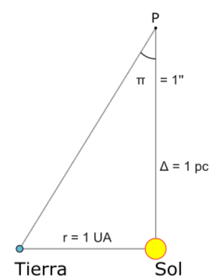
Ejemplos de aproximaciones

En este documento se verán ejemplos de las aproximaciones vistas en clases, específicamente de los casos $sin(x) \sim x$ y $e^x \sim (1+x)$ para un x pequeño.

- **Funciones trigonométricas.**

1. **Distancias Astronómicas:**
En Astronomía para medir distancias se utiliza una unidad llamada parsec [pc], que está definida como la distancia en que una unidad astronómica [1UA] (distancia media entre la tierra y el sol) subtiende un ángulo de 1 arcosegundo ($\frac{1^\circ}{60 \cdot 60}$) como muestra la figura. ($1[UA] \sim 1{,}5 \cdot 10^8$ [Km])



- *Solución:*
como se puede ver en la figura $tan(\Pi) = \frac{1[UA]}{1[Pc]}$, pero como en este caso $\Pi \ll 1$ la función $tan(\Pi)$ se puede aproximar a la función $sin(\Pi)$, porque $tan(\theta) = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}$ y para $\theta \ll 1$, $cos(\theta) \sim 1$. Entonces:

$$sin(\pi) \sim \frac{1[UA]}{1[Pc]} \tag{1}$$

Para continuar expresemos el valor de Π en radianes.

$$\Pi = \frac{1^\circ}{60 \cdot 60} = \frac{1^\circ}{60 \cdot 60} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \sim \frac{1}{60^3}$$

En el último paso se aproximó $\pi \sim 3$ y se simplificó con 180. Reemplazando Π en radianes y el valor de la unidad astronómica en Km en (1), y despejando 1 [Pc] se obtiene

$$1[Pc] \sim 1{,}5 \cdot \frac{10^8[Km]}{sin(\frac{1}{60^3})} \sim 1{,}5 \cdot 10^8[Km] \cdot 60^3 \tag{2}$$

$$1[Pc] \sim 3 \cdot 10^{13}[Km] \tag{3}$$

- **Exponencial.**

1. **Entropía:**
La entropía es popularmente conocida como el grado de desorden de un sistema (su definición real usa otros conceptos). Para un gas ideal, el cambio de entropía cuando ocurre un cambio en el sistema a temperatura constante es dado por la ecuación $\Delta S = -nRln(\frac{P}{P_o})$ donde n es el número de moles del gas, R es la constante del gas ideal 8.3144598 $\frac{J}{Kmol}$, P_o es la presión inicial y P es la presión luego de que ocurra el cambio en el sistema. Usando la aproximación de la exponencial, calcule la presión final dada una variación de entropía $\Delta S \ll nR$ (la variación es mucho menor al número de moles por la constante R) para una presión inicial de 101325 Pa (1 atm).

- *Solución:*

$$\Delta S = -nRln(\frac{P}{P_o}) \Leftrightarrow \frac{\Delta S}{nR} = -ln(\frac{P}{P_o}) = ln(\frac{P_o}{P}) \ /\text{e}(\ )$$
$$e^{\frac{\Delta S}{nR}} = (\frac{P_o}{P})$$
Como $\Delta S \ll nR$ entonces $\frac{\Delta S}{nR} \ll 1$ por lo que podemos usar la aproximación.
$$e^{\frac{\Delta S}{nR}} = 1 + \frac{\Delta S}{nR} = \frac{P_o}{P} \Leftrightarrow \frac{P_o}{P} = 1 + \frac{\Delta S}{nR}$$
$$P = \frac{P_o}{1+\frac{\Delta S}{nR}}$$

De hecho podemos hacer que $\frac{\Delta S}{nR} \Rightarrow 0$ y finalmente $P \approx P_o = 101325Pa$, esta aproximación se pudo usar antes y tener $e^{\frac{\Delta S}{nR}} \sim 1$ pero se quería mostrar que el resultado se mantiene, y que la utilidad de esta técnica reside en que hay muchos casos en los que no puede usarse una aproximación del último tipo pero si es viable usar $e^x \sim (1+x)$.