# Appendix C

# SOLUCION DE ALGUNOS EJERCICIOS PROPUESTOS

## CAPITULO I

I.1 )

$$\begin{array}{llllllll}
a) & c=17 & ; & \operatorname{sen} A=0,47 & ; & \cos\, A=0,88 & ; & \tan\, A=0,53, \\
b) & a=2,65 & ; & \operatorname{sen} A=0,80 & ; & \cos\, A=0,60 & ; & \tan\, A=1,33, \\
c) & \sqrt{p^2+q^2} & ; & \operatorname{sen} A=\dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} & ; & \cos\, A=\dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} & ; & \tan\, A=p/q.
\end{array}$$

I.2 )

$$\begin{array}{llllllll}
a) & b=4,90 & ; & \operatorname{sen} B=0,70 & ; & \cos\, B=0,71 & ; & \tan\, B=0,98, \\
b) & a=12 & ; & \operatorname{sen} A=0,38 & ; & \cos\, B=0,92 & ; & \tan\, B=0,42, \\
c) & c=10 & ; & \operatorname{sen} B=0,8 & ; & \cos\, B=0,6 & ; & \tan\, B=1,33.
\end{array}$$

I.3 ) b = 13,42.

I.4 ) a = 9 ; c = 9,33.

I.5 )

$$\begin{aligned}
\tan(30-x) &= \cot(30+3x)=\tan(90-30-3x)=\tan(60-3x) \\
&\Rightarrow 30-x=60-3x+n\,\pi\ ,\ \text{pero}\, x\, \text{es agudo} \Rightarrow n=0, \\
&\phantom{\Rightarrow}\ 30-x=60-3x\ \Rightarrow\ x=15^\circ.
\end{aligned}$$

I.6 )

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2\,A &= \cos\,3\,A &&= \operatorname{sen}(90-3A),\quad A\,\text{es agudo} \\
&\Rightarrow\ 2\,A &&= 90-3A \Rightarrow A=18\,,\ B=72.
\end{aligned}$$

I.7 )

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4\,a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,,$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \tan A = \frac{1}{2}.$$

I.8 ) c = 50 ; B = 60° ; b = 43,30.

I.9 ) a = 15 ; A = 45° ; c = 21,21.

I.10 ) 1 para $\forall$ A.

I.11 ) $\cos 60^\circ = 0{,}588$; y $2\cos^2 30^\circ - 1 = 0{,}588$.

Usando la relación del ángulo doble: $\cos 2\,\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

I.12 ) a) $\cot 60^\circ$, b) $\operatorname{sen} 70^\circ$, c) $\csc 9^\circ$, d) $\cos 56^\circ\,27'$, e) $\sec 17^\circ\,42.6'$.

I.13 ) a) $30^\circ$, $150^\circ$ b) $120^\circ$, c) $45^\circ$, $225^\circ$, d) $-30^\circ\,(330^\circ)$, $150^\circ$, e) $60^\circ$; $-60^\circ\,(300^\circ)$.

I.14 )

$$\begin{array}{rcl} \cos A &=& \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 A} \quad ; \quad \csc A \;=\; 1/\operatorname{sen} A\,;\ \sec A = 1/\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 A}\,, \\ \tan A &=& \dfrac{\operatorname{sen} A}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 A}} \quad ; \quad \cot A \;=\; \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 A}}{\operatorname{sen} A} \end{array}$$

I.15 )

$$\begin{array}{rcl} \cos A &=& \sqrt{1-1/\csc^2 A} \quad ; \quad \operatorname{sen} A = 1/\csc A\,; \\ \sec A &=& 1/\sqrt{1-1/\csc^2 A} \quad ; \quad \tan A = \csc A\,\sqrt{1-1/\csc^2 A}. \end{array}$$

I.16 ) $c^2 = 5\,a\,b/2 = a^2+b^2 \Rightarrow \dfrac{5}{2} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \tan A + \dfrac{1}{\tan A} \Rightarrow \dfrac{5}{2}\tan A = \tan^2 A + 1.$

$$\tan A = \begin{cases} 2 & \rightarrow \quad A = 63{,}43^\circ, \\ 1/2 & \rightarrow \quad A = 26{,}57^\circ. \end{cases}$$

I.17 )

$$\begin{array}{ll} a)\ \tan x = \operatorname{sen} x/\cos x & e)\ \ \operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x\,, \\ b)\ \sec x = 1/\cos x & f)\ \ \tan x = \operatorname{sen} x/\cos x\,, \\ c)\ \cot x = \cos x/\operatorname{sen} x & g)\ \ 2\,[\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x] = 2. \\ d)\ \cos^2 x = 1-\operatorname{sen}^2 x & \end{array}$$

I.18 ) b=$\sqrt{3}$,

| | 0 | 30° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|
| sen | 0 | 1/2 | $\sqrt{3/2}$ | 1 |
| cos | 1 | $\sqrt{3/2}$ | 1/2 | 0 |
| tan | 0 | $1/\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |

I.19 ) $a)\ -\operatorname{sen}\theta,\ b)\ -\operatorname{sen}\theta,\ c)\ \tan\ \theta,\ d)\ \tan\ \theta,\ e)\operatorname{sen}\theta,\ f)\ -\cos\ \theta,\ g)\ +\cot\ \theta$

I.20 ) $\alpha = 35°,\ \beta = 55°,\ a \cdot \tan\ \beta = b = 7,14\,\mathrm{m}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 8,72\,\mathrm{m},$
$\Rightarrow$ altura del árbol $== c + a = 13,72\,\mathrm{m}.$

I.21 ) $\not< ABC = 55°,\ AB = 10\,\mathrm{m},\ AC = AB\ \tan\,(\not<\ ABC)\ = 14,3\,\mathrm{m}.$

I.22 ) $x = \dfrac{30\,\mathrm{m}}{\tan\ 5°} = 342.9\,\mathrm{m}.$

I.23 )

$$\left.\begin{aligned} \tan\ 30° \quad &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2h_1}{d} \\ \tan\ 60° \quad &= \sqrt{3} = \frac{2h_2}{d} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{3}.$$

I.24 )

$$\tan\ 10° = \frac{y}{200+x},\ \tan\ 15° = \frac{y}{x}\ \Rightarrow \quad 200\ \tan\ 10° = x\,(\tan\ 15° - \tan\ 10°)$$

$$\Rightarrow\ x = 384.9\,\mathrm{m},\ \ y = 103.13\,\mathrm{m}$$

I.25 )

$$R_{\text{circunscrito}} = a, \quad R_{\text{inscrito}} = \sqrt{a^2 - a^2/4} = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\bigotimes_{\text{circ}} = \pi\, a^2, \qquad \bigotimes_{\text{inscr.}} = \frac{3}{4}\,\pi\, a^2,\ Area_{\text{hex}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

I.26 )

Mismo lado: $AO = h\ \cot\ \alpha,\ BO = h\ \cot\ \beta,\ AO - BO \equiv \ell,$
$\ell = h(\cot\ \alpha - \cot\ \beta), \quad h = \dfrac{\ell}{\cot\ \alpha - \cot\ \beta}.$

Lado opuesto: $AO + BO = \ell = h(\cot\ \alpha + \cot\ \beta),\ h = \dfrac{\ell}{\cot\ \alpha + \cot\ \beta}.$

I.27 )

| $h$ | 0.01 | 0.1 | $0,5$ |
|---|---|---|---|
| $(1+h)^8$ | $1,082856$ | $2,143588$ | $25,628906$ |
| $1+8\,h$ | $1,08$ | $1,8$ | $5$ |
| error | $0,002856$ | $0,343588$ | $20,628906$ |

I.28 ) b) $\operatorname{sen}\alpha = 0,785,\ \Rightarrow\ \alpha = 128.8^o.$

I.30 )

$$i)\ \text{Como } (k+1) > k \Rightarrow k(k+1) > k^2 \ \Rightarrow \ \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2}, \ \text{entonces:}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2}, \ \text{pero} \left\{ \sum \frac{1}{k^2} \right\} \ \text{converge}, \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \ \text{converge.}$$

$$\text{Otra demostración: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = 1.$$

$$ii) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} = \sum 1 + \sum \left( \frac{1}{k} \right) \Rightarrow \quad \text{diverge,}$$

$$iii) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \ \text{converge,} \quad iv) \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-1} \, \text{diverge.}$$

I.31 )

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 5^o &= 0,0877, \quad 5^o = 0,0877 \, rad., \\ \operatorname{sen} 10^o &= 0,174, \quad 10^o = 0,175 \, rad., \\ \operatorname{sen} 15^o &= 0.260, \quad 15^o = 0,262 \, rad., \\ \operatorname{sen} 20^o &= 0,343, \quad 20^o = 0,349 \, rad. \end{aligned}$$

I.33 )

$$\frac{h}{x_\alpha} = \tan\,\alpha, \ \frac{y}{x_\beta} = \tan\,\beta, \ \text{además } x_\alpha + x_\beta = D = \frac{h}{\tan\,\alpha} + \frac{y}{\tan\,\beta},$$

$$\Rightarrow \quad y = \left( D - \frac{h}{\tan\,\alpha} \right) \tan\,\beta.$$

I.34 )

$$a) \quad \operatorname{sen}(\alpha + \delta) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\,\delta \,+\, \cos\,\alpha \operatorname{sen}\delta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta) - \operatorname{sen}\alpha}{\delta} \ = \ \frac{1}{\delta}\left[\operatorname{sen}\alpha(\cos\,\delta - 1) + \cos\,\alpha \operatorname{sen}\delta\right].$$

$$b) \quad \delta \, << \, 1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\,\delta \approx 1, \qquad \operatorname{sen}\delta \, \approx \, \delta,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\delta) - \operatorname{sen}\alpha}{\delta} \ \approx \ \cos\,\alpha$$

I.36 )

*a*) $\operatorname{sen} 2\alpha \approx 2\alpha - 8\alpha^3/3! + 32\alpha^5/5! - ... \approx 2\alpha,$ pero
$sen\,\alpha \approx \alpha,$ entonces, para una aproximación de orden $\alpha$
$sen\,2\alpha \approx 2\,sen\,\alpha.$

*b*) $\alpha \approx 0,1\,\text{rad}.$

*c*) $i)\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$ converge si $x < 1$,
$\Rightarrow \frac{2}{\beta} < 1 \Rightarrow \beta > 2.$
$ii)\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{2}{\beta^k} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-k} = 2(1 + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\beta^3} + \ldots),$
converge si $\dfrac{1}{\beta} < 1 \Rightarrow \beta > 1.$

*d*) $i)\sum_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{2}{\beta}\right)^k = \dfrac{1}{1-2/\beta} = \dfrac{\beta}{\beta - 2},$
$ii)\ 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\beta}\right)^k = \dfrac{2}{1-1/\beta} = \dfrac{2\beta}{\beta - 1}.$

En d) utilizamos $\sum_k^{\infty} q^k = 1/(1-q).$

I.37 )

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OC}{OA}, \qquad \frac{OB}{OA} = \cos\beta\ , \qquad \frac{OD}{OB} = \cos\alpha\,,$$

$$BD = EC\ , \qquad \frac{AB}{OA} = \operatorname{sen}\beta\ , \qquad \frac{BD}{OB} = \operatorname{sen}\alpha\,,$$

$$OC = OD - CD\ , \qquad \frac{EB}{AB} = \operatorname{sen}\alpha\,,$$

$$CD = EB\,, \qquad \frac{AE}{AB} = \cos\alpha\,,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OD}{OA} - \frac{CD}{OA} = \frac{OB}{OA}\cdot\frac{OD}{OB} - \frac{EB}{OA} = \cos\beta\cos\alpha - \frac{EB}{AB}\cdot\frac{AB}{OA}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\,sen\,\beta$$

I.38 )

$$\frac{\text{día solar - día sideral}}{\text{día sideral}} = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{365,25}.$$

Con estos datos y definiendo la duración del día solar, podemos calcular el día sideral.

I.39 )

$$
\begin{aligned}
a) \quad e^{i\,3\alpha} &= \cos\ 3\,\alpha + i\ \operatorname{sen} 3\,\alpha = (\cos\ \alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^3 = \cos^{\,3}\alpha + \\
&\quad + i\,3\ \cos^2\ \alpha \operatorname{sen}\alpha - 3\ \cos\ \alpha \operatorname{sen}^2\alpha - i\ \operatorname{sen}^3\alpha,\ \Rightarrow \\
\cos\ 3\,\alpha &= \cos^{\,3}\alpha - 3\cos\ \alpha \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^{\,3}\alpha - 3\cos\ \alpha\,(1 - \cos^{\,2}\alpha), \\
&= -3\cos\ \alpha + 4\cos^{\,3}\alpha. \\
b) \quad \cos\ x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm ..., \\
\cos\ 3\alpha &\approx 1 - \tfrac{9}{2}\,\alpha^2.
\end{aligned}
$$

I.40 ) (x,y): coordenadas del punto medio de la barra.

$$
\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{L/2}\,,\ \operatorname{sen}(90-\theta) = \frac{y}{L/2} = \cos\ \theta\,,\Rightarrow\ \operatorname{sen}^2\theta + \cos^{\,2}\theta = 1,
$$

$$
\frac{x^2}{L^2/4} + \frac{y^2}{L^2/4} = 1\,,\Rightarrow x^2 + y^2 = (L/2)^2 \qquad \Rightarrow\ R = L/2\,.
$$

I.41 )

$$
\begin{aligned}
a) \quad \frac{r_n}{n\Delta} &= \tan\ \theta \Rightarrow r_n = n\,\Delta\ \tan\ \theta \\
& \quad r_{n+1} = (n+1)\,\Delta\ \tan\ \theta \\
\text{Vol.} &= \textstyle\sum_{n=1}^{N} \pi\,\Delta \left(\dfrac{n\,\Delta\ \tan\ \theta + (n+1)\,\Delta\ \tan\ \theta}{2}\right)^2, \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\pi\,\Delta^3\ \tan^2\theta}{4}\,(2n+1)^2 = \dfrac{\pi\,\Delta^3\tan^2\theta}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(4n^2+4n+1), \\
\text{Vol.} &= \frac{\pi\,\Delta^3\tan^2\theta}{4}\left(\frac{4}{3}\,N^3 + 4N^2 + \frac{11\,N}{3}\right),\ \text{ pero } N = L/\Delta, \\
\text{Vol.} &= \frac{\pi\ \tan^2\theta}{4}\left(\frac{4}{3}\,L^3 + 4\,L^2\Delta + \frac{11}{3}\,L\,\Delta^2\right). \\
b) \quad & \quad \text{Si }\ \Delta \to 0\ \Rightarrow\ \text{Vol.} = \frac{\pi}{3}\,L^3\ \tan^2\theta.
\end{aligned}
$$

I.42 ) Use la fórmula del problema anterior, con $\theta = 32^o$.

I.43 ) Se establece un sistema coordenado cuyo origen sea un vértice del cubo y cuyos ejes coincidan con las aristas que nacen de este vértice. La ecuación de la diagonal que nace en el origen es: $\vec{d_1} = [1,1,1]$. De las otras dos diagonales, elegimos: $\vec{d_2} = [1,1,-1]$. El módulo de cada uno de estos vectores es $\sqrt{3}$.

$$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = 1 = \sqrt{3}\sqrt{3}\,\cos\alpha, \rightarrow \cos\alpha = 1/3, \Rightarrow \alpha = 70,5^o.$$

I.45 ) Definamos $\alpha$, como el ángulo que subtiende el arco del manto del cilindro que está en contacto con el agua, entonces se cumple la siguiente relación de proporcionalidad:

$$\frac{2\,\pi}{\pi\,R^2\,\ell} = \frac{\alpha}{\text{Vol. buscado}},$$

pero $\cos\alpha = [h-R]/R$, si $h > R$. De aquí obtenemos $\alpha$ y podemos obtener el volumen de la parafina. (R $\equiv$ radio del tambor y $\ell$, su largo).

I.51 )

$$\theta = 7,5^\circ = 0,13\,\text{rad};\ \text{distancia Alejandría–Asuán} \equiv R\,\theta = 800\,\text{km} \equiv s,$$

$$\Rightarrow R = \frac{s}{\theta} = 6153,85\,\text{km}, \quad 2\pi R = 38400\,\text{km}.$$

I.52 )

$$R = 6400\,\text{km} \quad \ell^2 + R^2 = (R+h)^2, \Rightarrow \ell = \sqrt{2\,R\,h + h^2}.$$

$$h_1 = 2\,m \quad \rightarrow \quad \ell_1 = 5059,64\,m,$$

$$h_2 = 20\,m \quad \rightarrow \quad \ell_2 = 16\,km,$$

$$h_3 = 300\,m \quad \rightarrow \quad \ell_3 = 61,97\,km.$$

I.53 )

$$\text{Masa} = \text{Dens.} \times \text{Vol.} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4\pi}{3}\,R^3 D \qquad 1\ m^3 = 1000\ lt,$$

$$D = 1 \rightarrow 10[kg/lt] \quad \Rightarrow \quad D = 1000 \rightarrow 10000\ [kg/m^3]$$

$$M = 1,098 \times 10^{24} \rightarrow 1,098 \times 10^{25}\,[kg].$$

I.54 )

$$d_m \quad \equiv \quad \text{diam. moneda} \qquad \Rightarrow \quad \frac{2}{d_m} = \frac{d_{TL}}{d_{\ell.}}$$

$$\text{con } d_\ell \quad = \quad \text{diam. Luna} \qquad d_{TL} \equiv \text{dist. Tierra–Luna}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d_\ell}{d_{TL}} = \frac{2\,cm}{2\,m} = 10^{-2}.$$

I.55 ) $d_{TL} \equiv$ distancia Tierra–Luna, $D_{ST} \equiv$ Diámetro de la sombra de la Tierra a la distancia en que se ubica la Luna. Sabemos por el enunciado que $D_{ST} = 2,5\, D_L$, donde $D_L \equiv$ diámetro de la Luna.

El cono de sombra de la Tierra, tiene un ángulo $\alpha$ (desconocido) en su vértice. Este ángulo es el mismo que subtiende la Luna vista desde la Tierra. De estos dos hechos obtenemos dos ecuaciones:

$$\frac{x}{D_T} = \frac{x - d_{TL}}{D_{ST}} = \frac{d_{TL}}{D_L},$$

donde x, es la distancia desde la Tierra al vértice de su cono de sombra y la segunda igualdad proviene del cono que subtiende a la Luna vista desde la Tierra. Hemos supuesto que el ángulo en el vértice del cono es el mismo en ambos casos.

$$\Rightarrow x = \frac{d_{TL}\, D_T}{D_L} \;\Rightarrow\; \frac{d_{TL}}{D_L} = \frac{\frac{d_{TL} D_T}{D_L} - d_{TL}}{D_{ST}} = \frac{d_{TL} D_T - d_{TL} D_L}{D_L \cdot 2,5\, D_L},$$

$$\Rightarrow 2,5\, D_L = D_T - D_L,$$

$$D_T = 3,5\, D_L \;\Rightarrow\; \frac{D}{d} = \frac{7}{2} \;\Rightarrow\; d = \frac{2}{7}\, D,$$

$$d = 1828.6\, km \;\Rightarrow\; d_{TL} = 100\, d = 100 \cdot \frac{2}{7}\, D = \frac{200 \times 6400}{7} = 36,6 \times 10^4\, km.$$

I.56 )

$$d_{TS} = \frac{d_{TL}}{\cos\alpha} = 2,1 \times 10^7\, km, \quad v = \omega R = 2\pi f R = \frac{2\pi R}{T} \qquad T = 24\, h,$$

$$v = \frac{2\pi\, d_{TS}}{T} = 5,49 \times 10^6\, km/h.$$

I.57 ) Definimos la distancia de la Tierra a la Luna como $d_{T-L}$. El valor del ángulo del vértice es: $< ACB \equiv 2\gamma$. Aplicando el teorema del seno al $\Delta$ OBC, tenemos:

$$\frac{d_{T-L}}{\mathrm{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{R}{\mathrm{sen}\gamma},$$

pero $\alpha + \beta + x = 180°$ , $\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}x$.

Por otra parte: $x = \gamma + z/2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = x - z/2$, de donde se obtiene que:

$$d_{T-L} = R\, \frac{\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}(x - z/2)}.$$

I.58 )

$$2^x = 3,8 \times 10^{12} \approx 42.$$

I.59 )

$$L = 2\pi R,\; \ell = 2\,\pi\, r = 2\,\pi\, R + 1,\; \Rightarrow\; r = R + h = R + 1/2\,\pi,\; h = 1/2\,\pi = 15,9\, cm.$$

# CAPITULO II

II.1 ) La velocidad promedio es: $\dfrac{90+60}{2} = 75\, km/h.$

La velocidad media:

$$\bar{V} = \frac{2\,L}{\dfrac{L}{60} + \dfrac{L}{90}} = 72 \text{ km/h.}$$

II.2 )

$$\bar{V} = \frac{20}{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{7}} = 78,8 \text{ km/h.}$$

II.6 )

$$\left.\begin{array}{lcl} D_{\text{inicial}} & = & 13\, km, \\ D_B\,(10\,\text{min}) & = & 30\, Km/hr \times 10\,\text{min} = 5\, km, \end{array}\right\} \begin{array}{lcl} D_{\text{paloma}} & = & 8\, km = v \cdot t, \\ t & = & 1/6\, h. \end{array}$$

$\underline{v_{\text{paloma}}\, c/r\, A = 18\, km/h}$ $\qquad \underline{v = 48\, km/h}$ respecto al suelo.

II.7 ) El gráfico corta al eje del tiempo en t = 15 s.

i) $t = (0,5);\ (10,12);\ (12,15),$ ii) $t = (5,10), 12,$ iii) $40\, m.$

II.8 ) i) $t = (0,5);\ (16,25)\, s,$ ii) $t = (5,16)$ iii) $t = 15\, s.$ iv) Area bajo la curva:

$$5 \times 10 + \frac{10+20}{2} \cdot 5 + \frac{20 \times 5}{2} + \frac{2 \times 1}{2} = 50 + 75 + 50 + 1 = 176.$$

II.9 ) En 82 min. a $107\, km/h \Rightarrow d = 146.2\, km$, entre Talca y Concepción.

En 87 min. recorre una distancia de $146,2\, km \Rightarrow v = 100,83\, km/h.$

II.10 )

$$\begin{array}{rclcl} x_t & = & x_o + \dfrac{a\,t^2}{2} & = & d + \dfrac{0,4\,t^2}{2} = d + 0,2\,t^2, \\ x_p & = & 4\,t & \Rightarrow & d + 0,2\,t^2 = 4\,t, \end{array}$$

$$\Rightarrow\ 0,2\,t^2 - 4\,t + d = 0,\ \Rightarrow\ t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 0,8\,d}}{2}.$$

a) Para d = 12 m lo alcanza dos veces: la primera en $t = 3,68s$ –cuando el pasajero tiene mayor velocidad que el tren–, y la segunda vez, cuando el tren lo adelanta, en $t = 16,32$ s.

b) Cuando la raíz cuadrada se cancela, $\Rightarrow 16 = 0,8\, d_c \Rightarrow d_c = 20\, m.$

c)

$$t = 10\, s,\ v = a\,t = 0,4\, m/s,\ < v >= 2\, m/s.$$

II.11 )

$$\frac{v_o}{v_x} = \tan\,\phi \,\Rightarrow\, v_x = \frac{v_o}{\tan\,\phi}$$

II.13 )

$$t_i + t_v = 5\,s, \quad t_i = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad t_v = \frac{h}{v} \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v} \equiv \tau,$$

$$\frac{2h}{g} = \tau^2 - 2\,\frac{\tau\,h}{v} + \frac{h^2}{v^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{v^2}\,h^2 - \left(\frac{2\,\tau}{v} + \frac{2}{g}\right) h + \tau^2 = 0.$$

$$\text{Con } \tau = 5\,s,\; g = 9,8\,m/s^2,\; v = 340\,m/s,\; \Rightarrow\; 8,6\times 10^{-6}\,h^2 - 0,23\,h + 25 = 0,$$

$$h_1 = 109,14, \quad h_2 = 26.635,05. \text{ Verifique qué valor de h, da 5 s.}$$

II.14 ) Siempre ocurre. Las trayectorias del gráfico propuesto en el enunciado siempre se cortan en un punto, lo que indica que el monje estuvo en el mismo lugar y a la misma hora en sus dos viajes.

II.15 )

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{a_A\,t^2}{2},\; a_A = 10\,m/s^2, x_{BO} &= 30\,m, \\ x_B &= x_{BO} - v_B(t-1) \qquad v_B &= 10\,m/s, \end{aligned}$$

$$x_A = x_B \;\Rightarrow = \frac{a_A\,t^2}{2} = x_{BO} + v_B\,1 - v_B\,t, \;\Rightarrow\; d_A = 20\,m,\; d_B = 10\,m,\; t = 2\,s.$$

II.16 )

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{2\,g\,h}, & v_{i1} &= \alpha\sqrt{2g\,h}, \\ h_1 &= [\,\alpha\sqrt{2\,g\,h}\,]^2/2\,g = \alpha^2\,h, & v_{i2} &= \alpha^2\sqrt{2\,g\,h}, \\ h_2 &= \alpha^4\,h, & \Rightarrow h_k &= \alpha^{2k} h, \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad \Rightarrow h_k = h\left(2\frac{1-\alpha^{2(k+1)}}{1-\alpha^2} - 1\right), \quad \text{e)} \quad h_T = h\left(\frac{2}{1-\alpha^2} - 1\right).$$

II.17 ) $d = \dfrac{U\,d}{2\,V_o}$. Choca un número infinito de veces.

II.18 ) a) Con máxima aceleración hasta $v = v_1$ : $x_1 + x_2 + x_3 = L$.

$$\begin{aligned} &x_1 : \text{acelel eración}\, a_1 &&\Rightarrow \frac{v_1^2}{2a_1} = x_1 &&\rightarrow \frac{v_1^2}{a_1} = a_1\,t^2 \;\Rightarrow\; t_1 = v_1/a_1, \\ &x_2 : v = \text{cte.} &&\Rightarrow v_1\,t_2 = x_2, && \\ &x_3 : \text{desaceleración}\; a_2 &&\Rightarrow \frac{v_1^2}{2a_2} = x_3 &&\rightarrow t_3 = v_1/a_2, \end{aligned}$$

$$\frac{v_1^2}{2a_1} + v_1\,t_2 + \frac{v_1^2}{2a_2} = L \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{L}{v_1} - \frac{v_1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1\,a_2}\right),$$

$$\text{Consumo} \;\Rightarrow\; (x_1 + x_2 + x_3)\cdot 2\,q_1 = Q_T = 2\,q_1\,L.$$

b)

$$\begin{aligned} Q_T &= (x_1 + x_3)\,2q_1 + x_2\,q_1, \\ &= v_1^2\,q_1\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1\,a_2}\right) + L\,q_1 - \frac{v_1^2\,q_1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1\,a_2}\right), \\ Q_T &= L\,q_1 + \frac{v_1^2\,q_1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1\,a_2}\right) < 2\,q_1\,L. \end{aligned}$$

II.19 )

$$v_{\text{max}} = a\,T; \qquad x_{\text{total}} = a\,T^2.$$

II.20 ) b) $t = t_o + \dfrac{z_o}{v_o}$.

II.21 ) b) $\dfrac{1 - t^2}{[1 + t^2]^2}$.

II.22 ) b)
i) Para los instantes en que: $\operatorname{sen} t = 1/4$.
ii) $\cos\, t = t/4$.
iv) $a(t) = 4\,\cos\,t$.

II.23 ) De la Figura y la definición de tangente, se tiene que:

$$\frac{d}{d\,\theta}\tan\,\theta = \frac{MB - MC}{\Delta\,\theta} = \frac{BC}{\Delta\,\theta}.$$

$$BC = \frac{AC}{\cos(\theta + \Delta\,\theta)} \approx \frac{AC}{\cos\,\theta}, \;\text{ pero } AC = \Delta\,\theta\,\cdot\,OC = \Delta\,\theta\,\sqrt{1 + MC^2},$$

también, $\tan\,\theta = MC$, de modo que:

$$AC = \Delta\,\theta\,\sqrt{1 + \tan^2\theta} = \frac{\Delta\,\theta}{\cos\,\theta},$$

y reemplazando en la ecuación original, se obtiene el resultado buscado.

II.26 ) La primera piedra demora $\tau$ segundos en tocar el agua con: $\tau = \sqrt{2\,h/g}$. La segunda debe recorrer la misma distancia en $(\tau - 1)$ segundos comenzando con una velocidad inicial $v_o$. De este modo, $v_o$ debe ser tal, que verifique la siguiente ecuación:

$$h = v_o\,(\tau - 1) + \frac{1}{2}\,g\,(\tau - 1)^2,$$

donde se conocen todas la variables excepto $v_o$.

# CAPITULO III

III.1 ) a) $s = R\,\theta = 5 \cdot \dfrac{\pi}{2}$ b) $x = 10$

III.2 )
$$\begin{array}{lrcl} a) & \vec{v} & = & 10\,(\cos\,60\,\hat{\imath} + \text{sen}\,60\,\hat{\jmath})\,[m/s] = 5\,\hat{\imath} + 8,66\,\hat{\jmath} \\ b) & \vec{A} & = & 5\,[\cos\,255\,\hat{\imath} + \text{sen}\,255\,\hat{\jmath}] = -1,29\,\hat{\imath} - 4,83\,\hat{\jmath} \\ c) & \vec{P} & = & 14\,\hat{\imath} - 6\,\hat{\jmath} \end{array}$$

III.3 )
$$\begin{array}{lrcl} \text{Sean} & \vec{A} & = & 2\,(\cos\,45\,\hat{\imath} + \text{sen}\,45\,\hat{\jmath}) = 1,41(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \\ & \vec{B} & = & 2\,(\cos\,30\,\hat{\imath} + \text{sen}\,30\,\hat{\jmath}) = 1,73\,\hat{\imath} + \hat{\jmath} \\ & \vec{A} + \vec{B} & = & 3,14\,\hat{\imath} + 2,41\,\hat{\jmath} \\ & \vec{A} - \vec{B} & = & -0,32\,\hat{\imath} + 0,41\,\hat{\jmath} \end{array}$$

III.4 )
$$\begin{array}{lll} a) \quad \vec{V}_M = \dfrac{(6\,\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath}) - (2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath})}{2 - 0} & = & 2\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} = 2(\hat{\imath} + \hat{\jmath})\,[m/s], \\ b) \quad \vec{V}_M = \dfrac{(13\,\hat{\imath} + 14\,\hat{\jmath}) - (2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath})}{5} & = & 2,2\,(\hat{\imath} + \hat{\jmath})\,[m/s]. \end{array}$$

III.5 )
$$\begin{array}{rcl} \vec{r} & = & 30\,t\,\hat{\imath} + (40\,t - 5t^2)\,\hat{\jmath}\,[m], \\ \vec{v} & = & 30\,\hat{\imath} + (40 - 10\,t)\,\hat{\jmath}\,[m/s], \\ \vec{a} & = & -10\,\hat{\jmath}\,[m/s^2]. \end{array}$$

III.6 ) $\vec{a} = (6\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath})\ [m/s^2]$.
$$\begin{array}{lll} a) & \vec{v} = (6\,t\,\hat{\imath} + 4\,t\,\hat{\jmath}) + \vec{v}_o & \vec{v} = (6\,t\,\hat{\imath} + 4\,t\,\hat{\jmath})[m/s], \\ & \vec{x} = 3\,t^2\,\hat{\imath} + 2\,t^2\,\hat{\jmath} + 10\hat{\imath} & \vec{x} = (3\,t^2 + 10)\,\hat{\imath} + 2\,t^2\,\hat{\jmath}\,[m]. \\ b) & x(t) = 3\,t^2 + 10, & y(t) = 2\,t^2, \\ & \text{despejando t}, & y = \frac{2}{3}\,x + \frac{20}{3}. \end{array}$$

III.7 ) a) $\sqrt{12.500 - 10.000\,\cos\theta}$,
b) $d_A = 50\ m, V_A = 5\ m/s,\ d_B = 100\ m,\ V_B = 20\ m/s.$

III.8 ) a) $\sqrt{200}$, $b)100\,(5\,\sqrt{2} - 1)\ m.$

III.9 ) $d = \sqrt{13 - 2\sqrt{3}}.$

III.10 ) $x = \dfrac{V_o^2\,\text{sen}\,2\theta}{2\,g} - \dfrac{a}{2}; \quad h = x\,\tan\,\theta - \dfrac{g\,x^2}{2\,V_o^2\,\cos^2\theta}.$

III.11 )

$$x = v_o \cos\theta\, t,$$

$$y = v_o \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{g\, t^2}{2} = -600; \quad g = 9,8\, m/s^2,$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v_o \operatorname{sen}\theta \pm \sqrt{v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2\, g\, \cdot 600}}{g},$$

$$t_1 = 38,53\ s, \qquad \Rightarrow x = 3.853[m],$$

$$t_2 = -3,18\ s, \qquad \text{(no tiene interpretación física en este caso).}$$

III.12 ) $v_x = d\sqrt{\dfrac{g\, b}{2\, h\, (b-d)}}; \quad v_y = (2\, b - d)\sqrt{\dfrac{h\, g}{2\, (b-d)\, b}}.$

III.13 )

$$x = v_o t = n\, a \qquad n: \text{ número de peldaños que cae.}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} = -n\, a, \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2\, v_o^2}{g\, a}, \text{aproxime n a un entero.}$$

III.14 )

$$x = t\, v_o \cos\theta, \qquad g = 9,8 m/s^2, \qquad y = -t\, v_o \operatorname{sen}\theta - \frac{g\, t^2}{2} = -400.$$

$$t = \frac{-v_o \operatorname{sen}\theta \pm \sqrt{v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2\, g \cdot 400}}{g},$$

$t_1 = 6,84\, s,$ con significado físico, $t_2 = -14,49\, s,$ sin interpretación.

$x = 296,18[m]$ (lago),

$$\vec{v}_f = v_o \cos\theta\, \hat{\imath} - (v_o \operatorname{sen}\theta + g\, t)\, \hat{\jmath}, \qquad \vec{v}_f = 43,3\, \hat{\imath} - 92,03\, \hat{\jmath}.$$

III.15 ) $x = V_o\, t \cos\alpha = N\, d; \ t = \dfrac{N\, d}{V_o \cos\alpha}; \ y = t\, V_o \operatorname{sen}\alpha - \dfrac{g\, t^2}{2} = -H + h,$

$$N\, d \tan\alpha - \frac{g}{2}\frac{(N\, d)^2}{V_o^2 \cos^2\alpha} = H - h,$$

$$N\, d \tan\alpha - H + h = \frac{g\, N^2\, d^2}{2\, V_o^2 \cos^2\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$V_o = \sqrt{\frac{g\, N^2\, d^2}{2\cos^2\alpha\, (N\, d \tan\alpha + H - h)}} = 14,04 \text{ m/s.}$$

III.16 )
$$\begin{aligned} V_A &= R_A\, w_A & w_A &= 2\, w_B \\ V_B &= R_B\, w_B & \Rightarrow\ V_A &= 2\frac{R_A}{R_B}\, V_B. \end{aligned}$$

III.17 ) El engranaje grande tiene un radio $R$ y el radio del pequeño es $r$. Con $w_R$ nos referimos a la velocidad angular del engranaje de radio $R$, y $w_m$ representa la velocidad angular del motor, a la entrada de la caja de cambios.

$$\begin{aligned} v_{ruedas} &= 30\, km/h = 8,3\, m/s. \quad w_m = 2000\ RPM = 209,44\, rad/s. \\ r_{ruedas} &= 0,5\, m. \end{aligned}$$

$$5\, w_{ruedas} \equiv 5\, w_{rd} = 5\, \frac{V_{rd}}{r_{rd}} = w_R = \frac{r^2}{R^2}\, w_m \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{5\, V_{rd}}{W_m\, r_{rd}}} = 0,396.$$

III.21 ) Suponga que las ruedas giran sin mover al carro. La velocidad angular de las ruedas de radio $R$ es $\omega = V_o/R$.
Definamos $\varphi$ como el ángulo agudo entre la barra de largo $L$ y el eje que une ambas ruedas, y $\theta$ el ángulo del vector OQ con el mismo eje, donde O, es el centro de la rueda que arrastra a la barra.
Sea $x = OP$, entonces aplicando el teorema del seno y del coseno al triángulo $\Delta\ OPQ$, se obtienen dos relaciones que permiten despejar la velocidad de P, $\dot{x}$:

teorema del coseno: $L^2 = R^2 + x^2 - 2\, x\, R\, \cos\, \theta,$

derivando esta expresión: $0 = x\, \dot{x} - 2\, \dot{x}\, R\, \cos\, \theta - 2\, x\, R\, \omega \mathrm{sen}\, \theta.$

Por el teorema del seno: $\dfrac{L}{\mathrm{sen}\, \theta} = \dfrac{R}{\mathrm{sen}\, \varphi}.$

Esta velocidad $\dot{x}$, es la velocidad de P con respecto al punto $O$.
De estas dos ecuaciones podemos despejar $x$, y $\dot{x}$ en función de $t$. Si le sumamos la velocidad del carro, $V_o$, obtenemos la velocidad de $P$ con respecto al piso.

III.22 ) b) Si $V \approx c$, la velocidad de la luz, y $\mathrm{sen}\, \theta \approx \theta$ y $\cos\, \theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$, entonces se encuentra que:

$$V_{\text{aparente}} \approx \frac{2}{\theta} >> c.$$

Los astrónomos han observado objetos –nubes de gas expulsadas por cuasares– que aparentemente se mueven a velocidades mayores que la luz. La explicación es precisamente la dada aquí. No hay objetos que transmitan información a velocidades mayores que la velocidad de la luz.

III.23 ) a) La velocidad tangencial debe ser la misma en ambas poleas.
b) $r_1\, f_1 = r_2\, f_2$.

# CAPITULO IV

IV.1 )

$$F(t)=\begin{cases} F_o & 0<t<t_1,\\ F_o/3 & t_1<t<t_2,\\ -F_o & t_2<t<t_3,\\ 0 & t>t_3. \end{cases} \Rightarrow \vec{a}=\begin{cases} F_o/m & 0<t<t_1,\\ F_o/3m & t_1<t<t_2,\\ -F_o/m & t_2<t<t_3,\\ 0 & t>t_3. \end{cases}$$

$$\vec{v}=\begin{cases} F_o\,t/m & 0<t<t_1,\\[2mm] F_o\dfrac{(t-t_1)}{3m}+F_o t_1/m=\dfrac{F_o}{3m}\,(t+2t_1) & t_1<t<t_2,\\[2mm] \dfrac{-F_o\,(t-t_2)}{m}+\dfrac{F_o\,(t_2-t_1)}{3\,m}+\dfrac{F_o\,t_1}{m}= & \\[2mm] =\dfrac{F_o}{m}(-t+\dfrac{4}{3}\,t_2+\dfrac{2}{3}\,t_1) & t_2<t<t_3,\\[2mm] \dfrac{F_o}{m}\,(-t_3+\dfrac{4}{3}\,t_2+\dfrac{2}{3}\,t_1) & t>t_3. \end{cases}$$

Suponiendo que parte del origen, $x=0,\ t=0:$

$$\vec{x}=\begin{cases} \dfrac{F_o t^2}{2m} & 0<t<t_1,\\[2mm] \dfrac{F_o}{3m}\left(\dfrac{(t-t_1)^2}{2}+2t_1(t-t_1)\right)+\dfrac{F_o t_1^2}{2m} & t_1<t<t_2,\\[2mm] \dfrac{F_o}{m}\left(-\dfrac{(t-t_2)^2}{2}+\dfrac{4}{3}\,(t-t_2)t_2+\dfrac{2}{3}\,t_1(t-t_2)\right)+ & \\[2mm] +\dfrac{F_o}{3m}\left(\dfrac{(t_2-t_1)^2}{2}+2t_1(t_2-t_1)\right)+\dfrac{F_o\,t_1^2}{2\,m} & t_2<t<t_3,\\[2mm] \dfrac{F_o}{m}\left(-t_3+\dfrac{4}{3}\,t_2+\dfrac{2}{3}\,t-1\right)(t-t_3)+ & \\[2mm] +\dfrac{F_o}{m}\,(t_3-t_2)\left(\dfrac{-(t_3-t_2)}{2}+\dfrac{4}{3}\,t_2+\dfrac{2}{3}\,t_1\right)+ & \\[2mm] \dfrac{F_o}{3m}\,(t_2-t_1)\left(\dfrac{t_2-t_1}{2}+2\,t_1\right)+\dfrac{F_o\,t_1^2}{2\,m} & t>t_3. \end{cases}$$

IV.2 ) a) $\vec{F} = m\,\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{a} = 3\,\hat{\imath} + \dfrac{3}{2}\,\hat{\jmath}$; b) $\vec{v} = 3\,t\hat{\imath} + \dfrac{3}{2}\,t\hat{\jmath}$, $\quad v(t=0) = 0$.
$|\vec{v}| = 3\,t\,\sqrt{1 + 1/4} = \dfrac{3}{2}\,t\,\sqrt{5}$.

IV.3 ) a) $a = g\,\mathrm{sen}\,\alpha$; b) El peso y la fuerza normal: $m\,g$ y $N = m\,g\,\cos\,\alpha$, respectivamente.

IV.4 ) a) Se puede aplicar una fuerza $F_o$ arbitraria. b) $F_{o\,\text{máx}} = m\,g/\mathrm{sen}\,\alpha$.

IV.5 ) a) $a = F_o/(M+m)$,

b) Sobre la locomotora: Fuerza Normal, Peso, Tensión y $F_o$. Sobre el vagón: Fuerza Normal, Peso y Fuerza ejercida por la locomotora a través de la barra.

c) $T = m\,F_o/(M+m)$.

IV.6 ) a) $a = \dfrac{F_o - (M+m)\,g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{M+m}$

IV.7 ) a) A partir de los diagramas de cuerpo libre del hombre $T + R - M\,g = m\,a$, y del asiento $T - R - m\,g = m\,a$, se obtiene $a = 20/3\,[m/s^2]$; b) 2000 [N].

IV.8 ) Las ecuaciones de movimiento son: $F_o - f_r = m_1\,a_1$; $\quad f_r = m_2 a_2$.

a) $f_r = 80\,$[N]; b) $\vec{F}_{\text{Neta}} = 600\,\hat{\imath}\,[N]$; c) $F_o = 680$ [N]; d) $a_1 = 6,8\,m/s^2$; e) $\mu = 0,4$.

IV.9 ) $\dfrac{1}{2}\,m v_o^2 = mgh \;\Rightarrow\; h = \dfrac{V_o}{\sqrt{2g}}$.

IV.10 ) La tensión es proporcional al número de cuerpos que cuelgan bajo el punto elegido $\Rightarrow\; T_k = [N - (k-1)]\,m\,g$. Si k = N, $T_N = m\,g$.

IV.11 ) a) $v_f^2 - v_o^2 = 2a\,x \;\Rightarrow\; a = -3,6\,m/s^2$, (hacia arriba) $F - m\,g = m\,a \;\Rightarrow$
$F = m(g+a) = 27,2$ [N].
b)$-a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{6}{5} = 1,2\,m/s^2 \;\Rightarrow\; F = m(g+a) = 22,4\,$[N].

IV.12 ) Las ecuaciones correspondientes a una de las configuraciones son:

$$M\,g - T = M\,a_1, \qquad T - M\,g\,\mathrm{sen}\,\theta = m\,a_1.$$

De aquí se obtiene una ecuación para el ángulo $\theta$,

$$1) \quad \mathrm{sen}\theta = \frac{M\,g - (M+m)\,a_1}{m\,g}.$$

Para la otra configuración se tiene: $m\,g - T' = m\,a_2$, $\quad T' - M\,g\,\mathrm{sen}\,\theta = M\,a_2$, despejando $\mathrm{sen}\,\theta$ de aquí:

$$2) \quad \mathrm{sen}\theta = \frac{mg - (M+m)a_2}{Mg},$$

comparando con la ecuación anterior y despejando $\mathrm{sen}\,\theta$, se obtiene:

$$\left(\frac{H}{m}\right)^2 (g - a_1) + \frac{M}{m}\,(a_2 - a_1) - (g - a_2) = 0 = 4,2x^2 - 4,9\,x - 9,1.$$

a) La solución positiva es: $M/m = 2,17$.
b) $\operatorname{sen}\theta = 0,33 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 19,3°$.
c)

$$\left.\begin{array}{l} T - mg\,\operatorname{sen}\theta - fr = m\,a_1 \\ Mg - T = M\,a_1 \\ f_r = \mu\,mg\,\cos\theta \end{array}\right\} M(g-a_1) - mg(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta) = m\,a_1$$

$$\left.\begin{array}{lcl} mg - T' & = & m\,a_2 \\ T' - Mg\,\operatorname{sen}\theta - f_r' & = & M\,a_2 \\ f_r' & = & \mu\,Mg\,\cos\theta \end{array}\right\} m(g-a_2) - Mg(\operatorname{sen}\theta + \mu\,\cos\theta) = M\,a_2$$

$\Rightarrow$ La razón $M/m$ es la misma, pero para determinar el ángulo se necesita $\mu$ :

$$\operatorname{sen}\theta + \mu\,\cos\theta = 0,33.$$

IV.13 ) $F\operatorname{sen}\theta + N = m\,g$; $F\,\cos\theta = \mu\,N = \mu\,(m\,g - F\operatorname{sen}\theta)$.

$$\Rightarrow \quad F = \frac{\mu\,m\,g}{\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta}.$$

IV.14 ) $f_r = m\,a$; $f_r = \mu\,m\,g \;\Rightarrow\; a = \mu\,g \;\Rightarrow\; t = \dfrac{V_o}{\mu\,g}$.

IV.15 ) $\mu = \dfrac{3}{4}\tan\theta$.

IV.16 ) $F_{\text{mín}} = \dfrac{\mu_e\,m\,g}{\cos\theta - \mu_e\operatorname{sen}\theta}$

IV.17 ) b) Si no hay roce entre los bloques: $F - N_1\operatorname{sen}\theta = M\,a$; $\quad N_1\,\cos\theta = mg$,
$m\,a = N_1\operatorname{sen}\theta = m\,g\,\tan\theta$, $\quad F = (M+m)\,a = (M+m)\,g\,\tan\theta$.
c) Si existe fuerza de roce entre los bloques $f_r$, el desarrollo es el siguiente.
$f_r = \mu\,N_1$,
$m\,a = N_1\operatorname{sen}\theta - f_r\,\cos\theta = N_1\,(\operatorname{sen}\theta - \mu\,\cos\theta)$,
$N_1\,\cos\theta + f_r\operatorname{sen}\theta - m\,g = 0 = N_1(\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta) - m\,g$,

$$a = \frac{g\,(\operatorname{sen}\theta - \mu\,\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta}.$$

Para la masa $M$: $F + f_r\,\cos\theta - N_1\operatorname{sen}\theta = M\,a$, $\quad N_1 = \dfrac{m\,g}{\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta}$,

$$F = \frac{(M+m)\,g\,(\operatorname{sen}\theta - \mu\,\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta}, \qquad \text{Fza. Mínima},$$

$$F = \frac{(M+m)\,g\,(\operatorname{sen}\theta + \mu\,\cos\theta)}{\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta}, \qquad \text{Fza. Máxima}.$$

IV.18 ) $T = m_2\, g\,;\;\; N = m_1\, g\, \cos\, \alpha$,
$T \pm f_r = m_1\, g \,\mathrm{sen}\, \alpha$, dependiendo si $m_1$ tiende a subir o bajar sobre el plano.

IV.19 ) $$f = \frac{m\, g}{2}\, \tan\, \theta.$$

IV.20 ) Bloque $m$, fuerzas horizontales: $F\, \cos\, \theta - f_{r2} = 0$, $\;f_{r2} \equiv \mu_2\, N_2 = \mu_2\, (m\, g - F \,\mathrm{sen}\, \theta) =$
$= F\, \cos\, \theta$.

Componente vertical: $N_2 + F \,\mathrm{sen}\, \theta = m\, g$,

$$\Rightarrow\; F = \frac{\mu_2\, m\, g}{\cos\, \theta + \mu_2 \,\mathrm{sen}\, \theta}.$$

Bloque $M$, fuerzas horizontales: $(*) f_{r2} = f_{r1} = \mu_2\, N_2 = \mu_1\, N_1$.
Fuerzas verticales: $N_1 = N_2 + M\, g = (m + M)\, g - F \,\mathrm{sen}\, \theta$. Reemplazando en la ecuación (*), tenemos: $\mu_2\, (m\, g - F \,\mathrm{sen}\, \theta) = [(m + M)\, g - F \,\mathrm{sen}\, \theta]\; \mu_1 = F\, \cos\, \theta$.

$$\Rightarrow\; F = \frac{\mu_1\, g\, (m + M)}{\cos\, \theta + \mu_1 \,\mathrm{sen}\, \theta} \quad \Rightarrow\; \mu_1\, g\, (m + M)(1 + \mu_2\, \tan\, \theta) = \mu_2\, g m (1 + \mu_1\, \tan\, \theta),$$

$$\Rightarrow \quad \tan\, \theta = \frac{m}{M}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) - \frac{1}{\mu_2}.$$

IV.21 ) Sin roce:

$$-m_2\, g \,\mathrm{sen}\, \theta + T = m_2\, a, \qquad -T + m_1\, g = m_1\, a,$$

$$\Rightarrow\; a = \frac{(-m_2 \mathrm{sen}\theta + m_1)\, g}{m_1 + m_2} = \frac{[2 - \mathrm{sen}\, \theta]\, g}{3}.$$

Con roce:

$$\left.\begin{aligned} -m_2\, g \,\mathrm{sen}\theta - \mu\, N + T &= \frac{m_2\, a}{2}, \\ -T + m_1\, g &= \frac{m_1\, a}{2}, \\ m_2\, g\, \cos\, \theta = N,\; \text{(comp. normal)}, & \end{aligned}\right\}\; \begin{aligned} -m_2\, g\, [\mathrm{sen}\, \theta + \mu\, \cos\, \theta] + m_1\, g = \\ \frac{a}{2}(m_1 + m_2), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; \mu = \frac{m_1 - m_2 \mathrm{sen}\theta}{2\, m_2\, \cos\, \theta} = \frac{2 - \mathrm{sen}\, \theta}{2\, \cos\, \theta}.$$

IV.22 ) a) $V_f = \dfrac{m V_o}{m + M}$.
b) $-a = -\mu\, g = \dfrac{V_f - V_o}{\Delta t}$, $\;\Rightarrow\; t = -\dfrac{\frac{m\, V_o}{m + M} + V_o}{\mu\, g} = \dfrac{M\, V_o}{\mu\, g\, (m + M)}$.

IV.23 ) $T = 2\, m\, \pi^2\, f^2\, \ell$.

IV.24 )

$$\left.\begin{array}{lcl} -T + f_r & = & 0 \\ N & = & mg \end{array}\right\} T = \mu\, m\, g$$

$$\left.\begin{array}{lcl} f_I - f_r - f_r' & = & 0 \\ N' = N + 2mg & = & 3\, mg \end{array}\right\} F_I = \mu\, 4mg$$

$$\left.\begin{array}{lcl} f_r - T & = & 0 \\ N - mg & = & 0 \end{array}\right\} T = \mu mg$$

$$F_{II} = T + f_r + f' = 5\mu\, m\, g; \quad N' = N + 2m\, g = 3\, m\, g.$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{F_I}{F_{II}} = \frac{4}{5}$$

IV.25 ) $F = \sqrt{3}\, W \operatorname{sen} \alpha$.

# CAPITULO V

V.1 ) a) La variación de energía mecánica es igual al trabajo realizado por el roce. Sea $h$ la altura máxima, entonces

$$m\, g\, h - \frac{m\, V_0^2}{2} = -\mu\, m\, g\, \cos\alpha\, \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}, \;\Rightarrow\; h_{\text{máx}} = \frac{V_0^2}{2g\,(1 + \mu\, \cot\alpha)}$$

b) Si $V$ es su velocidad cuando retorna al punto de partida:

$$\Rightarrow \;\frac{mV^2}{2} - mg\, h_{\text{máx}} = -\mu\, mg\, \cot\alpha \cdot h_{\max} \;\Rightarrow\; V^2 = \frac{(1 - \mu\, \cot\alpha)}{(1 + \mu\, \cot\alpha)}\, V_o^2 \geq 0.$$

Note que se debe cumplir que: $1 - \mu\, \cot\alpha \geq 0$.

V.2 ) a) Tomando el centro de la esfera como referencia para la energía potencial se tiene:

$$m\, g\, R = m\, g\, R\, \cos\varphi + K(\varphi), \;\Rightarrow\; K(\varphi) = m\, g\, R\,(1 - \cos\varphi)$$

b) Del diagrama de cuerpo libre de la masa se obtiene:

$$m\, g \operatorname{sen}\varphi = m\, \alpha\, R = m\, a_t, \;\Rightarrow\; a_t = g \operatorname{sen}\varphi.$$

$$\Rightarrow\; F_{\text{centrípeta}} = -m\, \frac{V^2}{R.} \;\Rightarrow\; a_{\text{normal}} = -2\, g\,(1 - \cos\varphi).$$

c) $m\, g\, R = m\, g\, R\, \cos\varphi + \dfrac{mV^2}{2}$. Al perder contacto $N = 0 \Rightarrow m\, g\, \cos\varphi = \dfrac{m\, V^2}{R}$ $\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{2}{3}$.

V.3 ) Por conservación de la Energía: $0 = -m\,g\,L \operatorname{sen}\phi + \dfrac{m\,V^2}{2}$.

Las leyes de Newton dan: $m\,g \operatorname{sen}\phi - T = -\dfrac{m\,V^2}{L}$. Si $\quad T = T_{\text{max}} = \dfrac{3\,M\,g}{2}$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \phi_{\text{max}} = \frac{\pi}{6}.$$

V.4 ) La segunda ley de Newton, proyectada a lo largo del péndulo es: $T - m\,g \operatorname{sen}\phi = \dfrac{m\,V^2}{d}$. Por la conservación de la energía:

$$0 = \frac{m\,V^2}{2} - m\,g\,d \operatorname{sen}\phi,$$

El bloque está a punto de resbalar cuando: $T = \mu\,M\,g = 2\mu_e\,m\,g, \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}\phi = \dfrac{2}{3}\,\mu_e$.

V.5 )

$$\Delta E = W_{\text{roce}}, \ \Rightarrow \ -m_2\,g\,h + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,V^2 + \frac{1}{2}\,k\,h^2 - \frac{(m_1 + m_2)}{2}\,V_0^2 = -\mu\,m_1\,g\,h$$

$$V^2 = \frac{2}{m_1 + m_2}\left(m_2\,g\,h + \frac{(m_1 + m_2)}{2}\,V_0^2 - \frac{1}{2}\,k\,h^2 - \mu\,m_1\,g\,h\right).$$

V.6 ) Escriba la ecuación de movimiento para cada una de las masas $m$ y $M$, separadamente y resuélvalas imponiendo que ambas tienen el mismo valor para la componente vertical de la posición $\ (y_m(t) = y_M(t))$. Esto es válido hasta el momento en que $R$ (la reacción de $m$ sobre $M$) se hace igual a cero, $R = 0$. La solución es un movimiento oscilatorio: el resorte oscilará alrededor del punto de equilibrio correspondiente a la distancia que se comprime el resorte cuando las dos masas se depositan suavemente ($x_o = (m+M)\,g/k$). Si la compresión adicional $d$, que se le comunica al resorte es mayor que $x_o$ ($d > x_o$), entonces las masas se separan y lo hacen justo en el momento que el resorte *alcanza su largo natural.* ¿Qué sucede con el sistema masa–resorte $k$, $M$ después que se separan? Calcule cuanto tardan en volver a chocar.

Las ecuaciones de movimiento de cada una de las masas son: $M\,\ddot{y} = -k\,y - R - M\,g$, $m\,\ddot{y} = +R - m\,g$. Incluyendo las condiciones iniciales, la solución es:

$$y(t) = \left[\frac{M+m}{k}\,g - d\right]\cos(\omega\,t) - \frac{M+m}{k}\,g, \quad \omega^2 = \frac{k}{m+M}.$$

De esta última expresión se puede obtener el valor de la reacción $R$. La condición $R = 0$ –que indica el instante en que la masa $m$ se suelta–, ocurre si se cumple que:
$d \geq 2\,(m+M)\,g/k$.

V.7 ) Sea $V_1$ la velocidad de $m$ en la cúspide del círculo y $V_2$ cuando está en el punto más bajo. La velocidad mínima: $V_1$, está dada por: $m\,\frac{V_1^2}{R} = mg$. Por conservación de la Energía:

$$\frac{1}{2}\,m\,V_2^2 = \frac{1}{2}\,m\,V_1^2 + m\,g\,2R, \ \Rightarrow \ V_2^2 = 5\,g\,R.$$

Durante la expansión del resorte: $M\,V = m\,V_2$. Por conservación de la energía:

$$\frac{k\,x_0^2}{2} = \frac{1}{2}\,M\,V^2 + \frac{1}{2}\,m\,V_2^2, \;\Rightarrow\; m = \frac{M}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4\,k\,x_0^2}{5\,M\,g\,R}} - 1\right).$$

V.8 ) a) $E_A = E_C \;\Rightarrow\; V_c^2 = 2g\,R\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

Por conservación de la energía entre C y el punto más alto: $h^* = \frac{R}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

b) $CD = \frac{V_c^2}{g} = 2R\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

V.9 )

$$E_A = E_B, \;\Rightarrow\; \frac{k}{2}\,(R-d)^2 + 2\,m\,g\,R = \frac{m\,V^2}{2} + \frac{k}{2}\,(R+d)^2$$

En $B$, $N = 0 \Rightarrow \frac{m\,V^2}{R} = k\,(R+d) - m\,g, \;\Rightarrow\; d = \frac{m\,g}{k} - \frac{R}{5}.$

V.10 ) Sea $V_E$, la velocidad justo antes del choque entonces, para el caso inelástico se tiene:

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \qquad V_f = \frac{m}{m+m_B}\,V_E.$$

Después del choque, $\Delta E = 0, \Rightarrow \frac{(m+m_B)}{2}\,V_f^2 = (m+m_B)\,g\,h.$

Caso elástico: $\Delta p = 0$, $\Delta K = 0$:

$$m\,V_e = m\,V_1 + m_B\,V_2, \quad m\,V_e^2 = m\,V_1^2 + m_B\,V_2^2$$

$$\Rightarrow\; V_1 = \left(\frac{m-m_B}{m+m_B}\right)\,V_e.$$

Después del choque, $\quad \Delta E = 0 \Rightarrow \frac{m\,V_1^2}{2} = m\,g\,h, \quad \Rightarrow\; m_B = 2\,m.$

V.13 ) Resortes en paralelo: $\sum F = -(k_1+k_2)\,x = m\,a, \quad \Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$

Resortes en serie : $\qquad k' = \frac{k_1\,k_2}{k_1+k_2} \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m\,(k_1+k_2)}}.$

V.14 ) $\quad d.$

V.15 ) $x_{\text{máximo}} = \frac{m+M}{k}\,\mu\,g.$

V.16 ) $\sum \tau = I\,\alpha \;\Rightarrow\; -2\,k\,a\,x = m\,\ell^2\,\alpha$, pero $x = a\theta$, (oscilaciones pequeñas). De aquí:

$$\omega^2 = \frac{2\,k\,a^2}{m\,\ell^2}.$$

b) Si se considera el peso:

$$-2\,k\,x_1\,a + m\,g\,\ell\,\mathrm{sen}\,\theta = -2\,k\,a^2\,\theta + m\,g\,\ell\,\theta = m\,\ell^2\,\ddot{\theta},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,k\,a - m\,g\,\ell}{m\,\ell^2}}.$$

# CAPITULO VI

VI.1 ) Conviene tomar torque con respecto al centro de la circunferencia. Como las reacciones de la pared sobre la barra, tienen la dirección radial, *no generan torque* con respecto a dicho punto. De esta forma, el centro de masa del sistema barra–partícula, debe ubicarse –en la posición de equilibrio– justo en la vertical, bajo el centro de la circunferencia: de este modo no genera torque y la barra no gira.

El centro de masa se ubica a $L/3$ de la masa puntual. Recordando que la barra y el centro de la circunferencia forman un triángulo isósceles, cuyo ángulo basal es $30^o$, y usando los teoremas del seno y el coseno, se obtiene el valor del ángulo buscado, $30^o$.

Note que el centro de masa se ubica en el punto más bajo posible, aquel donde la energía potencial es mínima. Este es una propiedad que se repite en este tipo de problemas.

VI.2 ) $E_i = M\,g\,H + mg\,d = E_f = \frac{1}{2}\,M\,v_M^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_m^2 + \frac{1}{2}\,I\omega^2 + mg(d+H).$

$$v_m = v_M = R\,\omega = v \Rightarrow v^2 = \frac{2g\,H\,R^2(M-m)}{(m+M)R^2 + I},$$

$$\text{aceleración constante} \;\Rightarrow\; t = \frac{2\,H}{v} = \frac{g\,R^2(M-m)}{(m+M)R^2+I},$$

$$E_i = m\,g\,(d+H) + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,mv_m^2 = E_f = m\,g(d+H+h) \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(I/R^2 + m)v_m^2 = m\,g\,h, \quad h = \frac{(I + m\,R^2)v^2}{2g\,R^2} = \frac{(I+m\,R^2)(M-m)H}{(m+M)R^2+I}.$$

VI.3 ) $m\,v_o = (M+m)v\,,\; E_i = E_f = (M+m)\dfrac{v^2}{2} = (M+m)g\,h,$

$$\Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{m^2 v_o^2}{2g(m+M)^2} = L\,\cos\,\theta_{\mathrm{max}} \;\Rightarrow \cos\,\theta_{max} = \frac{m^2 v_o^2}{2gL(m+M)^2}.$$

$$\vec{r}_{CM} = L(\cos\,\alpha\,\hat{\jmath} - \mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{\imath}), \;\; (\hat{\imath} : \text{horizontal}, \hat{\jmath} : \text{vertical}).$$

VI.4 )

$$\vec{r}_{cm} = 2L(-\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{\imath} + \cos\,\alpha\,\hat{\jmath}) + \ell\,(\cos\,\alpha\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{R}_{CM} =$$

$$= \frac{L}{m+M}\,M\,(-\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{\imath} + \cos\,\alpha\,\hat{\jmath}) + m\,2\,(-\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{\imath} + \cos\,\alpha\,\hat{\jmath}) + m\,\frac{\ell}{L}\,(\cos\,\alpha\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{R}_{CM}\cdot\hat{\imath} = 0\ \Rightarrow \tan\,\alpha = \frac{m\,\ell}{(M+2\,m)\,L}.$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{(M+2\,m)\,L\,\cos\,\alpha + m\,\ell\,\mathrm{sen}\,\alpha}{m+M}\,\hat{\jmath}$$

$i)\vec{R}_{CM} = L\,\hat{\jmath}\,;\ \alpha = 0°$ ii) $\vec{R}_{CM} = (2\,L\,\cos\,\alpha + \ell\,\mathrm{sen}\,\alpha)\hat{\jmath}\,\tan\,\alpha = \dfrac{\ell}{2\,L}$, iii) $\vec{R}_{CM} = \left(\dfrac{3}{2}\,\cos\,\alpha + \dfrac{\mathrm{sen}\alpha}{2}\right)L\,\hat{\jmath}\,;\ \tan\,\alpha = \dfrac{1}{3}.$

VI.5 ) Inicialmente, $M_p\,\ell_1 = m_j\,\ell_2$; finalmente, $(W_j + P\,g)\,\ell_3 = W_p\,\ell_4$,

$$(m_j + P)\,\ell_3 = m_p\,\ell_4,\ \Rightarrow \frac{\ell_4}{\ell_1} = \frac{(m_j+P)\ell_3}{m_j\,\ell_2} \Rightarrow m_j\,\ell_2\ell_4 = m_j\,\ell_3\ell_1 + P\,\ell_3\ell_1,$$

$$m_j = \frac{P\,\ell_3\,\ell_1}{\ell_2\ell_4 - \ell_3\ell_1},\quad m_P = \frac{P\,\ell_2\,\ell_3}{\ell_2\,\ell_4 - \ell_3\,\ell_1}.$$

VI.6 ) $T = 2\,M\,g\,\tan\,\theta$.

VI.7 ) $0 = T\,(a+2\,b)\,\mathrm{sen}\,30° - M\,g\,(a+b)$,

$$T = \frac{M\,g\,(a+b)}{(a+2b)\,\mathrm{sen}\,30°},\ R_H = \frac{M\,g\,(a+b)}{(a+2b)\,\tan\,30°}\,,\qquad R_v = \frac{M\,g\,b}{a+2b}\,.$$

VI.8 ) $\omega = \dfrac{v}{3\,R},\quad L = \dfrac{m\,v\,R}{2}.$

VI.9 ) $\vec{R}_{CM} = \dfrac{\ell}{2}\,\hat{\imath} + \ell\,\hat{\jmath},\quad \vec{V}_{CM} = \dfrac{2\,m\,v_o}{6\,m} = \dfrac{v_o}{3}\,\hat{\imath}.$

$$\text{Nuevo } CM:\quad R_{CM} = \frac{m\,\ell\,\hat{\imath} + m\,2\,\ell\,\hat{\jmath} + m\,(\ell\,\hat{\imath} + 2\,\ell\,\hat{\jmath})}{6m} = \frac{\ell}{3}\,\hat{\imath} + \frac{2\,\ell}{3}\,\hat{\jmath}.$$

$$\vec{L}_{\text{antes}} = 2\,m\,v_o\,\frac{2\,\ell}{3} = \frac{4}{3}\,m\,\ell\,v_o,\quad \vec{L}_{\text{después}} = I\,\omega = \frac{10}{3}\,m\,\omega\,\ell^2\ \Rightarrow\ \omega = \frac{2}{5}\,\frac{v_o}{\ell}.$$

Existe traslación y rotación con respecto al CM.

VI.10 ) Como no existe roce ni fricción con el aire, podemos utilizar la conservación de la energía entre la posición $\theta_o$ y $\theta$ de la barra:

$$E_i = M\,g\,L \operatorname{sen}\theta_o = E_f = M\,g\,L \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2,$$

donde $I$, es el momento de inercia con respecto a la rótula. A partir de esta expresión obtenemos la velocidad angular de la barra:

$$\omega^2 = \frac{6\,g}{L}\,[\operatorname{sen}\theta_o - \operatorname{sen}\theta].$$

A continuación planteamos el equilibrio dinámico de fuerzas en la dirección de la posición de la barra:

$$-M\,\omega^2\,\frac{L}{2} = -M\,g \operatorname{sen}\theta - R,$$

donde $R$, es la componente de la reacción del soporte proyectada sobre la dirección de la barra. Reemplazando la velocidad angular obtenida anteriormente, se obtiene el valor de esta fuerza que actúa sujetando a la barra:

$$R = 4\,M\,g\,\left[\frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta_o - \operatorname{sen}\theta\right].$$

VI.11 ) a)

$$m\,V\,\frac{\ell}{2} = I\,\omega_o + m\,\frac{\ell}{2}\,\omega_o\,\frac{\ell}{2}, \qquad v_o = \omega_o\,\frac{\ell}{2}.$$

b)

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}\,I\,\omega_o^2 = (m+M)\,\ell\,(1-\cos\,\theta)\,g/2.$$

VI.13 ) $\quad y = \dfrac{1}{2}\,x.$

VI.14 ) $\quad \Delta L = \dfrac{M\,\omega^2\,L}{2k - M\,\omega^2},\ \text{con } 2\,k > M\,\omega^2.$

VI.15 ) $a = \dfrac{m\,g}{m + M/2}\,.$

VI.16 ) $I = \dfrac{8}{15}\,\pi\,\rho(R^5 - r^5) = \dfrac{2}{5}\,M\,\dfrac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}\,.$

VI.17 ) $\mu_o = \dfrac{2}{7}\,tan\,\theta\,.$

VI.18 ) b) $a = \dfrac{g}{1 + \dfrac{R^2}{2\,r^2}}\,.$

VI.19 ) $h = \dfrac{3\,d}{2} - 3r.$

VI.20 ) a) $v_o = \dfrac{2}{5}\, R\,\omega_o$, b) $v_o = \dfrac{1}{4}\, R\,\omega_o$.

VI.21 ) $\ell = R\left[\sqrt{1+\dfrac{M}{4,}} - 1\right]$.

VI.23 ) Amplitud $= \dfrac{v}{4}\sqrt{\dfrac{M}{2k}}$. Periodo: T $= 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{2k}}$.

VI.24 )

$$\text{a)} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1\, m_2}{k\,(m_1+m_2)}}\,, \quad \text{b)} \quad m \equiv \frac{m_1\, m_2}{m_1+m_2}$$

$$\text{c)} \quad E = \frac{1}{2}\, k\, A^2\ , \qquad \text{d)} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2}{m_1}\,.$$

VI.25 ) b) $v = \sqrt{8\, g\, L}$.

VI.26 ) $E_i = E_f \Rightarrow m\, g\, h = \dfrac{1}{2}\, m\, v_o^2 + \dfrac{1}{2}\, I\,\omega^2\ ,\ L_i = L_f \Rightarrow 0 = m\, v_o\, R - I\,\omega\,.$

VI.28 ) Las reacciones generadas en los apoyos de las barras son:

$$R_1 = \frac{1}{2}\,\frac{Mg}{L}\,(L-x), \quad R_2 = \frac{1}{2}\,\frac{Mg}{L}\,(L+x), \quad \omega^2 = \mu\frac{M\,g}{L}.$$

# CAPITULO VII

VII.1 ) $V_{\text{ef}} = 0 = \dfrac{L_o^2}{2\, m\, r^2} - \dfrac{G\, M\, m}{r} \Rightarrow r = \dfrac{L_o}{m}\sqrt{\dfrac{1}{2\, G\, M}}$.

La velocidad es máxima en el punto donde el potencial efectivo es mínimo.

VII.2 ) a) E=0, $V_{\text{máx.}} = c \equiv$ velocidad de la luz, luego: $r_{\text{mín.}} = [2\, G\, M]/c^2$.

b)$F = -\dfrac{G\, M\, m}{r^2} = -m\,\dfrac{v^2}{r} \;\Rightarrow\; r = \dfrac{G\, M}{c^2}$.

VII.3 ) a) $2,67 \times 10^{-6}$ dinas.

b) $M_T = \dfrac{F\, r^2}{G\, m} = 5,98 \times 10^{24}\, kg$.

c) $9,8\, m/s^2$.

d) $F = \dfrac{G\, M\, m}{4R_T^2} = mg \Rightarrow g = 2,45\, m/s^2$.

VII.4 )

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{G\,M\,m}{r} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = 10421,56\,m/s.$$

Como la velocidad adquirida por el satélite al liberarlo, es menor que la velocidad de escape, permanece ligado. (Hemos supuesto que la velocidad dada está referida a la Tierra.)

VII.5 )

$$F = \frac{G\,M\,m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \quad \text{pero, } v = \omega\,r = \frac{2\pi\,r}{T} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{4\,\pi^2}} = R_T + h,$$

$$\Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{4\,\pi^2}} - R_T = 35,87 \times 10^6\,m.$$

VII.6 ) $\frac{G\,M\,m}{r_i^2} = m\,\frac{v_i^2}{r_i} \;\Rightarrow\; r_i = \frac{G\,M_s}{v_i^2}$, análogamente, $r_e = \frac{G\,M_s}{v_e^2}$. La distancia entre anillos es: $d = r_e - r_i = G\,M_s\left(\frac{1}{v_e^2} - \frac{1}{v_i^2}\right)$.

VII.8 ) La esfera tiene densidad constante: $\rho_o = \frac{3\,M_{s\,s}}{4\pi\,R_{s\,s}^3}$. Aplicando la ley de gravitación universal obtenemos: $\ddot{r} = -\frac{4\pi\,G}{3}\,\rho_o\,r$, esta es la ecuación del movimiento armónico simple, luego el tiempo de caída al centro de la esfera, $\tau$, es:

$$\tau = \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{3\pi}{4\,G\,\rho_o}} = \pi\sqrt{\frac{R_{s\,s}^3}{G\,M_{s\,s}}}, \text{ con } \omega = \frac{2\,\pi}{1\,\text{año}}.$$

$$\tau \simeq 4,6 \times 10^6\;(R_{s\,s} \simeq 6 \times 10^{12}\,m).$$

VII.9 ) a)

$$\frac{F_{SL}}{F_{TL}} = \frac{M_S\,d_{TL}^2}{d_{LS}^2 \cdot M_T}, \text{ pero } d_{SL} \approx d_{ST} \;\Rightarrow\; \frac{F_{SL}}{F_{TL}} = \frac{320.000}{(400)^2} = 2$$

VII.10 ) a) Por conservación del momentum angular:

$$L_A = L_P \Rightarrow \frac{v_A}{v_P} = \frac{a-c}{a+c}.$$

b) Por conservación de la energía, $E_A = E_P$ , tenemos:

$$E_A = \frac{L_o^2}{2m(a+c)} - \frac{G\,M\,m}{a+c} = \frac{L_o^2}{2m(a-c)} - \frac{G\,M\,m}{a-c} = E_P.$$

ordenando estos términos se obtiene:

$$\frac{L_o^2}{m^2}\,\frac{a}{(a-c)(a+c)} = G\,M.$$

Recordando que $L_o = L_A = L_P$ y reemplazando, se obtiene el resultado.

VII.11 )

$$I\,\omega_{\text{antes}} = I\,\omega_{\text{después}}\,, \Rightarrow I_{\text{esf}} = \frac{2}{5}\,M\,R^2 \rightarrow \omega_a\,R_\odot = \omega_D\,R_D\,.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \frac{R_\odot}{T_a}\,T_D = R_D = 4,6\times 10^{-8}\,R_\odot.$$

Debo estimar el momento angular de la masa expulsada y aplicar el mismo método usado en la primera parte.

VII.13 ) $\omega = \frac{g}{\ell}, \quad g_T = \frac{G\,M_T}{R_T^2}, \quad g_L = \frac{G\,M_L}{R_L^2} \;\Rightarrow\; T_L = T_T\,\frac{R_L}{R_T}\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}.$

VII.14 ) $\omega^2 = \frac{g\,R_T^2}{(R_T+h)^3}, \quad \Rightarrow \quad v = \omega\,(R_T+h).$

VII.15 ) $T^2 = \frac{4\,\pi\,r^3}{G\,M}, \;\Rightarrow\; \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,M} = \frac{T'^2}{r'^3}$

VII.16 )

$$v^2 > \frac{2\,G\,M}{r} \Rightarrow v > 1,06\times 10^4\;[m/s],$$

$$v_{luna}^2 > \frac{2\,G\,M_{luna}}{R_{luna}}\,, \Rightarrow v > 1,9\times 10^3\;[m/s],$$

$$v_{sol}^2 > \frac{2G\,M_{sol}}{r_{sol}} \Rightarrow v > 1,95\times 10^4\;[m/s].$$

VII.17 ) Sea $x_1$, y $x_2$ las distancias de $m$ y $M$ al centro de masa. Tomando origen de coordenadas en el centro de masa, tenemos:

$$m\,\ddot{x}_1 = -\frac{G\,M\,m}{(x_1+x_2)^2}, \qquad m\,\ddot{x}_2 = -\frac{G\,M\,m}{(x_1+x_2)^2}\,.$$

Sumando ambas ecuaciones y definiendo $x = x_1 + x_2$, obtenemos

$$\ddot{x} = -\frac{G\,(M+m)}{x^2}$$

Aplicando a esta ecuación los métodos usados para obtener la energía, se llega a:

$$\frac{1}{2}\,\dot{x}^2 + \frac{G(M+m)}{x} = E_o,$$

pero $E_o = 0$ puesto que $x \rightarrow \infty \Rightarrow \dot{x} = 0$. De aquí obtenemos el valor de la velocidad en cualquier punto de la trayectoria.

VII.18 )

$$F = G\,m\left(\frac{m_2}{d_2^2} - \frac{m_1}{d_1^2}\right), \qquad U_{tot} = -\frac{G\,M\,m_1}{r_1} - \frac{G\,M\,m_2}{r_2}, \qquad W = \Delta U\,.$$

VII.19 ) Usando el principio de superposición, consideramos dos esferas. Una de ellas tiene masa negativa. La aceleración en el eje $x$, se calcula sumando los efectos de ambas esferas:

$$a_x = -\frac{4\,\pi\,\rho\,G}{3}\left[\frac{R^3}{(R+x)^2} - \frac{R^3}{64(\frac{5}{4}R+x)^2}\right].$$

VII.20 ) a) La fuerza es atractiva y constante: $F = 2\,\pi\,\sigma_o\,G\,m$. De este modo, este problema es equivalente al movimiento de una partícula en la Tierra, con $g =$ constante $= 2\,\pi\,\sigma_o\,G$. El periodo es, de acuerdo a las fórmulas utilizadas con anterioridad: $\tau = 2\sqrt{2\,h/g}$. En función de $\sigma_o$:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{h}{\pi\,G\,\sigma_o}}.$$

El periodo depende de la altura que alcanza el objeto.

b) La fuerza que se ejerce sobre una partícula ubicada entre los dos planos es nula. Fuera de los planos, la fuerza es el doble del valor correspondiente a un plano infinito, puesto que se suman los efectos de ambos.

# CAPITULO VIII

VIII.1 ) $h = 340\,\tau\,\cos\,\alpha$.

VIII.2 ) a) d $= v_s\,t = 340\,\tau$.

b)d$= 340\,(\tau - t_1)$, donde $t_1 = d/c$, y $d = \dfrac{340\,\tau}{1+340/c}$.

VIII.3 ) $V_{\text{sombra}} = \dfrac{H}{H-h}\,V$.

VIII.4 ) a) $V_{\text{máx}} = \dfrac{V_o}{1} - \dfrac{\tau\,V_o}{(n-1)d}$ ; $V_{\text{mín}} = \dfrac{V_o}{1} + \dfrac{\tau\,V_o}{(n-1)d}$.

VIII.5 ) $v_f^2 - v_i^2 = -2ax \Rightarrow v_f^2 = v_i^2 - 2ax > 0 \Rightarrow v_i^2 > 2ax \Rightarrow v_i > 163\,km/h$.

VIII.6 ) a) velocidad relativa $= v_1 - v_2$, $v_f^2 - v_i^2 = -2ad$, $v_f^2 = (v_1 - v_2)^2 - 2ad < 0$ $\dfrac{(v_1-v_2)^2}{2a} < d$.

b) Sea $T_r$: tiempo de reacción: $D_{\text{Tot}} = d + d_{\text{reac}} = d + v_1 \cdot T_r$ $D > \dfrac{(v_1-v_2)^2}{2a} + v_1\,T_r$

Otra forma de resolver este problema consiste en calcular el tiempo que tardan ambos móviles en encontrarse. Para que *no* se encuentren, el tiempo debe ser un número complejo. La condición que la raíz cuadrada sea imaginaria, es la condición requerida.

VIII.7 )

$a)\vec{r}(t) = (a + bt + ct^2)(-\hat{\jmath})$, $b)\vec{v}_i = v_o(-\hat{\jmath})$ ; $\vec{a} = -g\,(\hat{\jmath})$,
$c)\vec{v}(t) = (b + 2ct)(-\hat{\jmath})$ $d)\vec{a}(t) = 2c(-\hat{\jmath})$,
$e)c = \dfrac{g}{2}$ ; $b = v_o$ ; $a = 0$ (si el eje está en $\Delta/d_o$),
$f) - h = -v_o\,t - \dfrac{g\,t^2}{2} \;\Rightarrow\; t = \dfrac{v_o}{g} + \sqrt{\left(\dfrac{v_o}{g}\right)^2 + \dfrac{2\,h}{g}}$, $g)t = \dfrac{2v_o}{g} = 2[s]$,
$h)\vec{v} = 10\,(-\hat{\jmath})\ m/s$, $i)T = 5,4[s]$,
$j)v_f = v_i + g\,t = 44\,(-\hat{\jmath})\ m/s$, $k)v = 20 - 10\,t$,
$l)\vec{v}_i = -20\,(\hat{\jmath})\ m/s$, $m)54\ [s]$,
$n)54\ m$.

VIII.8 ) $v_{\text{máx.}} = g/k$. Hemos supuesto $g$=Constante en toda la trayectoria.

VIII.9 ) $v_i = \tau\,g = g/2$.

VIII.10 ) $R_{\text{min}_A} = \dfrac{v^2}{5\,g}$; $R_{\text{min}_B} = \dfrac{4\,v^2}{5\,g}$; $d = \dfrac{2\,v^2}{5\,g}$.

VIII.11 ) $v_N = 37.088\,m/h$ , $v_e = 9.272\,m/h$.

a) $v = \sqrt{20^2 + 5^2} = 20.6\,\text{nudos}(N.E.)$.

b) Dirección (N.O.), $v = 20$ nudos (N.).

VIII.12 ) $t_1 + t_2 = T = \dfrac{d}{110} + \dfrac{d}{90}$, $\dfrac{2d}{T} =< v >= 99\,\dfrac{km}{h}$.

VIII.13 ) a) $t = \dfrac{H}{V_o \text{sen}\alpha}$,

b) $t = \dfrac{H}{(V_o + \mu_o)\text{sen}\alpha}$ ; $d = H\left(1 - \dfrac{V_o}{V_o + \mu_o}\right)$.

VIII.14 ) a) Tiempo que demora la plataforma en bloquear el camino: $T_D = \dfrac{\ell}{u}$ .

El tiempo que demoran en pasar $n$ bolitas: $T_{nb} = \dfrac{d}{v} + (n-1)\tau$.

$$T_D = T_{nb} \Rightarrow n = \frac{\ell\,v - d\,u}{\tau\,u\,v} + 1.$$

b) $n = 9\,$bolitas.

VIII.15 ) Circunferencia de radio $R = h/2$.

VIII.16 )

$$t = \frac{\frac{1}{2}g\,\tau^2 - V_o\,\tau}{V_o - V_1 - g\,\tau}.$$

VIII.17 )

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $(0,4)$ s | c) | $t=8$ s |
| b) | $(4,6)$ s | d) | $x=18$ m |

VIII.18 ) a) Mientras un inspector revisa los boletos, pasan $\dfrac{T_1}{T_o}$ buses en sentido contrario, luego se necesitan $\left(\dfrac{T_1}{T_o}+1\right)$ inspectores.

b) No se necesita $d$, ni $v_o$.

VIII.19 ) a) En un tiempo $T$, esta persona avanza: $[V\cdot T]$ y caen, $[U\cdot T\cdot \rho_o\cdot A_s]$ , gotas en un área $A_s$.

b) $U\cdot T\cdot \rho_o\, A_f$

VIII.20 ) $\theta=\dfrac{2\pi}{n}$ ; $t=\dfrac{1}{24}$ seg. $\Rightarrow \omega=\dfrac{48\pi}{n} \Rightarrow v_{min}=\dfrac{48\pi r}{n}$ .

VIII.21 ) *Proyectil*: $\vec{r}_P(t)=(v_{ox}\,t)\,\hat{\imath}+(v_{oy}\,t-\dfrac{1}{2}\,gt^2)\hat{\jmath}$ ,

*Avión*: $\vec{r}_a(t)=(d-v_a t)\hat{\imath}+h\hat{\jmath}$.

Para que en un mismo instante se encuentren:

$$x_T=x_a=v_o\cos\alpha\, t=d-v_a\,t \;\;\Rightarrow\;\; t=\frac{d}{v_o\cos\alpha+v_a}$$

$y_P=y_a=h=v_o\text{sen}\alpha t-\dfrac{1}{2}\,gt^2$ , reemplazando $t$ en la ecuación anterior se obtiene el ángulo $\alpha$.

VIII.22 ) $\omega_H=\dfrac{2\pi}{12}\cdot t$ , $\omega_M=\dfrac{2\pi}{1}\,t$, con $t$ en horas. $\omega_M\cdot t=\omega_H\cdot t+2\pi \Rightarrow t=65,55...$ minutos después.

VIII.23 ) $x=v_o\cos(\alpha+\beta)t$ , $y=v_o\,\text{sen}(\alpha+\beta)t-\dfrac{1}{2}\,g\,t^2$, $\quad y=x\tan\alpha$.

$$y=\frac{\text{sen}\,(\alpha+\beta)\,x\,2\,v_o-g\,x^2}{2\,v_o\,\cos(\alpha+\beta)}=x\tan\alpha,\;\Rightarrow\; x=\frac{(\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha)}{g}\,2\,v_o\,\cos(\alpha+\beta),$$

$$\Rightarrow d\cos\alpha=x,\;\Rightarrow\; d=\frac{2\,v_o\,\cos(\alpha+\beta)}{g\,\cos\alpha}\,(\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha).$$

VIII.24 ) *Proyectil*: $x=v_o\cos\alpha\,t$ , $y=v_o\,\text{sen}\,\alpha\,t-\dfrac{1}{2}\,g\,t^2$

*Piedra*: $x=d$ , $y=h-v_i\,t-\frac{1}{2}\,g\,t^2$.

Reemplazando las coordenadas de la piedra en las ecuaciones del proyectil y despejando el tiempo, se obtiene:

$$v_i=\frac{h\,v_o\,\cos\alpha}{d}-v_o\,\text{sen}\,\alpha.$$

VIII.25 ) $v_B^2 - v_P^2 = 2\,g\,h_1 \;\Rightarrow\; v_B = \sqrt{2\,g\,h_1}, \quad x = v_B\,t, \quad y = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 = -h \;\Rightarrow\; d = 2\sqrt{h_1\,h}.$

VIII.26 ) a) $x = v_o\,t, \quad y = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 = -h \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\dfrac{2\,h}{g}} = \dfrac{h}{v_o} \;\Rightarrow\; v_o = h\sqrt{\dfrac{g}{2\,h}}.$

b) $\tan\,\alpha = \dfrac{v_x}{(-v_y)}.$

VIII.27 ) $x = v_o\,t,\; y = -\dfrac{g\,t^2}{2} = -\dfrac{1}{2}\,g\,\dfrac{x^2}{v_o^2}$, pero $x = R\,\cos\,\alpha,\; y = -R\,\mathrm{sen}\,\alpha$

$$R\,\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\,g\frac{R^2\,\cos^2\alpha}{v_o^2} \;\Rightarrow\; R = \frac{2\,v_o^2\,\mathrm{sen}\,\alpha}{g\,\cos^2\alpha}, \quad t = \frac{R\;cos\,\alpha}{v_o} \;\Rightarrow\; t = \frac{2\,v_o\,\tan\,\alpha}{g}$$

VIII.29 ) a) $v_{plataforma} = v_{ruedas} \;\Rightarrow\; \omega\,d_o = \Omega\,r \;\Rightarrow\; \Omega = \dfrac{\omega\,d_o}{r}.$

b) Si $d < d_o$, avanza en la plataforma y si $d > d_o$, retrocede.

VIII.30 ) a) $\Delta\theta = \dfrac{2\pi}{n}\,, \Rightarrow \omega = \dfrac{\Delta\theta}{\tau} = \dfrac{2\pi}{n\tau}\,.$

b) $\Delta\theta = \dfrac{4\pi}{n}\,, \Rightarrow \omega = \dfrac{4\pi}{n\tau}\,.$

VIII.31 ) $x = v_{ox}t,\; y = v_{oy}\,t - \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 = 0 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{2\,v_{oy}}{g} = \dfrac{2\,v_o\,\mathrm{sen}\,\theta}{g} = \dfrac{2\,\omega\,R\,\mathrm{sen}\,\theta}{g},$

$$x = 2\,R\,\mathrm{sen}\,\theta = v_o\,\cos\,\theta\,t \quad\Rightarrow\quad \cos\,\theta = \frac{g}{R\,\omega^2}\,.$$

VIII.32 ) $x = v_o\,\cos\,\alpha{\cdot}t^* = 2\,d, \quad y = v_o\,\mathrm{sen}\,\theta\,t^* - \dfrac{1}{2}\,g\,t^{*2} = 0 \quad\Rightarrow\quad t^* = \dfrac{2\,v_o\,\mathrm{sen}\,\alpha}{g}$, y $\omega\,t^* = \pi$,

$$\Rightarrow\; v_o\,\cos\,\alpha = \frac{2\,d\,\omega}{\pi}, \quad v_o\,\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{g\,\pi}{2\,\omega}, \;\Rightarrow\; \tan\,\alpha = \frac{g\,\pi^2}{4\,d\,\omega^2},\ \text{y}\ v_o^2 = \frac{4\,d^2\,\omega^2}{\pi^2} + \frac{g^2\,\pi^2}{4\,\omega^2}.$$

VIII.33 ) a) $v_1 = v_2 \;\Rightarrow\; \omega_2\,r_2 = \omega_1\,r_1 \;\Rightarrow\; \omega_2 > \omega_1.$

b) $\dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{r_2}{r_1}.$

VIII.37 ) Por el principio de acción y reacción y el hecho que no existe roce, el más delgado no puede ganar.

VIII.40 ) $m_3\,g - T_1 = m_3\,a_3, \;\Rightarrow\; T_1 = m_3\,(g-a_3); \quad T_1 - m_2\,g = m_2\,a_2 \;\Rightarrow\; \frac{m_3}{m_2}\,(g-a_3) - g = a_2,$

$$2\,T_1 - m_1\,g = m_1\,a_1 \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{2\,m_3}{m_1}(g - a_3) - g.$$

VIII.41 ) a) $\frac{dp}{dt} = F = \frac{mv}{t} = v_o \phi_o = M\,a.$

Se mantiene mientras exista gas en el extintor: $m_{ext} = \phi_o\,t^* \;\Rightarrow\; t^* = \frac{m_{ext}}{\phi_o}.$

b) $a = \frac{v_o \phi_o}{M}$. Si parte del reposo, en un tiempo $t^*$ recorre:

$$d^* = \frac{1}{2}\,a t^{*2} = \frac{v_o m_{ext}^2}{2\,M_A\,\phi_o}, \text{ después, sigue con } v = cte. = \frac{v_o\,m_{\text{ext}}}{M_A},$$

$$\Rightarrow\; d^{**} = \frac{v_o\,m_{ext}^2}{M_A\,\phi_o} \;\Rightarrow\quad D_{\text{total}} = \frac{3}{2}\,\frac{v_o\,m_{ext}^2}{M_A\,\phi_o}.$$

VIII.42 ) a) $N\,m\,v + M\,v' = 0, \;\Rightarrow\; v' = \frac{-Nmv}{M}.$

b) $m\,v + [M + (N-1)\,m]\,v' = 0 \;\Rightarrow\; v' = \frac{-m\,v}{M + (N-1)\,m},$

$m\,v + (M + (N-2)\,m)\,v" = (m + (N-1)\,m)v' = -m\,v,$

$$v" = \frac{-2\,m\,v}{M + (N-2)\,m} \;\Rightarrow\; v_{final} = \frac{-N\,m\,v}{M}.$$

VIII.43 ) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}.$

VIII.45 ) b) i) $m = \frac{2Ma_o}{g - a_o}$ .

c) La bolita llega arriba con $\quad v^2 = v_o^2 - 2\,g\,(2\,R) \quad \Rightarrow \quad N + m\,g = m\,\frac{v^2}{R} =$

$= \frac{m}{R}\,(v_o^2 - 4\,g\,R) \quad \Rightarrow \quad N = m(\frac{v_o^2}{R} - 5\,g)$. Para que la argolla no se desprenda:

$$M\,g - N > 0 \;\Rightarrow\; M > m\left(\frac{v_o^2}{R\,g} - 5\right).$$

VIII.49 ) a) $f_r = m_1\,a_1 = \mu_e\,N_1 = \mu_e\,m_1\,g, \quad F - f_r = m_2\,a_2$. Para que $m$ resbale: $a_1 = a_2$, por lo tanto: $F - \mu_e\,m_1\,g = m_2\,\mu_e\,g \;\Rightarrow\; F = \mu_e\,g\,(m_1 + m_2).$

b) $m_1\,a_1 = \mu_c\,m_1\,g \;\Rightarrow\; a_1 = \mu_c\,g, \quad 2\,\mu_e\,g\,(m_1 + m_2) - \mu_c\,m_1\,g = m_2\,a_2.$

$m_1$ se desplaza con aceleración relativa a $m_2$, igual a: $(a_2 - a_1)$.

$$\Rightarrow a_r = \frac{2\,\mu_e\, g\,(m_1+m_2) - \mu_c\, m_1\, g}{m_2} - \mu_c\, g.$$

El C.M. se desplaza una distancia $L/2$ :

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\, a_r\, t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{L}{a_r}} = \sqrt{\frac{Lm_2}{2\mu_e g(m_1+m_2) - \mu_c g(m_1+m_2)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{L\, m_2}{g(m_1+m_2)(2\,\mu_e - \mu_c)}}$$

VIII.50 )

$$\begin{array}{ll} m: & \sum F_x = N_1 \text{sen}\alpha - f_1 cos\alpha = 0\,, \\ & \sum F_y = N_1 cos\alpha + f_1 \text{sen}\alpha - mg = ma \\ M: & \sum F_x = f_1 cos\alpha - N_1 \text{sen}\alpha - N\text{sen}\alpha = M a_x\,, \\ & \sum F_y = N cos\alpha - N_1 cos\alpha - f_1 \text{sen}\alpha - Mg = M a_y\,. \end{array}$$

a) $N_1\,\text{sen}\,\alpha = f_1\,\cos\,\alpha = \mu_c\, N_1\,\cos\,\alpha \;\Rightarrow\; \mu_c = \tan\,\alpha.$

b) Considero ambos bloques juntos: $(m+M)g\,\text{sen}\,\alpha = (m+M)\,a \;\Rightarrow\; a = g\,\text{sen}\,\alpha.$

VIII.52 ) $m_1 + m_2 = m.$ $\vec{p} = cte.$ $\Rightarrow$ $m_1\, v_1 + m_2\, v_2 = 0$ $\Rightarrow$ $m_1\, v_1 = -m_2\, v_2.$ Ambas demoran:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{en caer.} \quad x_1 = v_1 \sqrt{\frac{2\,h}{g}},\;\; x_2 = v_2 \sqrt{\frac{2\,h}{g}} \;\Rightarrow\; \frac{x_1}{x_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{-m_2}{m_1}.$$

VIII.53 ) $M\, v_A + m\, v_p = 0,\quad v_p = \dfrac{-M}{m}\, v_A.$ $(M+m)\, v_{pp} = M_v - m\, v_p,$ con $v_{pp} \equiv$ velocidad de Pablo con el paquete en su poder, que debe ser igual a la velocidad de Aldo después de lanzar el paquete:

$$(M+m)\, v_A = M_v - m\, v_P \;\Rightarrow\; V_p = \frac{M^2\, v}{2\, m\, M + m^2}.$$

VIII.54 ) $m\, v_o = (m+M)\, V,\quad \dfrac{1}{2}(m+M)\, v^2 = m\, g\, d\,\text{sen}\,\alpha,$ d: distancia a la que se detiene sobre el plano.

$$v_o = \sqrt{\frac{2\,(m+M)\, g\, d\,\text{sen}\,\alpha}{m}}.$$

VIII.56 ) $m_1\, v_o = m_1\, v_1\,\cos\,\theta_1 + m_2\, v_2\,\cos\,\theta_2,\quad 0 = m_1\, v_1\,\text{sen}\,\theta_1 - m_2\, v_2\,\text{sen}\,\theta_2.$

$m_1\, v_1\,\text{sen}\,\theta_1 = m_2\, v_2\,\text{sen}\,\theta_2,$

$m_1\, v_o = m_2\, v_2\,\text{sen}\,\theta_2\, \dfrac{\cos\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_1} + m_2\, v_2\,\cos\,\theta_2 = \dfrac{m_2\, v_2}{\text{sen}\,\theta_2}\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2).$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{m_1\, v_o\,\text{sen}\,\theta_1}{m_2\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)},\quad v_1 = \frac{v_o\,\text{sen}\,\theta_2}{\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)}.$$

VIII.57 ) Todas detenidas excepto la última que sale con $v_o$.

VIII.58 ) Como es un choque elástico se conserva la energía y el momentum. Designamos la energía cinética por E:

1) $E = E_A + E_B$ 2) $m_A\, u = m_A\, v_A + m_B\, v_B$.

$$E = \frac{1}{2} M_A\, u^2 = \frac{m_A^2\, u^2}{2\, m_A}, \quad \Longrightarrow \quad m_A\, u = \sqrt{2 m_A E}.$$

Análogamente

$$m_B\, u_B = \sqrt{2\, m_B\, E_B}, \qquad m_A\, u_A = \sqrt{2\, m_A\, E_A}.$$

La conservación del momentum es:

$$\sqrt{2 m_A E} = \sqrt{2 m_A E_A} + \sqrt{2 m_B E_B} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{E} = \sqrt{E_A} + \sqrt{x\, E_B}.$$

Por otra parte, introduciendo la conservación del momentum en función de la energía obtengo:

$$E = E_A + E_B = E_A + x\, E_B + 2\sqrt{x\, E_A\, E_B},$$

dejándolo en función de $E$ y $E_B$:

$$(1-x)^2\, E_B = 4\, x\, (E - E_B).$$

$$\frac{E_B}{E} = \frac{4x}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1+x)^2} = 1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2.$$

De la última expresión se deduce que $E_B$ alcanza su valor máximo $E$, cuando $x = 1$.

VIII.59 ) $T = m_B\, g, \quad T \cos\theta = f_r \leq \mu\, N \leq \mu\, m_A\, g = m_B\, g \cos\theta \ \Rightarrow\ \cos\theta \leq \dfrac{\mu\, m_A}{m_B}.$

VIII.60 ) $D = \dfrac{h}{\text{sen}\alpha}$. Pérdida de energía $\equiv W_{roce} = \mu\, m\, g \cos\alpha \left(\dfrac{h}{\text{sen}\,\alpha} - \ell_o + x\right)$,

$E_{inicial} = m\, g\, h, \quad E_{final} = \dfrac{1}{2}\, k\, x^2 + m\, g\, (\ell_o - x)\, \text{sen}\,\alpha,$

$m\, g\, H - \dfrac{1}{2}\, k\, x^2 - m\, g\, (\ell_o - x)\, \text{sen}\,\alpha = \mu\, m\, g \cos\alpha \left(\dfrac{H}{\text{sen}\,\alpha} - \ell_o + x\right),$

De esta ecuación se puede despejar la expresión para $x$.

VIII.61 ) $F + m_2\, g\, \text{sen}\,\alpha - \mu_2\, m_2\, g \cos\alpha = m_2\, a, \quad m_1\, g\, \text{sen}\,\alpha - F - \mu_1\, m_1\, g \cos\alpha = m_1\, a.$

$$F\,(m_1 + m_2) = m_1\, m_2\, g \cos\alpha\, (\mu_2 - \mu_1) \ \Rightarrow\ F = \frac{m_1\, m_2\, g \cos\alpha\, (\mu_2 - \mu_1)}{m_1 + m_2}.$$

VIII.62 ) Para que $m_B$ aterrice en P: $x = v_o t, \quad y = -\dfrac{1}{2}\, g\, t^2 = -h \ \Rightarrow\ v_o = L\sqrt{\dfrac{g}{2\, h}},$

$y = -\dfrac{1}{2}\, g\, t^2 = -h = -\dfrac{1}{2}\, g \dfrac{x^2}{v_o^2} = -\dfrac{1}{2} \dfrac{gL^2}{v_o^2} \Rightarrow v_o = L\sqrt{\dfrac{g}{2h}}.$

Choque en $B$:

$M_a\,V_{ia} = m_A\,v_{fA} + m_B\,v_{fB} \quad\Rightarrow\quad v_{fA} = v_{iA} - \dfrac{m_B}{m_A}\,v_o.$

$\dfrac{1}{2}\,m_A\,v_{iA}^2 = \dfrac{1}{2}\,m_A\,v_{fA}^2 + \dfrac{1}{2}\,m_B\,v_{fB}^2, \quad m_A\,v_{iA}^2 = m_A\,(v_{iA} - \dfrac{m_B}{m_A}\,v_o)^2 + m_B\,v_o^2.$

Conservación de la energía: $E_i = m_A\,g\,\ell\,(1 - \cos\,\theta) = \dfrac{1}{2}\,m_A\,v_{iA}^2 \quad\Rightarrow\quad 2\,g\,\ell\,(1 - \cos\,\theta) = v_{iA}^2,$

$$2\,g\,\ell\,m_A\,(1-\cos\,\theta) = m_A\,\sqrt{2\,g\,\ell\,(1-\cos\,\theta} - \frac{m_B}{m_A}\,L\,\left(\sqrt{\frac{g}{2\,h}}\right)^2 + \frac{m_B\,L^2\,g}{2\,h} \quad\Rightarrow\quad \theta.$$

VIII.63 ) *Choque*: $\quad m\,v_o = 2\,m\,v \quad\Rightarrow\quad v = \dfrac{v_o}{2},$

$$\Delta\,E_{mecanica} = W_{roce} \quad\Rightarrow\quad x\,g\,(\mu\,\cos\,\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{v_o^2}{4} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{v_o^2}{4\,g\,(\mu\,\cos\,\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta)}.$$

VIII.64 ) *Eje x:* $\quad 0 = m_1\,v - m_2\,v\,\cos\,\theta \quad\Rightarrow\quad m_1 = m_2\,\cos\,\theta$

*Eje y*: $\quad 0 = \dfrac{m}{4}\,v - m_2\,v\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad m_2 = \dfrac{m}{4\,\mathrm{sen}\,\theta}.$

$m_1 + m_2 = \dfrac{3}{4}\,m = \dfrac{m\,\cos\,\theta}{4\,\mathrm{sen}\,\theta} + \dfrac{m}{4\,\mathrm{sen}\,\theta}, \quad\Rightarrow\quad (\cos\theta + 1) = 3\mathrm{sen}\theta,$

$\Rightarrow\quad \cos^2\,\theta/2 = 6\,\mathrm{sen}\,\theta/2\,\cos\,\theta/2 \quad\Rightarrow\quad \tan\,\theta/2 = \dfrac{3}{2}.$

$m_2 = 0.41\,m,$

$m_1 = 0.33\,m.$

VIII.65 ) Nos ubicamos en un sistema de referencia inercial, que viaje a la velocidad $V_o$. Aplicamos conservación de momentum en el instante en que salta el hombre desde el segundo carro: $0 = M\,V' + m\,(V' + u)$, donde $V'$ es la velocidad del carro con respecto al suelo.

Al llegar, este hombre, al primer carro, usamos la conservación del momentum en una colisión en que ambos objetos terminan viajando juntos: $m(u + V') = (m + M)\,V''$.

Se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $V'$ y $V''$. Si sumamos $V_o$ en ambas soluciones, obtenemos el valor de la velocidad con respecto al primer sistema de referencia.

VIII.66 ) $\Delta\,W = T\,\cos\,\alpha \cdot \Delta\,x, \quad T = \left(m\,g - M\,\dfrac{\Delta\,V_m}{\Delta\,t}\right).$ El ángulo $\alpha$ cambia durante el movimiento, si tomamos dos intervalos de tiempo muy próximos, se tiene que $\Delta\,x\,\cos\,\alpha = \Delta\,s$, donde $\Delta\,s$ es lo que ha bajado la cuerda que sostiene a la masa $m$ o, lo que es lo mismo, la variación del largo de la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por $h$, la masa $m$ y la cuerda.

Si designamos por $L$, la distancia entre la base que sostiene la polea y la masa $m$, entonces:

$$\sum_A^B \Delta W = \sum_A^B \left[ m\,g\,\Delta\,s - m\,\frac{\Delta\,V_m}{\Delta\,t}\,\Delta\,s \right] = m\,g\,\left[ \sqrt{L^2+h^2} - \sqrt{(L-x)^2+h^2} \right] - \frac{1}{2}\,m\,V_m^2,$$

pero $V_m$, se puede obtener de la conservación de energía del sistema:

$$(m+M)\,V_m^2 = m\,g\,\left[ \sqrt{L^2+h^2} - \sqrt{(L-x)^2+h^2} \right].$$

Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene el trabajo realizado en función del desplazamiento $x$.

VIII.67 ) Definamos CD, como la distancia entre los puntos C y D.

$E_i - E_f =$ Trabajo de las fuerzas disipativas.

a) $m\,g\,(h+R) = \mu\,m\,g\,CD \quad \Rightarrow \quad h = 2\,m.$

b) $m\,g\,(h'+R) = \mu\,m\,g\,CD \times n \quad \Rightarrow \quad n = 2,5$ veces. El carro se detiene en CD/2.

c) $m\,g\,(h+R) - \dfrac{1}{2}\,k\,x^2 = \mu\,m\,g\,CD \;\Rightarrow\; W_{resorte} = m\,g\,[\mu\,CD - (h+R)] = 3\times 10^4$ Joule.

VIII.68 ) En el punto P debe cumplirse que: $N + m\,g, \operatorname{sen}\theta = m\,v^2/r$. En P, $N=0$, entonces:

$v = \sqrt{g\,R\operatorname{sen}\theta}, \quad E_i = m\,g\,h = m\,g\,R\,(1+\operatorname{sen}\theta) + m\,v^2/2.$

$h = R(1+\frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta).$

VIII.69 ) Suponemos que cada eslabón viaja en forma independiente. La velocidad con la cual llega al piso depende de su posición relativa en la cadena.

Con el origen del eje de coordenadas y en el piso, se encuentra que la velocidad de caida de un eslabón que estaba situado a la altura $y$ es: $v^2 = 2\,g\,(h-y)$. La velocidad inicial de todos los eslabones es nula $v_i = 0$. La reacción del piso es igual a la variación de momentum de la cadena:

$$F_{ext} = \frac{\Delta P_{\text{eslabón}}}{\Delta t}, \quad \text{donde} \quad \Delta P_{\text{eslabón}} = P_f - P_i = (\mu\,\Delta\,y)\,v.$$

De aquí obtenemos:

$$\frac{\Delta\,P_{\text{eslabón}}}{\Delta\,t} = \mu\,\frac{\Delta\,y}{\Delta\,t}\,v = \mu\,v^2.$$

Para detener un eslabón se debe aplicar la fuerza externa $F_{\text{ext.}} = R = \mu\,v^2$, reemplazando $v^2 = -2\,g\,\mu\,(L-y)$. Si le sumamos la fuerza que mantiene en reposo el tramo de la cadena que ya está en el piso: $\mu\,g\,(L-y)$, tenemos para la reacción del piso:

$$R = 3\,\mu\,g\,(L-y)$$

.

VIII.70 ) Conservación del momentum: $m\,v = (m+M)\,v' \Rightarrow v' = m\,v/(M+m)$.

$E_i = (m+M)\,v'^2/2, \quad E_f = k\,\Delta^2, \quad W_{\text{fricción}} = -\mu\,(m+M)\,g\,\Delta$.

A partir de la transformación de la energía en trabajo:$E_i - E_f = W_{\text{fricción}}$, obtenemos:

$$v^2 = \frac{k\,(M+m)\,\Delta^2}{m^2} + \frac{2\,\mu\,g\,\Delta\,(M+m)^2}{m^2}.$$

VIII.71 ) Conservación de la Energía: $m\,v^2/2 = m\,g\,\ell$.

Al chocar *elásticamente* con el bloque, tenemos dos ecuaciones: $m\,v = M\,v' + m\,v''$ y $m\,v^2 = M\,v'^2 + m\,v''^2$. La energía en el rebote: $m\,v''^2 = m\,g\,\ell(1-\cos\theta)$

Del choque elástico se obtiene una solución con sentido físico: $v'' = -(\lambda-1)/(\lambda+1)\,v$, con $\lambda = M/m \geq 1$.

Reemplazando este valor en la ecuación del rebote, se obtiene el valor de $\theta$:
$\cos\theta = 4\,\lambda/(\lambda+1)^2$.

VIII.72 ) *Eje vertical:* $T\,\cos\theta = m\,g$.

*Eje horizontal:* $T\,\mathrm{sen}\,\theta = m\,\omega^2\,r, \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{g}{h}$.

VIII.74 ) a) El centro de masa se ubica a la mitad de la altura de la pila de bloques y en el punto medio de la distancia entre los extremos opuestos del primer y último bloque.

b) La pila se vuelca cuando el centro de masa del conjunto de bloques –que no incluye al primero–, cae más allá del extremo inferior del primer bloque.

VIII.75 )

$$\sum F = 0 = -\frac{G\,M_T\,m}{d^2} + \frac{G\,M_L\,m}{(d-d_{TL})^2} \quad \Rightarrow \quad M_T\,(d_{TL}-d)^2 = M_L\,d^2$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{2M_T\,d_{TL} \pm \sqrt{4\,M_T^2\,d_{TL}^2 - 4\,M_T\,(M_T-M_L)\,d_{TL}^2}}{2\,(M_T-M_L)}$$

Hemos considerado la Luna y la Tierra en reposo. Para resolver el problema incorporando la velocidad de rotación del sistema Tierra–Luna, siga los siguientes pasos:

i) Ubique el centro de masa del sistema Tierra–Luna,

ii) La masa de prueba $m$, debe estar girando en torno al CM con la misma velocidad angular que la Tierra y la Luna,

iii) Escriba el equilibrio de fuerzas, incluyendo la atracción de la Luna y de la Tierra en las fuerzas y, la aceleración centrípeta debido a la rotación que experimenta el cuerpo.

VIII.76 ) a) El caso crítico ocurre cuando la energía de una partícula es nula

$$E = 0 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{G\,M\,m}{r},$$

incorporando la definición de $H$ se obtiene: $\rho_{critico} = \dfrac{3H^2}{8\pi G}$

VIII.78 ) La fuerza total ejercida sobre una partícula de masa $m$ es la suma de las fuerzas provenientes de una infinidad de planos infinitamente delgados, cada uno con densidad $\sigma_o = \rho\,\Delta$, donde $\Delta$ es el espesor infinitesimal.

Como conocemos la fuerza de atracción de un plano infinitesimal y el de una esfera, podemos calcular la fuerza en cualquier punto.

a) $z > d/2$.

$$a_z = -\sum_{n=0}^{N} 2\,\pi\,G\,\rho\,\Delta = -2\,\pi\,G\,\rho\sum_{n=0}^{N}\Delta = -2\,\pi\,G\,\rho\,N\,\Delta = -2\,\pi\,G\,\rho\,d.$$

En la última igualdad, reemplazamos $N\,\Delta$ por $d$.

b) Para $z > \frac{d}{2}$ ($r_o \equiv$ diámetro de la cavidad esférica):

$$a_z = -2\,\pi\,G\,\rho\,d + \frac{4\,\pi}{3}\,r_o^3\,\rho\,\frac{G}{z^2}.$$

Para $\frac{d}{4} < z < \frac{d}{2}$:

$$a_z = -4\,\pi\,G\,\rho\,d + \frac{4\,\pi}{3}\,r_o^3\,\rho\,\frac{G}{z^2}.$$