problema # 25 Problema # 26

despreciable, que se muestran en la Figura.

a) Encuentre la aceleración de cada una de las masas.

b) Encuentre la tensión en las cuerdas.

27.– Una cuerda sin masa cuelga sostenida desde sus extremos separados por una distancia D. A esta cuerda se le añaden cuatro masas iguales m, a una distancia ℓ entre ellas. La cuerda forma un ángulo θ_1 en los extremos y, entre las dos masas centrales, permanece horizontal, formando un ángulo θ_2 con sus vecinos. Calcule la tensión en cada tramo de la cuerda, en función de θ_1, m y g. Encuentre el valor del ángulo θ_2.