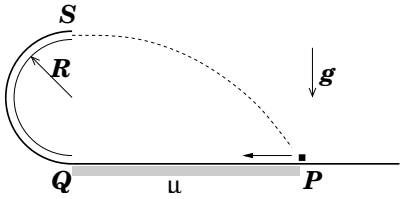
CONTROL 2

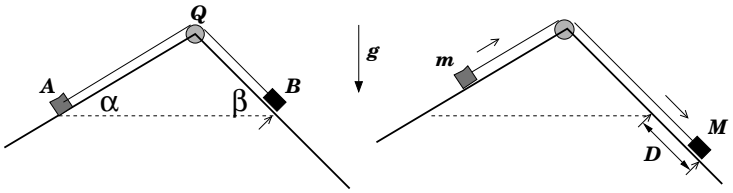
FI10A: INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA - AÑO 2003
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS - UNIVERSIDAD DE CHILE
PROFESORES: ARELLANO, CLERC, ZAMORANO, GONZÁLEZ, GARREAUD Y LUND
19 DE JUNIO DE 2003 - DURACIÓN: 3 HORAS.

- Exprese sus resultados sólo en términos de los datos subrayados en cada problema; g es dato.
- Consultas sólo de enunciado desde su asiento y en voz alta.
- ENMARQUE SU RESPUESTA FINAL A CADA PROBLEMA.

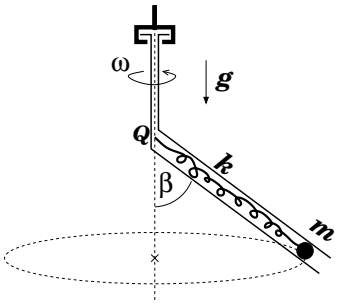
PROBLEMA 1: En la figura se ilustra una superficie horizontal rugosa que empalma suavemente en Q con un tubo semicircular pulido de radio R. Un cubo pequeño de masa no nula es lanzado desde P sobre la superficie, penetra por el tubo, y emerge desde su extremo superior S hasta caer sobre el pundo de partida P. La longitud del tramo rugoso $\overline{PQ}$ es D y el coeficiente de roce cinético (dinámico) con el cubo es μ.
A) [6Pt] Determine la rapidez con que debe partir el cubo para que lo descrito sea posible.
B) [1Pt] Analice e interprete su resultado para el caso $D \sim 0$.



PROBLEMA 2: Los bloques A y B de la figura, de masas m y M respectivamente, son unidos mediante una cuerda ideal y posan sobre planos rugosos inclinados unidos en Q. Los ángulos de inclinación de cada tramo con respecto a la horizontal son α y β respectivamente. La cuerda se apoya sin roce en Q y se mantiene paralela a cada plano. El coeficiente de roce cinético (dinámico) bloque–superficie es el mismo para ambos bloques. Los bloques son soltados con el cordel estirado y comienzan a resbalar inmediatamente. Al cabo de un lapso τ se han desplazado una distancia D como se indica.
A) [6Pt] Determine el coeficiente de roce entre los bloques y la superficie.
B) [1Pt] Examine e interprete su resultado para el caso $\{\ m = 0,\ D \approx 0)\ \}$.



PROBLEMA 3: En presencia de la gravedad terrestre g, una bolita de masa m es sostenida mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural L. El conjunto se dispone dentro de un tubo de paredes lisas inclinado en un ángulo β con respecto a la vertical. El tubo se hace girar con velocidad angular constante ω y la bolita mantiene una trayectoria circunferencial. El extremo superior Q del resorte se ubica en el eje de rotación.
A) [6Pt] Determine la elongación δ del resorte.
B) [1Pt] En base a su resultado, examine y discuta la posibilidad de que $\delta = 0$.



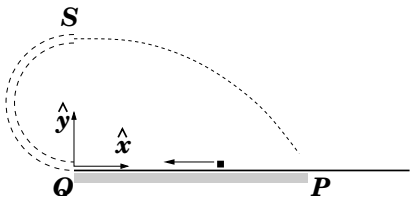
SOLUCION DEL CONTROL EN http://www.dfi.uchile.cl/hfa

SOLUCION CONTROL No 2
INTRODUCCION A LA FISICA – OTOÑO 2003

Por: H. F. Arellano (junio 19 de 2003)

Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

PROBLEMA 1



• Determinemos la velocidad que el cubo debe tener en C (v_c) a fin de caer en P. Movimiento parabólico con origen (xy) de la figura. Para esta etapa se toma $t = 0$ a la salida de S; t^* es el instante de llegada al suelo:

$$x = v_c t \quad \rightarrow \quad D = v_c t^* \tag{1}$$

$$y = 2R - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad 0 = 2R - \frac{1}{2} g t^{*2} \tag{2}$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos para v_c:

$$\boxed{\boxed{v_c^2 = \frac{gD^2}{4R}}}$$

• Por trabajo-energía podemos relacionar v_c con la velocidad de partida v_p. Suponemos cubo de masa m. Si E representa la energía mecánica total del cubo, entonces:

$$E_S = E_P + W_{P \rightarrow S}(roce) + W_{P \rightarrow S}(normal)$$

• El trabajo debido al roce sobre el cubo es $-\mu mgD$; el trabajo debido a la fuerza normal sobre el cubo es nulo (el piso no se mueve). Por lo tanto:

$$E_S = E_P - \mu mgD$$

• Considerando energía potencial gravitacional en el piso:

$$\left[\frac{1}{2} m v_c^2 + mg(2R)\right] = \left[\frac{1}{2} m v_p^2 + 0\right] - \mu mgD$$

• Sustituir valor encontrado para v_c y despejar:

$$\boxed{\boxed{v_p^2 = g\left(\frac{D^2}{4R} + 4R + 2\mu D\right)}}$$

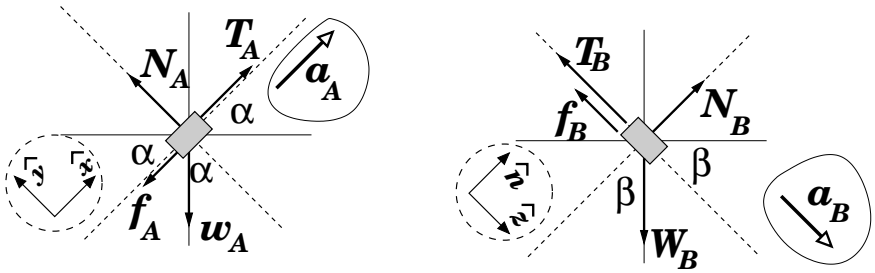
• El caso extremo $D \sim 0$ lleva a

$$v_p^2 \approx g4R \sim 2g \times \text{“altura”} \ ,$$

resultado conocido para que el cubo alcance a penas el extremo S, y caiga verticalmente.

PUNTUACION:
2Pt: parabólico correcto; descontar proporcionalmente
2Pt: trabajo-energía correcto (CERO puntos si usa ‘F=ma’ en subida por el tubo y lo hace mal)
1Pt: obtención del RESULTADO CORRECTO
1Pt: (VALIDO SOLO SI PARTE A ESTA CORRECTA) discusión razonable del caso descrito

PROBLEMA 2



• La cuerda mantiene una tensión única de magnitud $\boldsymbol{T}$. Puesto que ambos bloques resbalan se satisface la relación fza de roce/normal: "$\boldsymbol{f = \mu N}$". Además, las aceleraciones de ambos bloques son iguales en magnitud; la denotaremos $\boldsymbol{a}$.

• Sobre el cuerpo $\boldsymbol{A}$ actúan la cuerda ($\vec{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{A}}$), el peso ($\vec{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}}$) y el contacto ($\vec{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{A}}$). La ecuación del movimiento y proyección según los ejes $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ indicados:

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}} + \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{A}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{T} - \boldsymbol{mg}\sin\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\mu N_A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{ma} \quad \text{según } \hat{\boldsymbol{x}} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{0} - \boldsymbol{mg}\cos\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{0} + \boldsymbol{N_A} = \boldsymbol{0} \quad \text{según } \hat{\boldsymbol{y}} \tag{5}$$

• Sobre el cuerpo $\boldsymbol{B}$ actúan la cuerda ($\vec{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{B}}$), el peso ($\vec{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{M}\vec{\boldsymbol{g}}$) y el contacto ($\vec{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{B}}$). La ecuación del movimiento y proyección según los ejes $\hat{\boldsymbol{z}}$ y $\hat{\boldsymbol{n}}$ indicados:

$$\vec{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{M}\vec{\boldsymbol{g}} + \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{M}\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{B}} \tag{6}$$

$$-\boldsymbol{T} + \boldsymbol{Mg}\sin\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu N_B} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{Ma} \quad \text{según } \hat{\boldsymbol{z}} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{0} - \boldsymbol{Mg}\cos\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{0} + \boldsymbol{N_B} = \boldsymbol{0} \quad \text{según } \hat{\boldsymbol{n}} \tag{8}$$

• De Ecs. 5 y 8 obtenemos

$$\boxed{\boldsymbol{N_A = mg}\cos\boldsymbol{\alpha} \qquad \boldsymbol{N_B = Mg}\cos\boldsymbol{\beta}}$$

• Sumando las Ecs. 4 y 7, y sustituyendo resultado para las normales:

$$-\boldsymbol{mg}\sin\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\mu mg}\cos\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{Mg}\sin\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu Mg}\cos\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{a}$$

• Despejamos $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{Mg}\sin\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{mg}\sin\boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{mg}\cos\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{Mg}\cos\boldsymbol{\beta}}$$

• Si los bloques recorren $\boldsymbol{D}$ en un lapso $\boldsymbol{\tau}$ con aceleración $\boldsymbol{a}$, entonces $\boldsymbol{D = (1/2)a\tau^2} \Longrightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{M}\sin\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{m}\sin\boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M})\frac{\boldsymbol{2D}}{\boldsymbol{g\tau^2}}}{\boldsymbol{m}\cos\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{M}\cos\boldsymbol{\beta}}}$$

• En el caso extremo $\boldsymbol{m = 0}$ y $\boldsymbol{D \sim 0}$ se tiene $\boldsymbol{\mu \to \frac{M\sin\beta}{m\cos\alpha} = \tan\beta}$, un resultado conocido para el caso de un bloque a punto de resbalar sobre un plano inclinado, o resbalando casi sin acelerar.

PUNTUACION:

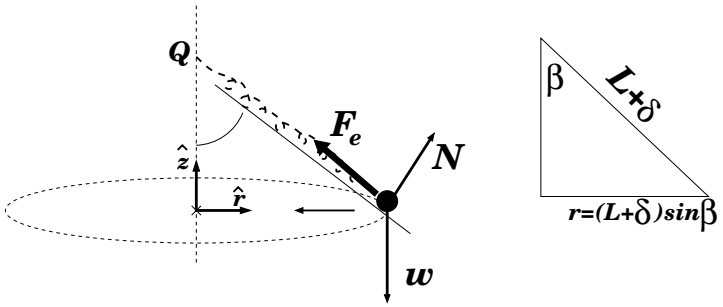
2Pt: Ec. del movimiento cuerpo A (según ambas componentes); descontar proporcionalmente; bajo puntaje ante errores 'graves'

2Pt: Ec. del movimiento cuerpo B (según ambas componentes); descontar proporcionalmente; bajo puntaje ante errores 'graves'

1Pt: Obtención del resultado correcto

1Pt: (VALIDO SOLO SI PARTE A ESTA CORRECTA) discusión razonable del caso descrito.

PROBLEMA 3



• Las fuerzas actuando sobre la bolita sostenida por el resorte son el peso ($\vec{w} = m\vec{g}$), la fuerza del resorte ($\vec{F}_e$, de magnitud $k\delta$), y el contacto sin roce ($\vec{N}$). El movimiento del objeto es circunferencial uniforme y por lo tanto su aceleración es del tipo $\omega^2 \times$radio. La ecuación del movimiento y proyecciones correspondientes segun los vectoners unitarios $\hat{r}$ y $\hat{z}$ indicados:

$$\vec{m}\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{N} = m\vec{a} \tag{9}$$

$$0 - k\delta \sin\beta + N\cos\beta = -m\omega^2 r \quad \text{según } \hat{r} \tag{10}$$

$$-mg + k\delta\cos\beta + N\sin\beta = 0 \quad \text{según } \hat{z} \tag{11}$$

• Despejar N de Ec. 11 y sustituir en Ec. 10; usar resultado geométrico $r = (L+\delta)\sin\beta$ y despejar δ. Se obtiene:

$$\boxed{\delta = \frac{m(g\cos\beta + \omega^2 L \sin^2\beta)}{k - m\omega^2\sin^2\beta}}$$

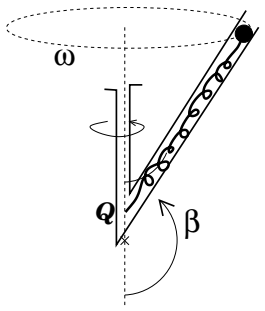
• Si se examina el caso $\delta = 0$ se observa que es necesario que

$$g\cos\beta + \omega^2 L\sin^2\beta = 0$$

Sean $b \equiv g/\omega^2 L$ y $x \equiv \cos\beta$, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$x^2 - bx - 1 = 0 \qquad \rightarrow \quad x = \frac{b \pm \sqrt{b^2+4}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

• La solución con signo '+' implica $\cos\beta > 1$ la cual es inaceptable; sólo queda la solución con signo '–': $\cos\beta = (b/2) - \sqrt{1+(b/2)^2}$, la cual, bajo valores adecuados de $g/\omega^2 L$ llevan a soluciones $\beta > \pi/2$, como se ilustra en la figura.



PUNTUACION:
3Pt: Ecuación del movimiento y proyecciones según ejes –esta parte contempla reconocimiento de fuerza y aceleración– descontar proporcionalmente; bajo puntaje ante errores 'graves'
2Pt: obtención del resultado correcto.
1Pt: (VALIDO SOLO SI PARTE A ESTA CORRECTA) reconocimiento de configuración posible para δ=0.