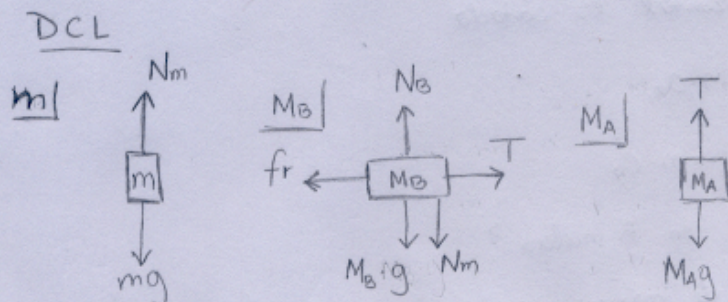


Pauta Auxiliar 5 - F11001-07.

P1 Dado que no existe roce entre m y M_B , m se deslizará sin moverse, pues no hay fuerzas que actúen sobre m en el eje horizontal. Por ende, para obtener el tiempo total necesitamos saber el tiempo que tarda m en quedar en el aire, es decir, el tiempo que tarda M_B en recorrer la distancia D y sumar a ello el tiempo que tarda en caer desde la altura H . Para obtener lo primero necesitamos la aceleración horizontal de M_B .



$$\sum F_m = N_m - mg = m \cdot a_{ym} = 0 \quad (\text{Pues } m \text{ inicialmente se queda sobre } M_B)$$

$$\rightarrow N_m = mg$$

$$\sum F_{By} = N_B - M_B \cdot g - N_m = M_B \cdot a_y = 0 \rightarrow N_B = M_B \cdot g + mg = g(M_B + m)$$

$$\sum F_{Bx} = T - f_r = M_B \cdot a_x \quad (1)$$

$$\sum F_A = T - M_A \cdot g = M_A \cdot a_y \quad (2)$$

Notando que cuando M_A baja ($a_y < 0$) entonces M_B se mueve la misma distancia hacia la derecha ($a_x > 0$). Se tiene $a_x = -a_y$

Luego

$$(1) \wedge (2) \rightarrow \frac{T - f_r}{M_B} = - \frac{(T - M_A \cdot g)}{M_A} \rightarrow T \cdot M_A - f_r \cdot M_A = -T M_B + M_A \cdot M_B \cdot g$$

$$\rightarrow T(M_A + M_B) = M_A(M_B \cdot g + f_r) = M_A(M_B \cdot g + g(M_B + m) \cdot \mu)$$

$$\rightarrow T = M_A \cdot g \left(\frac{M_B(1 + \mu) + m\mu}{M_A + M_B} \right)$$

Reemplazando la tensión en

$$a_x = \frac{T - f_r}{M_B} = \frac{M_A \cdot g (M_B(1 + \mu) + m\mu)}{M_B(M_A + M_B)} - \frac{g}{M_B} (M_B + m) \cdot \mu$$

Luego, usando la ecuación de cinemática $X(t) = X_0 + V_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2$

$$\rightarrow D = \frac{a_x}{2} \cdot t_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2D}{a_x}} \quad (\text{tomamos signo positivo})$$

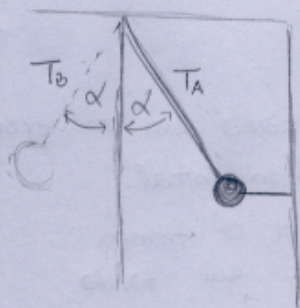
Por otro lado, por el eje y tenemos caída libre.

$$0 = H - \frac{g}{2} t_2^2 \rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Sigue que el tiempo total es $t_{tot} = t_1 + t_2 = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{H}{g}} + \sqrt{\frac{D}{a_x}} \right)$

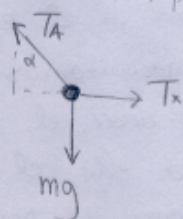
Para la parte b) solo deben reemplazar t_{tot} en la ec de cinemática de M_B : $X = \frac{a_x}{2} \cdot t_{tot}^2$

P2



Denominemos T_x a la tensión de la cuerda horizontal que posteriormente se rompe.

Inicialmente, para A.

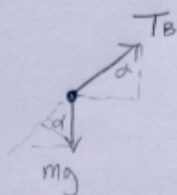


$$\sum F_{Ay} = T_A \cos \alpha - mg = 0 \quad (\text{pues se mantiene en la posición})$$

$$\rightarrow T_A = \frac{mg}{\cos \alpha}$$

$$\sum F_{Ax} = -T_A \sin \alpha + T_x = 0$$

Ahora, para B, cuando la cuerda horizontal es cortada



$$\rightarrow \sum F_{Bx} = T_B \sin \alpha = m \cdot a_x$$

$$\sum F_{By} = T_B \cos \alpha - mg = m \cdot a_y$$

¿Son ambas aceleraciones en B nulas?

No, dado que B es la posición de máxima oscilación ocurre algo similar a la altura máxima de un objeto que es lanzado hacia arriba, en aquel punto su velocidad es nula, pero su aceleración en y lo sigue afectando. Análogamente la velocidad en B es nula pero no sus aceleraciones, ¿entonces qué hacemos? dado que la velocidad es nula podemos concluir que su aceleración centrípeta, vale decir, su aceleración en el eje radial si es nula. De hecho $a_c = \frac{v_T^2}{R}$.

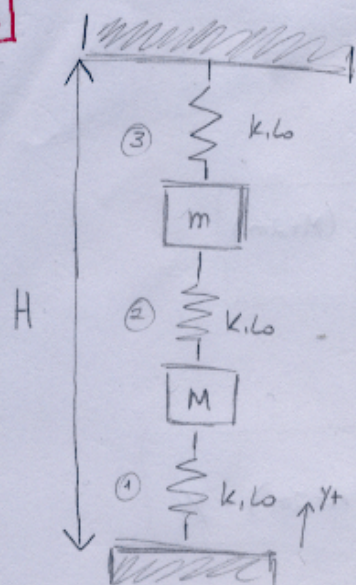
Luego, en el eje radial

$$\sum F_r = T_B - mg \cos \alpha = a_c \cdot m = 0$$

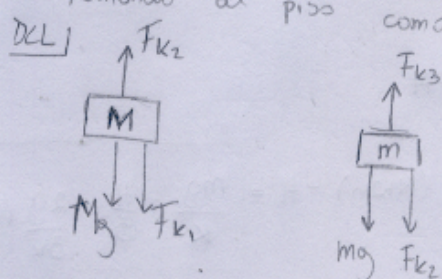
$$\rightarrow T_B = mg \cos \alpha$$

$$\rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \cos^2 \alpha \quad \parallel$$

P3]



* En clases tomamos $H = 3l_0$, el caso es el mismo
 Tenemos que obtener la posición de cada masa
 tal que el sistema se encuentre en equilibrio.
 Podemos obtener las posiciones de las ecuaciones
 de fuerza de los resortes, pues $F_k = k|L - l_0|$
 Tomando al piso como eje de referencia:



$$\sum F_M = F_{k2} - Mg - F_{k1} = M \cdot a_{ym} \quad (1)$$

$$\sum F_m = F_{k3} - mg - F_{k2} = m \cdot a_{ym} \quad (2)$$

Sea y_1 e y_2 las posiciones de M y m respectivamente:

$F_{k1} = k(y_1 - l_0)$ veamos que si $y_1 > l_0$ intuitivamente el resorte está en expansión y por ende la fuerza debería ser negativa en nuestras ecuaciones, como en nuestras ecuaciones ya se le dio signo negativo en $\sum F_M$, F_{k1} debe ser > 0 si $y_1 > l_0$.

$F_{k2} = k((y_2 - y_1) - l_0)$ Notemos que $(y_2 - y_1)$ es la distancia entre ambas masas, es decir, el largo final del segundo resorte. Por signo si $(y_2 - y_1) > l_0$, F_{k2} debe ser mayor a cero en $\sum F_M$ y negativa en $\sum F_m$ pues el resorte se está estirando.

$F_{k3} = k((H - y_2) - l_0)$ Análogo a F_{k2} .

Para que el sistema esté en equilibrio $a_{ym} = a_{ym} = 0$

$$(1) \rightarrow k((y_2 - y_1) - l_0) - Mg - k(y_1 - l_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow y_2 \cdot k - y_1 \cdot k - l_0 \cdot k - Mg - y_1 \cdot k + l_0 \cdot k = 0 \rightarrow y_2 = \frac{Mg + 2y_1 \cdot k}{k}$$

$$(2) \rightarrow k((H - y_2) - l_0) - mg - k((y_2 - y_1) - l_0)$$

$$\Leftrightarrow kH - ky_2 - kl_0 - mg - ky_2 + ky_1 + kl_0 = 0 \rightarrow y_1 = \frac{mg + 2ky_2 - kH}{k}$$

Reemplazando y_1 en y_2

$$y_2 = \frac{Mg}{k} + 2 \left(\frac{mg}{k} + 2y_2 - H \right) = \frac{Mg}{k} + \frac{2mg}{k} + 4y_2 - 2H$$

$$\rightarrow -3y_2 = \frac{g}{k} (M+2m) - 2H \rightarrow y_2 = \frac{2H}{3} - \frac{g}{3k} (M+2m)$$

$$y_1 = \frac{mg}{k} + 2 \left(\frac{2H}{3} - \frac{g}{3k} (M+2m) \right) - H$$

$$\rightarrow y_1 = \frac{mg}{k} + \frac{4H}{3} - \frac{2g}{3k} (M+2m) - H = \frac{mg}{k} + \frac{H}{3} - \frac{2g}{3k} (M+2m) = y_1$$

P4 a) Nos piden calcular la normal de m



En el eje radial $\sum F_r = N - mg \cos \theta = a_c \cdot m$

¿Cuánto vale a_c ? $a_c = \frac{v_t^2}{R}$

Bueno tenemos el radio, pero la velocidad tangencial no es siempre la misma, solo conocemos su valor en el punto más bajo de la trayectoria.

Por conservación de energía

$$\underbrace{mgh}_{\text{E. potencial gravitatoria}} + \underbrace{\frac{v^2 \cdot m}{2}}_{\text{Energía cinética}} = \text{constante}, \text{ es decir, la energía total siempre se mantiene y por ello}$$

$$\underbrace{m \cdot g \cdot 0}_{\text{Punto más bajo}} + \frac{v_0^2 \cdot m}{2} = \frac{v_t^2 \cdot m}{2} + mgh \rightarrow 2hg = v_0^2 - v_t^2$$

¿Cuánto vale h ?

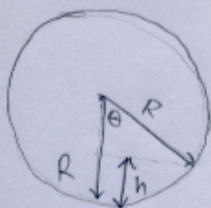
Según el ángulo θ y del dibujo, h es el radio menos la proyección del radio según el ángulo.

$$h = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta)$$

¿A qué se parece esto?

$$2 \cdot a \cdot d = v_f^2 - v_i^2$$

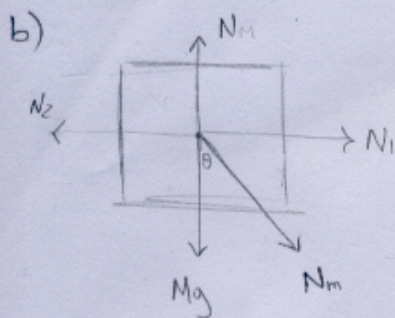
Donde $a = g$ y $d = h$ (signos están al revés). Pero esta ecuación de cinemática es más complicada de entender si la usamos directamente en este caso.



Luego $2gR(1 - \cos \theta) = v_0^2 - v_t^2 \rightarrow v_t = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)}$

$$\rightarrow N = a_c \cdot m + mg \cos \theta = m \frac{v_t^2}{R} + mg \cos \theta = \frac{v_0^2 \cdot m}{R} - \frac{2g(1 - \cos \theta) \cdot m}{R} + mg \cos \theta$$

$$N = \frac{v_0^2 m}{R} - mg(2 - 3 \cos \theta)$$



Para que la bolita no pierda contacto con la superficie debemos imponer $N_m \approx 0$ (pues pese a que debe ser mayor que cero lo aproximamos por comodidad)

$$\rightarrow N_m = \frac{V_0^2 \cdot m}{R} - mg(2 - 3\cos\theta) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{V_0^2 = (2 - 3\cos\theta)gR} \quad (1)$$

Por otro lado, para M , nos importa el eje N_1 y, $N \approx 0$

$$\rightarrow \sum F_{ny} = N - Mg - N_m \cos\theta = 0$$

$$N \approx 0 \rightarrow N_m \cos\theta = -Mg$$

$$\rightarrow \frac{V_0^2 \cdot m}{R} \cdot \cos\theta - mg \cos\theta (2 - 3\cos\theta) = -Mg$$

$$\rightarrow \frac{V_0^2 \cdot m}{R} = 2mg \cos\theta - 3mg \cos^3\theta - Mg$$

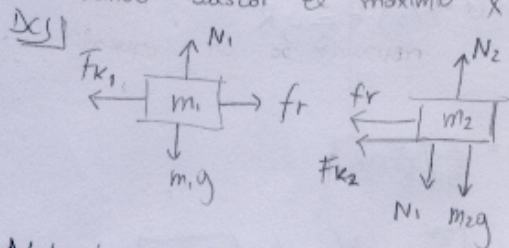
$$\rightarrow V_0^2 = 2Rg \cos\theta - 3Rg \cos^3\theta - \frac{MgR}{m}$$

$$\boxed{V_0^2 = gR (\cos\theta (2 - 3\cos^2\theta) - \frac{M}{m})} \quad (2)$$

Por lo que V_0 debe estar entre $V_0 < \sqrt{(2 - 3\cos\theta)gR}$

$$V_0 > \sqrt{gR (\cos\theta (2 - 3\cos^2\theta) - \frac{M}{m})}$$

P5 Debemos buscar el máximo x tal que los bloques se muevan en conjunto.



$$\sum F_{y1} = N_1 - m_1 g = 0 \rightarrow N_1 = m_1 g$$

$$\sum F_{x1} = -F_{k1} + f_r = a_{x1} \cdot m_1$$

$$= -k_1(x - l_0) + \mu \cdot N_1 = a_{x1} \cdot m_1 \quad (1)$$

$$\sum F_{y2} = N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \rightarrow N_2 = m_1 g + m_2 g$$

$$\sum F_{x2} = -f_r - F_{k2} = -f_r - k_2(x - l_0) = m_2 \cdot a_{x2} \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow -\frac{\mu \cdot m_1 \cdot g}{m_2} - \frac{k_2(x - l_0)}{m_2} = a_{x2}$$

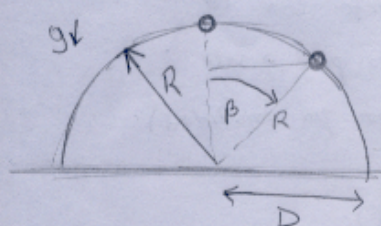
$$\rightarrow -\frac{k_1}{m_1} \cdot x + \frac{l_0 k_1}{m_1} + \mu \cdot g = -\frac{\mu m_1}{m_2} \cdot g - \frac{k_2(x - l_0)}{m_2} \Leftrightarrow -k_1 \cdot m_2 \cdot x + l_0 k_1 \cdot m_2 + \mu g m_1 m_2 = -\mu m_1^2 g - m_2 k_2 (x - l_0)$$

$$\rightarrow -k_1 m_2 x + m_2 k_2 x = -l_0 k_1 m_2 + \mu g m_1 m_2 - \mu m_1^2 g + m_2 k_2 l_0$$

$$\rightarrow x(k_2 m_1 - k_1 m_2) = l_0(k_2 m_1 - k_1 m_2) - \mu g m_1(m_2 + m_1)$$

$$\boxed{x = l_0 - \frac{\mu g m_1 (m_2 + m_1)}{k_2 m_1 - k_1 m_2}}$$

P6



a) NCL



a) Buscamos β tal que $N=0$

$$\sum F_r = mg \cos \beta - N = m \cdot a_c, N=0 \rightarrow \cos \beta = \frac{a_c}{g}$$

¿Cómo calculamos a_c ? al igual que en p4)

$$\text{Como } a_c = \frac{V_t^2}{R} \text{ y } 2 \cdot g \cdot R(1 - \cos \beta) = V_t^2 - 0^2$$

$$\rightarrow V_t = \sqrt{2gR(1 - \cos \beta)}$$

$$\rightarrow a_c = 2g(1 - \cos \beta)$$

$$\rightarrow \cos \beta = 2(1 - \cos \beta) \Leftrightarrow \cos \beta = 2 - 2\cos \beta \rightarrow 3\cos \beta = 2$$

$$\rightarrow \cos \beta = 2/3$$

$$\rightarrow \beta = \arccos(2/3)$$

b) Al momento de separarse tenemos las siguientes ecuaciones: **INVOCANDO AL DIOS DE LA MATRACA**

Dado que se separa al alcanzar el ángulo β : $V_t^2 = 2gR(1 - 2/3) = \frac{2}{3}gR$

Proyectando



$$V_y = V_t \sin \beta \quad \wedge \quad V_x = V_t \cos \beta$$

$$V_y = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \cdot \sin \beta \quad \wedge \quad V_x = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \cos \beta = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gR}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow V_y = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}gR}$$

$$Y(t) = R \cos \beta - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}gR} \cdot t - \frac{g}{2}t^2 = \frac{2R}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}gR} \cdot t - \frac{g}{2}t^2$$

$$X(t) = R \sin \beta + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gR} \cdot t$$

Para un tiempo de impacto t_b : $Y(t_b) = 0$ $\wedge$ $X(t_b) = D$ (desconocida)

$$0 = \frac{2}{3}R - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}gR} \cdot t_b - \frac{g}{2}t_b^2 \Leftrightarrow t_b^2 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{10R}{3g}} \cdot t_b - \frac{4R}{3g} = 0$$

$$\rightarrow t_b = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{10R}{3g}} \pm \sqrt{\frac{4 \cdot 10R}{9 \cdot 3g} + \frac{16R}{3g}} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{10R}{3g}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{188R}{27g}} = -\sqrt{\frac{2}{6}}\sqrt{\frac{10R}{3g}} \pm \sqrt{\frac{47}{27}}\sqrt{\frac{R}{g}}$$

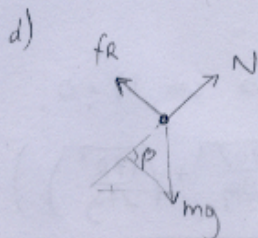
$$t_D = -\frac{2}{6} \sqrt{\frac{10R}{3g}} + \sqrt{\frac{4R}{27g}} = -\frac{2}{6} \sqrt{\frac{10R}{3g}} + \sqrt{\frac{4R}{27g}}$$

Reemplazando en x

$$D = R \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g R} \cdot \left(-\frac{2}{6} \sqrt{\frac{10R}{3g}} + \sqrt{\frac{4R}{27g}} \right)$$

c) Sigüente página

$$\rightarrow \cos \beta = \frac{R - V^2}{2gR} = 1 - \frac{V^2}{2gR}$$



Requerimos que a_θ (aceleración en eje angular) de la bolita sea mayor o cero, aproximadamente $a_\theta \approx 0$

$$mg \cos \beta - N = m \cdot a_c \quad (1)$$

$$-f_R + mg \sin \beta = m \cdot a_\theta \quad (2)$$

Como parte desde el reposo $a_c = 0 \rightarrow N = mg \cos \beta$

$$(2) \rightarrow -f_R + mg \sin \beta = m \cdot a_\theta \approx 0$$

$$\rightarrow -mg \cos \beta \cdot \mu + mg \sin \beta = 0 \rightarrow \boxed{\mu = \tan \beta}$$

e) Claramente debemos hacer que $N > 0$ en el instante inicial, $N \approx 0$. En aquel instante la aceleración centrípeta dependerá de V_{max} del enuniciado.

$$\begin{matrix} -N + mg \cos \beta = m \cdot a_c = m \cdot \frac{V_{max}^2}{R} \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix} \rightarrow V_{max}^2 = gR \cos \beta$$

Como en la cúspide, $\beta = 0 \rightarrow \cos(\beta) = 1$

$$\rightarrow V_{max} = \sqrt{gR} //$$

Dudas a andres11@gmail.com

c) Para llegar desde D a la zona superior de la cúpula alcanzando esta última con velocidad nula, es claro que debe alcanzar el punto en que se despegó (anteriormente calculado) con la velocidad de despegue calculada anteriormente, pero con signo contrario pues estas condiciones se dieron en a) y en a) se comienza con velocidad nula.

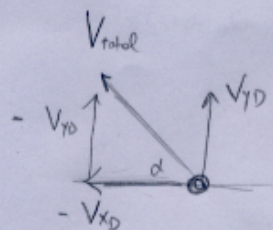
Veamos que se llega a D con $V_{yD} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{10}{3} gR} - g \cdot t_D$

$$V_{yD} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{10}{3} gR} - g \left(\frac{-2}{6} \sqrt{\frac{10R}{3g}} + \sqrt{\frac{47R}{27g}} \right)$$

La velocidad en x se mantiene constante

$$V_{xD} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} gR}$$

Luego para que llegue a la cúspide de la semiesfera con $V_f = 0$.



$$\tan \alpha = \frac{-V_{yD}}{-V_{xD}} = \frac{\left(-\frac{1}{3} \sqrt{\frac{10}{3} gR} + g \left(\frac{-2}{6} \sqrt{\frac{10R}{3g}} + \sqrt{\frac{47R}{27g}} \right) \right)}{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} gR}}$$

Dudas a andruso11@gmail.com

Que les vaya bien en el control 😊