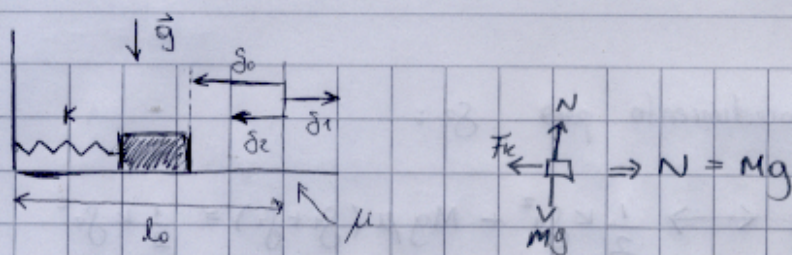


P2)



La energía inicial del sistema, con el resorte comprimido s_0 es

$$E_0 = \frac{1}{2} k s_0^2$$

Llega al punto s_1 , pero dado que hay roce y este lo afecta durante una distancia $s_0 + s_1$, vale decir, se pierde una cantidad de energía igual al trabajo de la fuerza de roce $W = -N \cdot \mu \cdot (s_0 + s_1) = -Mg\mu(s_0 + s_1)$

Sigue que, como la energía en el punto s_1 es $E_1 = \frac{1}{2} k s_1^2$ (no hay energía cinética). Se tiene lo siguiente

$$E_0 + W = E_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} k s_0^2 - Mg\mu(s_0 + s_1) = \frac{1}{2} k s_1^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} k s_1^2 + Mg\mu \cdot s_1 - \left(\frac{1}{2} k s_0^2 - Mg\mu s_0 \right) = 0$$

$$\rightarrow s_1 = \frac{-Mg\mu \pm \sqrt{M^2 g^2 \mu^2 + 4 \cdot \frac{k}{2} \left(\frac{1}{2} k s_0^2 - Mg\mu s_0 \right)}}{k}$$

$$= \frac{-Mg\mu \pm \sqrt{M^2 g^2 \mu^2 + k^2 s_0^2 - 2Mg\mu s_0 k}}{k}$$

$$= \frac{-Mg\mu \pm \sqrt{(k s_0 - Mg\mu)^2}}{k} \quad \text{pues la fuerza elástica es mayor a la de roce.}$$

$$= \frac{-Mg\mu \pm (k s_0 - Mg\mu)}{k}$$

Tomamos distancia positiva

$$s_1 = \frac{k s_0 - 2Mg\mu}{k}$$

Usando el mismo procedimiento para g_2 :

$$E_1 + W = E_2 \iff \frac{1}{2} k g_1^2 + M g \mu (g_1 + g_2) = \frac{1}{2} k g_2^2$$

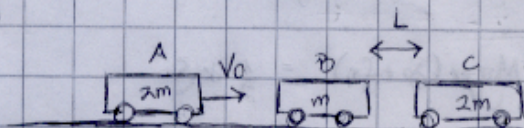
$$\iff g_2^2 - \frac{k}{2} + g_2 M g \mu - \left(\frac{1}{2} k g_1^2 - M g \mu g_1 \right) = 0$$

$$\rightarrow g_2 = \frac{-M g \mu \pm \sqrt{M^2 g^2 \mu^2 + \frac{4}{2} k \left(\frac{1}{2} k g_1^2 - M g \mu g_1 \right)}}{k}$$

$$\rightarrow g_2 = \frac{k g_1 - 2 M g \mu}{k} \quad (\text{signo positivo pues } g_2 \text{ es variaci3n de distancias})$$

Notemos que $g_{n+1} = \frac{k g_n - 2 M g \mu}{k} = g_n - \frac{2 M g \mu}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

P₃)



a) Inicialmente $E_i = \frac{1}{2} (2m) v_0^2 = m v_0^2$ y $p_i = 2m v_0$

Sabemos que como no hay rozamiento esta energa se mantiene, luego al chocar elsticamente:

$$E_f = \frac{2}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \quad p_f = 2m v_A + m v_B$$

Usando conservaci3n de energa y momentum:

$$E_i = E_f \iff \frac{2}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = m v_0^2 \rightarrow 2 v_A^2 + v_B^2 = 2 v_0^2 \quad (1)$$

$$p_i = p_f \iff 2m v_0 = 2m v_A + m v_B \rightarrow 2 v_A + v_B = 2 v_0 \quad (2)$$

$$\rightarrow v_B = 2 v_0 - 2 v_A$$

Reemplazando (2) en (1):

$$2 v_A^2 + (4 v_0^2 - 8 v_0 v_A + 4 v_A^2) = 2 v_0^2$$

$$\rightarrow 6V_A^2 - 8V_0V_A + 2V_0^2 = 0 \Leftrightarrow 3V_A^2 - 4V_0V_A + V_0^2 = 0$$

$$(3V_A - V_0)(V_A - V_0) = 0$$

$$\rightarrow V_A = \frac{V_0}{3} \vee V_A = V_0$$

$$\rightarrow V_A = \frac{V_0}{3} \vee V_A = V_0$$

En el segundo caso $V_B = 0$, es decir, no hay choque.

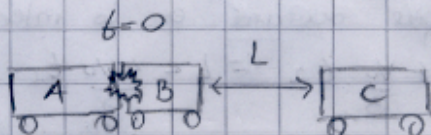
Debemos tomar $V_A = V_0/3$ y $V_B = 4V_0/3$

Con esta velocidad, B recorre L en $t_1 = \frac{3L}{4V_0}$

tiempo en que A recorre $L_A = V_A \cdot t_1 = \frac{V_0}{3} \cdot \frac{3L}{4V_0} = \frac{L}{4}$

"Dibujísticamente"

A partió aquí

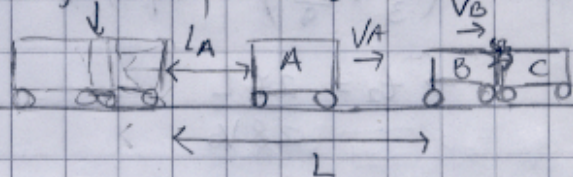


A adquiere $V_A = V_0/3$

B adquiere $V_B = V_0/3 \cdot 4$

Lugar de choque

$t = L$



Como se tiene un choque elástico, por conservación de energía y momento.

$$E_1 = \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{16V_0^2}{9} \right) = \frac{8V_0^2}{9}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m \bar{V}_B^2 + \frac{1}{2} 2m V_C^2 \quad p_2 = 2m V_C + m \bar{V}_B$$

$$p_1 = m V_0 = m \cdot \frac{4}{3} V_0$$

$$p_1 = p_2 \rightarrow \frac{4}{3} m V_0 = 2m V_C + m \bar{V}_B \rightarrow \bar{V}_B = \frac{4}{3} V_0 - 2V_C (*)$$

$$E_2 = E_1 \rightarrow \frac{1}{2} m \bar{V}_B^2 + \frac{1}{2} 2m V_C^2 = \frac{8V_0^2}{9} \rightarrow \bar{V}_B^2 + 2V_C^2 = \frac{16V_0^2}{9}$$

$$\rightarrow \left(\frac{16V_0^2}{9} - \frac{16V_0V_C}{3} + 4V_C^2 \right) + 2V_C^2 = \frac{16V_0^2}{9}$$

$$\rightarrow \left(\frac{46V_C^2}{3} - \frac{16V_0V_C}{3} = 3V_C^2 - 8V_0V_C = 0 \right)$$

$$\rightarrow V_C (3V_C - \frac{8V_0}{3}) = 0 \rightarrow V_C = 0 \vee V_C = \frac{8V_0}{9}$$

Tomando este último resultado $V_c = \frac{8V_0}{9}$ y $\bar{V}_B = \frac{4V_0}{3} - \frac{16V_0}{9}$

$$\Rightarrow \bar{V}_B = -\frac{4V_0}{9}$$

Claramente, como B va en sentido contrario a A luego del segundo choque, entonces chocará nuevamente.

b) Luego de este segundo choque tenemos las siguientes ecuaciones de cinemáticas.

$$X_A(t) = L_A + V_A \cdot t = L/4 + V_0/3 \cdot t$$

$$X_B(t) = L + \bar{V}_B \cdot t = L - \frac{4V_0}{9} \cdot t$$

El segundo choque ocurrirá en la intersección, t_2 :

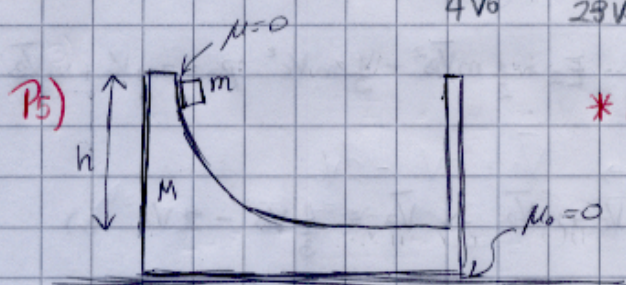
$$L/4 + \frac{V_0}{3} t_2 = L - \frac{4V_0}{9} t_2$$

$$t_2 \left(\frac{V_0}{3} + \frac{4V_0}{9} \right) = 3/4 L \Leftrightarrow t_2 \left(\frac{7V_0}{9} \right) = \frac{3}{4} L$$

$$\rightarrow t_2 = \frac{27L}{28V_0}$$

Sigue que el tiempo entre ambos choques $\Delta t = t_1 + t_2$

$$\Delta t = \frac{3L}{4V_0} + \frac{27L}{28V_0} = \frac{L(21+27)}{28V_0} = \frac{48L}{28V_0} = \frac{12L}{7V_0} //$$



* Nota: en la auxiliar se me olvidó tomar la energía de la rueda, ¡lamento!

$$E_0 = mgh, \quad P_0 = 0$$

cuando la masa baja al plano horizontal

$$E_1 = \frac{1}{2} m V_m^2 + \frac{1}{2} M V_M^2 \quad P_1 = m V_m + M V_M$$

Por conservación de energía y momentum

$$mV_m + MV_M = 0 \rightarrow V_M = -\frac{mV_m}{M}$$

$$E_0 = E_1 \Rightarrow mV_m^2 + MV_M^2 = 2mhg$$

$$\rightarrow V_m^2 = \frac{2mhg}{M} - mV_m^2$$

$$\rightarrow \frac{mV_m^2}{M} = \frac{2mhg}{M} - \frac{mV_m^2}{M} \Leftrightarrow 2mV_m^2 = 2mhg \rightarrow V_m = \pm \sqrt{hg}$$

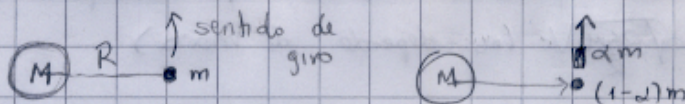
Tomando positivo $\rightarrow V_m = \sqrt{hg}$

$\rightarrow V_M = -\frac{m\sqrt{hg}}{M}$

Son las velocidades antes del choque, pues la masa m se desliza ejerciendo una fuerza (reacción de la normal) sobre la rampa.

Cuando choca, se usa la misma conservación y por tanto debemos tomar la otra solución $V_m = -\sqrt{hg}$ y $V_M = \frac{m\sqrt{hg}}{M}$.

Df)



1) Velocidad de órbita: usando dinámica

$$\vec{F}_g \leftarrow \bullet \quad F_g = F_c \Leftrightarrow \frac{GMm}{R^2} = \frac{m \cdot V^2}{R} \rightarrow V_o = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

2) Para que el satélite se detenga su momentum propio luego de eyectar la masa debe ser nulo.

$$p_i = m \cdot V_o = m \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad p_f = (1-\alpha)m \cdot 0 + \alpha m \cdot V_e$$

Con V_e velocidad de masa eyectada. Por conservación de momentum. $p_i = p_f$

$$m \sqrt{\frac{GM}{R}} = \alpha m \cdot V_e \rightarrow \alpha = \frac{1}{V_e} \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Pero desconocemos V_e . Veamos que para que la masa eyectada salga de órbita y escape del campo gravitacional debemos acudir a la velocidad de escape.

La velocidad de escape es la mínima velocidad para que un objeto se "libre" del campo de atracción de otro cuerpo.

En general, si la energía inicial para una masa m atraída por una masa M tal que m orbita circularmente a M a un radio R .

$$E_0 = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m v_e^2 = -\frac{GMm}{D} + \frac{1}{2} m v_f^2 = E_f$$

En cierto punto, si el cuerpo efectivamente escapa del campo

$D \rightarrow \infty$ para algún tiempo t y $v_f \rightarrow 0$ debido a la desaceleración continua. Luego $E_f = 0 + 0 = 0$

$$\rightarrow E_0 = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0$$

$$\rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Esta es la velocidad de escape, dado que para esta velocidad el cuerpo en algún momento se alejará $D \rightarrow \infty$ de M .

• Para el caso del problema visto v_e corresponde a dm y $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ (no depende de masa)

$$\rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{R}{2GM}} \cdot \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) Corresponde a la variación de energía que produce la explosión: $E_i = \frac{1}{2} m v_e^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{GM}{R} \right)$

$$\begin{aligned} E_f &= -\frac{GMm(1-\alpha)}{R} + \frac{1}{2} (m)(1-\alpha) v_e^2 + \frac{1}{2} m\alpha v_e^2 - \frac{GMm\alpha}{R} \\ &= -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m\alpha \cdot \left(\frac{2GM}{R} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Delta E| = E_i - E_f &= \frac{1}{2} m \frac{GM}{R} - \left(-\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m\alpha \cdot \frac{2GM}{R} \right) = \\ &= \frac{GMm}{2R} + \frac{2GMm}{2R} - \frac{2GMm\alpha}{2R} = \frac{GMm}{2R} (3 - 2\alpha) \end{aligned}$$

Que corresponde a la energía de eyección.