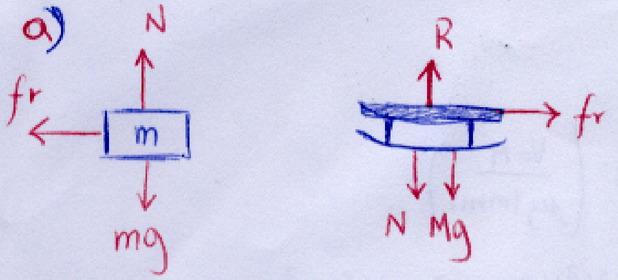
P1) a)



j = jabón
T = trineo

- $\sum F_{x_j} = -fr = m \cdot a_{x_j} \rightarrow \boxed{a_{x_j} = -\mu g}$
- $\sum F_{y_j} = N - mg = m \cdot a_{y_j} = 0 \rightarrow N = mg$

$$\boxed{fr = N \cdot \mu = mg \cdot \mu}$$

- $\sum F_{x_T} = fr = M \cdot a_{x_T} \rightarrow \boxed{a_{x_T} = \frac{\mu g m}{M}}$
- $\sum F_{y_T} = R - N - Mg = M \cdot a_{y_T} = 0 \rightarrow R = (m+M)g$

El jabón se detendrá cuando su velocidad con respecto al trineo sea nula, es decir, cuando ambos cuerpos tengan igual velocidad respecto al eje de referencia.

- $V_j = V_0 + a_{x_j} \cdot t$ (Velocidad del jabón con respecto al inicio)
- $V_T = a_{x_T} \cdot t$ (Velocidad de trineo con respecto al inicio)
- Igualando las velocidades obtenemos que para un tiempo t_d (tiempo de detención del jabón con respecto al trineo):

$$V_j = V_T \leftrightarrow V_0 + a_{x_j} \cdot t_d = a_{x_T} \cdot t_d \longleftrightarrow V_0 - \mu g \cdot t_d = \frac{\mu g m}{M} \cdot t_d \rightarrow \boxed{t_d = \frac{V_0}{(\mu g)(1+\frac{m}{M})} = \underbrace{\frac{V_0 \cdot M}{\mu g (m+M)}}_{\text{tiempo que tarda el jabón en detenerse}}}$$

Nota: esto es equivalente a buscar el tiempo tal que la velocidad del jabón con respecto al trineo sea nula, usando movimiento relativo.

Con este tiempo podemos obtener a que distancia se encuentra el jabón y el trineo en t_d.

Posición trineo $X_T(t) = a_{x_T} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{\mu g m}{2M} \cdot t^2 \rightarrow X_T(t_d) = \frac{\mu g m}{2M} \cdot t_d^2 = \frac{\mu g m}{2M} \cdot \left(\frac{V_0 \cdot M}{\mu g (m+M)}\right)^2$

$\rightarrow X_T(t_d) = \frac{V_0^2 \cdot m \cdot M}{2\mu \cdot g (m+M)^2}$ posición a la que se encuentra el trineo cuando el jabón se ~~ha~~ detenido con respecto a este.

Posición jabón: $X_j(t) = V_0 \cdot t + a_{x_j} \cdot \frac{t^2}{2}$

en t_d: $X_j(t_d) = V_0 \left(\frac{V_0 \cdot M}{\mu g (M+m)} \right) + \frac{\overbrace{(-\mu g)}^{a_{x_j}}}{2} \cdot \left(\frac{V_0 M}{\mu g (m+M)} \right)^2$

$$= \frac{V_0^2 \cdot M}{\mu \cdot g (M+m)} - \frac{V_0^2 \cdot M^2}{2 \mu g (m+M)^2} = \frac{V_0^2 M \cdot 2 (M+m) - V_0^2 \cdot M^2}{2 \mu g (m+M)^2}$$

$$= \frac{2m V_0^2 \cdot M + 2 M^2 V_0^2 - V_0^2 M^2}{2 \mu g (m+M)^2} = \boxed{\frac{V_0^2 \cdot M (2m + M)}{2 \mu \cdot g (m+M)^2}}$$

Posición a la que se encuentra el jabón respecto al inicio al momento de detenerse.

b) Para esta parte nos dividimos en dos casos. Usaremos la variable ℓ para representar la distancia desde el inicio al tope tal que $\ell = \frac{V_0^2 \cdot m}{4 \mu \cdot g M}$

Caso 1: $\ell < X_T(t_d)$ si ℓ es menor a la distancia recorrida por el trineo cuando el jabón se ha detenido, entonces el trineo choca con el tope cuando el jabón aún tiene velocidad con respecto al trineo.

Calculando el tiempo que tarda el trineo en chocar con el tope t_ℓ.

$$\ell = a_{x_T} \cdot \frac{t_\ell^2}{2} \rightarrow t_\ell^2 = 2 \cdot \ell \cdot \left(\frac{\mu \cdot g \cdot m}{M} \right)^{-1} \rightarrow \boxed{t_\ell = \sqrt{\frac{2 \ell M}{\mu g m}}}$$

Para este tiempo el jabón se encuentra a $X_j(t_\ell)$ del origen.

$$X_j(t_\ell) = V_0 \cdot t_\ell + \frac{a_{x_j}}{2} \cdot t_\ell^2 =$$

Reemplazando valores $X_j(t_\ell) = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \ell M}{\mu g m}} + \frac{-\mu g}{2} \left(\frac{2 \ell M}{\mu g m} \right) = V_0 \sqrt{\frac{2 \ell M}{\mu g m}} - \frac{\ell M}{m}$

Por lo que el jabón se encuentra a $d_j = X_j(t_\ell) - \overbrace{X_T(t_\ell)}^{\ell}$ del inicio del trineo.

$$d_j = \left(V_0 \sqrt{\frac{2 \ell M}{\mu g m}} - \frac{M}{m} \cdot \ell \right) - \ell = V_0 \sqrt{\frac{2 \ell M}{\mu g m}} - \frac{\ell (M+m)}{m} \;//$$

Veamos que si $d_j < D$ entonces la distancia que nos falta recorrer para alcanzar el fin del trineo es $(D - d_j)$. Veamos el caso en que luego de recorrer esta distancia el jabón no se ha detenido (de lo contrario ~~ela~~ solución es trivial)

El jabón tarda en llegar a $D + X_{trineo}$ un tiempo τ_D, donde X_{trineo} es $X_{trineo} = \ell - D \rightarrow$ jabón debe llegar a ℓ con respecto al inicio.
el jabón tarda en llegar a ℓ: $t_{j\ell}$ tq

$$X_j(t_{j\ell}) = V_0 \cdot t_{j\ell} + \frac{a_{x_j} \cdot t_{j\ell}^2}{2} = \ell$$

$$\rightarrow t_{j\ell} = \frac{-V_0 \pm \sqrt{V_0^2 + \frac{4a_{x_j}}{2} \cdot \ell}}{a_{x_j}} = \frac{-V_0 \pm \sqrt{V_0^2 - 2\mu g \cdot \ell}}{-\mu g}$$

$$t_{j\ell} = \frac{V_0 \mp \sqrt{V_0^2 - 2\mu g \ell}}{\mu g}$$

tomamos el signo negativo pues si fuera positivo estaríamos tomando el caso en que la velocidad se hace cero y luego el jabón se mueve hacia la izquierda.

$$\rightarrow \boxed{t_{j\ell} = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2\mu g \ell}}{\mu g}}$$

En este punto la velocidad del jabón será

$$V_x = V_0 - \mu g \cdot t_{j\ell} = V_0 - \cancel{\mu g}\left(\frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2\mu g \ell}}{\cancel{\mu g}}\right)$$

$$\boxed{V_x = \sqrt{V_0^2 - 2\mu g \ell}}$$

Velocidad con la que el jabón llega al final del trineo.
¿Qué obtengo con esto? una vez que se acaba el trineo ocurre una caída parabólica.

Las ecuaciones para la caída parabólica son

$$X(t) = \ell + \sqrt{V_0^2 - 2\mu g \ell} \cdot t$$

$$Y(t) = H - \frac{g}{2} t^2$$

Cuando cae al piso $Y(t_c) = 0$

$$\rightarrow \quad 0 = H - \frac{g}{2} t_c^2 \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Reemplazando en $X(t_c) = \ell + \sqrt{V_0^2 - 2\mu g \ell}\sqrt{\frac{2H}{g}}$

esto último es la distancia a la que cae el jabón respecto al origen.
Nos piden calcular respecto al trineo, esto es tomando $(\ell - D)$ posición del inicio del trineo.

$$\text{Dist} = X(t_c) - (\ell - D) = \sqrt{V_0^2 - 2\mu g \ell} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} + D$$

Caso 2: $\ell > X_T(t_d)$ para este caso el jabón va a la misma velocidad que el trineo cuando topa (pues el jabón ya se ha detenido respecto al trineo).

Sabemos de a) que cuando el jabón se detiene, este se encuentra a $\frac{V_0^2 \cdot M(2m+M)}{2\mu g (m+M)^2}$ del inicio. Es decir que se encuentra a $X_j(t_d) - \underbrace{X_T(t_d)}_{\text{Pos. del trineo en } t_d}$ del inicio del trineo

$$\rightarrow X_{j\,d\,r_T}(t_d) = \frac{V_0^2 M(2m+M)}{2\mu g (m+M)^2} - \frac{V_0^2 \cdot m + M}{2\mu g (m+M)^2} = \frac{V_0^2 M(m+M)}{2\mu g (m+M)^2} = \frac{V_0^2 M}{2\mu g (m+M)}$$

Con esto, sabemos que cuando el trineo topa el jabón se encontrará a $((\underbrace{\ell - D}_{\text{Pos. del inicio del trineo}}) + X_{j\,d\,r_T})$ del inicio

Por lo que debe recorrer $(l - X_{j c/r T})$ para llegar al fin del trineo.
Ahora, cuando el trineo choque con el tope y el jabón siga con la velocidad del trineo, esta será equivalente a la que llevaba el trineo al momento de detenerse el jabón, pues cuando el jabón se detiene no existe roce y el trineo deja de acelerar.

$$V_{2} = a_{xT} \cdot t_d = \frac{\mu g m}{M} \cdot \left(\frac{V_0 \cdot M}{\mu g (m+M)} \right) = \frac{V_0 \cdot m}{M+m}$$

Luego, para obtener la velocidad con la que se llega al final del trineo.

$$2 \cdot \overbrace{(-\mu g)}^{a_{xj}} \cdot (l - X_{j c/r T}) = V_f^2 - V_2^2$$

$$V_2^2 - 2 \cdot \mu g \left(l - \frac{V_0^2 M}{2\mu g (m+M)} \right) = V_f^2 \rightarrow V_f = \sqrt{\left(\frac{V_0^2 m^2}{(M+m)^2} \right) - 2\mu g \left(l - \frac{V_0^2 M}{2\mu g (m+M)} \right)}$$

$$V_f = \sqrt{\frac{V_0^2 m^2}{(M+m)^2} - \mu l g \cdot 2 + \frac{V_0^2 M}{m+M}} = \sqrt{\frac{V_0^2 m^2}{(M+m)^2} + \frac{V_0^2 M (m+M)}{(m+M)^2} - 2\mu l g}$$

$$V_f = \sqrt{\frac{V_0^2 (M^2 + Mm + m^2)}{(m+M)^2} - 2\mu l g}$$

Luego, las ecuaciones de las parábolas con respecto al trineo son:

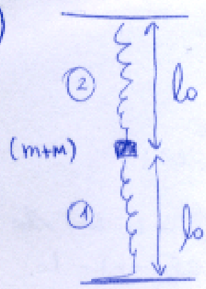
$$X(t) = D + V_f \cdot t \qquad Y(t) = H - \frac{g}{2} t^2$$

$$\rightarrow Y(t_{c2}) = 0 \Rightarrow t_{c2} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$\rightarrow X(t) = (D) + \sqrt{\frac{V_0^2 (M^2 + Mm + m^2)}{(m+M)^2} - 2\mu l g} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Distancia con respecto al inicio del trineo.

P2)

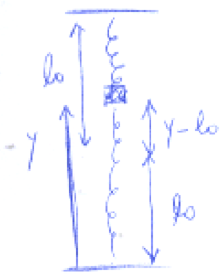


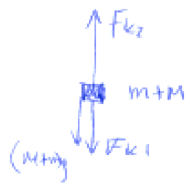
No tomamos en cuenta el tamaño de la caja.

Notando que si se tiene una elongación $(y - l_0)$

Entonces $F_{k1} = k(y - l_0)$ (hacia abajo)

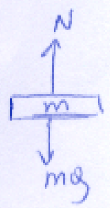
$F_{k2} = k(y - l_0)$ (hacia arriba)





Como las fuerzas tienen sentidos contrarios

$$\sum F_y = F_{k2} - F_{k1} - (M+m)g = (M+m)a_y$$
$$= -k(y-l_0) + k(l_0 - y) - (M+m)g = (M+m)a_y$$
$$= -2k(y-l_0) - (M+m)g = (M+m)a_y \quad (1)$$



$\rightarrow \sum F_{ym} = N - mg = m \cdot a_y$

Buscamos elongación para $N \approx 0 \rightarrow a_y = -g$

Reemplazando en (1) se tiene

$$-2k(y-l_0) - (M+m)g = (M+m)\cdot -g$$
$$2k(y-l_0) = 0$$
$$y - l_0 = 0$$

$\rightarrow \boxed{y = l_0}$

Es decir, para $y = l_0$ la moneda no se despega. Para obtener las oscilaciones imponemos equilibrio en (1) $\rightarrow a_y = 0$

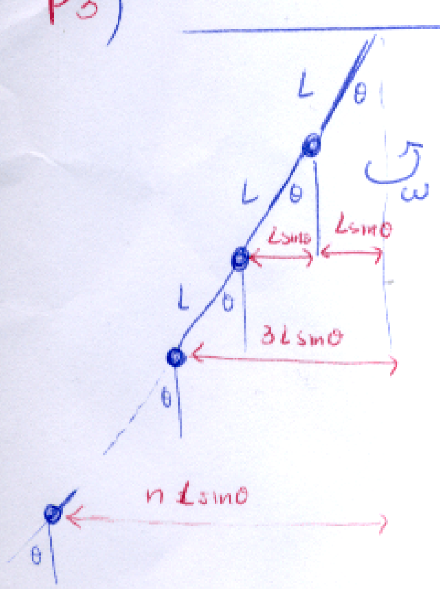
$\rightarrow -2ky_0 + 2kl_0 = (M+m)g$ Para este y_0 la moneda también tiene aceleración nula.

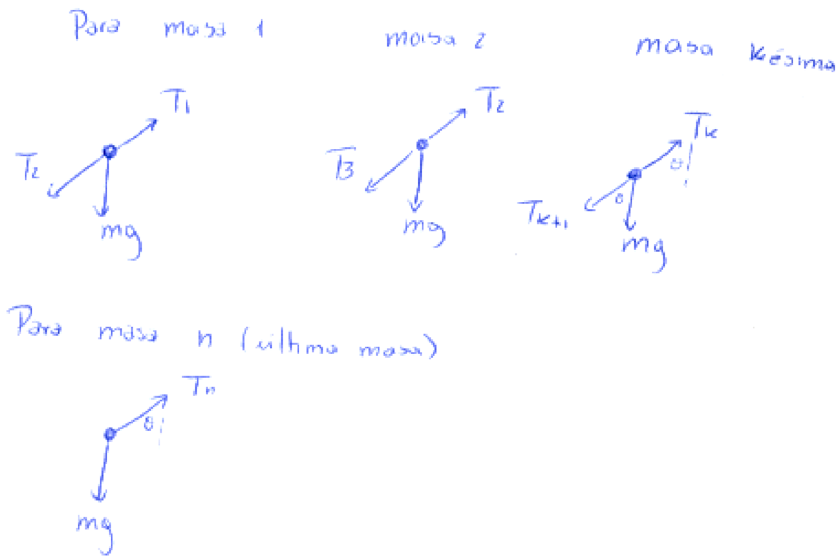
$$\rightarrow y_0 = \frac{2kl_0 - (M+m)g}{2k} = l_0 - \frac{(M+m)g}{2k}$$

Como las oscilaciones ocurren en torno a la posición de equilibrio

$A = y - y_0 = \frac{(m+M)g}{2k}$ máxima oscilación tal que la moneda no despega.

P3)





Veamos que en el caso general

radio de giro de masa k-ésima

$$k: \sum F_{\hat{r}} = -T_{k+1}\sin\theta + T_k \sin\theta = m\cdot a_{\hat{r}} = m\cdot a_c = m\cdot\omega^2\cdot \underbrace{k\cdot L\sin\theta}$$

$$\sum F_y = T_k\cos\theta - T_{k+1}\cos\theta - mg = 0 \rightarrow T_{k+1} = T_k - \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$n: \sum F_y = T_n\cos\theta - mg = 0 \rightarrow T_n = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad \rightarrow T_k = T_{k+1} + \frac{mg}{\cos\theta}$$

Es decir, para T_{n-1}, usando la fórmula para T_k tenemos, para $k=n-1$

$$T_{n-1} = T_n + \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{2mg}{\cos\theta} \text{ , para } k=n-2 \rightarrow T_{n-2} = T_{n-1} + \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{3\,mg}{\cos\theta}$$

... Podemos notar que $T_k = \frac{(n-k+1)\,mg}{\cos\theta}$ para cualquier k.

Luego, en el eje radial:

$$-T_{k+1}\cancel{\sin\theta} + T_k\cancel{\sin\theta} = m\omega^2 kL\cancel{\sin\theta}$$

$$\rightarrow -T_{k+1} + T_k = m\omega^2 k\cdot L \rightarrow -\frac{(n-k)\,mg}{\cos\theta} + \frac{(n-k+1)\,mg}{\cos\theta} = m\omega^2 kL$$

$$\Leftrightarrow \frac{mg}{\cos\theta} = m\omega^2 kL \rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{Lk\cos\theta}}$$

Pero notemos que según lo obtenido, la velocidad angular depende de k, vale decir, depende de la masa que se tome (o su número asociado) y por ende no todas las masas giran con igual ω, por lo que no hay valor válido para el giro tal que las partículas sean colineales.