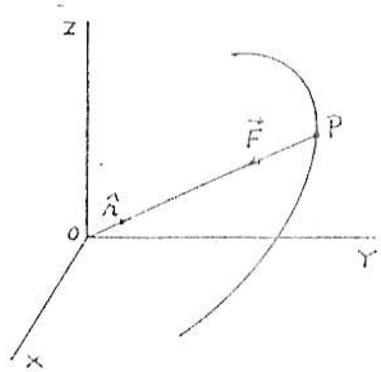
PATRICIO MARTENS

FUERZAS CENTRALES.

Toda vez que las fuerzas de un campo al actuar sobre una partícula que se desplaza en él convergen hacia un mismo punto (o divergen), se habla de un campo de fuerzas centrales. El punto de convergencia de las líneas de acción de las fuerzas es el polo o centro del campo.

En el caso en que las fuerzas del campo central dependan <u>sólo</u> de la distancia al polo y eligiendo este punto particular como origen, el campo puede representarse como $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ para el caso de fuerzas repulsivas, o $\vec{F} = -F(r)\hat{r}$ para fuerzas atractivas.



Resulta evidente que en el caso de fuerzas centrales, el momento de estas fuerzas respecto del origen es siempre <u>nulo</u>:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_0 &= \vec{OP} \times \vec{F} \\ &= r\hat{r} \times F(r)\hat{r} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

de modo que $\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0 = \vec{0}$ y en consecuencia, $\boxed{\vec{L}_0 = \vec{cte}}$ (1)

Se encuentra así una "constante del movimiento" para la partícula, ésto es, su vector momento angular $\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$. Por tratarse de un vector constante, son constantes su magnitud y su dirección en el espacio. El valor constante de este vector es el que tenía al momento de iniciarse el movimiento de la partícula.

En un instante cualquiera se tiene que

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{r}$:

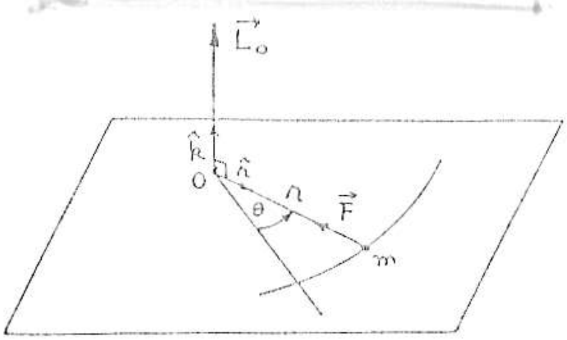
$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{L}_o &= \vec{r}\cdot(\vec{r}\times m\vec{v})\\ &= \vec{r}\times\vec{r}\cdot m\vec{v}\\ &= 0\end{aligned}$$

de modo que $\vec{r}\cdot\vec{L}_o = 0 \quad \forall t \qquad (2)$

La ecuación (2) representa vectorialmente la ecuación de un plano que pasa por el punto fijo O y es perpendicular al vector constante $\vec{L}_o$. Como todos los vectores posición de la partícula durante su movimiento se encuentran sobre este plano, se concluye que la trayectoria de la partícula bajo la acción de una fuerza central es siempre una trayectoria plana.

Este último resultado indica claramente la conveniencia de adoptar un sistema de coordenadas polares para escribir las ecuaciones escalares de movimiento de la partícula:

$$\boxed{\begin{aligned} F(r) &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (3)\\ 0 &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad (4)\end{aligned}}$$



Expresemos entonces $\vec{L}_o$ en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\vec{L}_o &= \vec{r}\times m\vec{v}\\ &= r\hat{r}\times m\overbrace{(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})}^{\vec{v}}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\vec{L}_o = m r^2\dot{\theta}\,\hat{k}} \longrightarrow \boxed{L_o = m r^2\dot{\theta} = cte} \qquad (5)$$

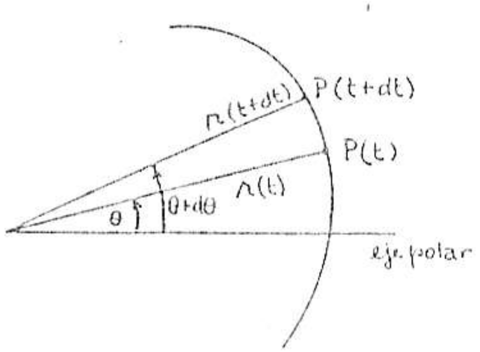
$cte = \frac{L_o}{m} = r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} r = \frac{cte}{r} \overset{?}{=} cte.$

r y $\dot{\theta}$ son en general funciones del tiempo, pero $r\dot{\theta}$ no lo es.

Se suele definir el momentum angular por unidad de masa $l_0 = \frac{L_0}{m}$, de modo que:

$$\boxed{l_0 = r^2\dot{\theta} = cte} \qquad (6)$$

Ley de las áreas.



De la figura, donde $P(t)$ y $P(t+dt)$ son dos posiciones infinitesimalmente próximas de la partícula sobre su trayectoria, se tiene que el área barrida por el radio vector en un dt de tiempo es:

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r\,d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

de modo que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} l_0 = cte \qquad (7)$$

$\frac{dA}{dt}$ recibe el nombre de velocidad areolar

Este resultado es general para todas las fuerzas centrales y establece que la velocidad areolar es constante, igual a $\frac{1}{2} l_0$.

De (7) : $\quad dA = \frac{l_0}{2} dt \Rightarrow A(t) = \frac{l_0}{2} t + c_1$

Si para $t=0$, $A(0)=0$, $c_1=0$ y $A(t) = \frac{l_0}{2} t$, es decir, el área barrida por el radio vector es proporcional al tiempo t, o, lo que es lo mismo, "las áreas barridas en tiempos iguales son iguales". Reconocemos aquí la segunda ley de Kepler del movimiento planetario:

Integración de las ecuaciones de movimiento.

La ecuación (4) puede integrarse directamente:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad \longrightarrow \quad r^2\dot{\theta} = cte = l_0$$, resultado ya conocido.

La ecuación (3) es una ecuación diferencial de segundo orden, no lineal donde la variable independiente es el tiempo. Un cambio de variables definido por $r = \frac{1}{u}$ permite transformarla en una ecuación lineal donde la variable independiente es el ángulo polar θ.

$$F(r) = m(\ddot{r} - 2r\dot{\theta}^2) \qquad (3)$$

De $r = \frac{1}{u} \rightarrow \frac{dr}{dt} = \dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}$

luego, como $r^2\dot{\theta} = l_0$, $\quad \dot{r} = -l_0\frac{du}{d\theta} \qquad (8)$

En seguida,

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{r}}{d\theta} \longrightarrow \ddot{r} = -l_0\dot{\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Pero, $\dot{\theta} = \frac{l_0}{r^2} = l_0 u^2$, luego, eliminando $\dot{\theta}$ de la ecuación anterior,

$$\ddot{r} = -l_0^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad (9)$$

Por otra parte, $r\dot{\theta}^2 = \dfrac{r^4\dot{\theta}^2}{r^3} = l_0^2 u^3$ (10)

Con (8), (9) y (10), la ecuación (3) se transforma en:

$$\boxed{F(u) = -m l_0^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right]} \qquad (11)$$

conocida como ecuación de Binet.

La ecuación (11) es la ecuación general de las fuerzas centrales; permite determinar la trayectoria $u(\theta)$ a partir de la ley de fuerzas o bien el problema contrario, ésto es, dada la trayectoria determinar la ley de fuerzas. El primer caso requiere integrar la ecuación diferencial resultante mientras que en el segundo caso sólo se requiere derivar.

Velocidad de la partícula sobre su trayectoria.

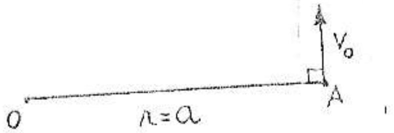
En coordenadas polares: $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

$$\therefore\ \vec{v}\cdot\vec{v} = v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$
$$= \dot{r}^2 + \frac{r^4\dot{\theta}^2}{r^2}$$

Mediante (8) y teniendo en cuenta que $\dfrac{r^4\dot{\theta}^2}{r^2} = l_0^2 u^2$, se tiene finalmente:

$$\boxed{v^2 = l_0^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right]} \qquad (12)$$

Ejercicio. Una partícula de masa m en un campo central de fuerzas definido por $\vec{F} = -\gamma m \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma}{2r^3} \right) \hat{r}$, con γ = cte., parte desde un punto $r = a$ con velocidad inicial $V_0 = \gamma / a\sqrt{2}$, perpendicularmente al radio vector $OA = a$.



Determinar la trayectoria $r(\theta)$.

Solución : En primer lugar determinamos la constante l_0 del movimiento a partir de las condiciones iniciales :

$$l_0 = r^2 \dot{\theta} = cte = r^2(0) \cdot \dot{\theta}(0) = a^2 \frac{V_0}{a}$$

Luego,
$$l_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \quad (i) \quad y \quad F(u) = -\gamma m \left(u^2 + \frac{\gamma}{2} u^3 \right)$$

Reemplazando en la ecuación de Binet, se tiene :

$$-m\gamma \left(u^2 + \frac{\gamma}{2} u^3 \right) = -m \frac{\gamma^2}{2} u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right)$$

que se reduce luego de las simplificaciones obvias a :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{2}{\gamma}$$

Integrando una primera vez se obtiene :

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\gamma} d\theta + C_1$$

De las condiciones iniciales determinamos la constante de integración C_1 : en $t=0$, $\theta(0) = 0$ y $r(0) = a \Rightarrow u(0) = \frac{1}{a}$ $\therefore C_1 = 0$.

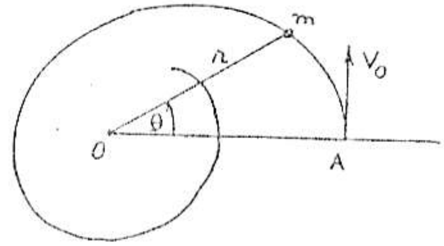
Luego, se tiene que $du = \frac{2}{\gamma}\theta \, d\theta$

Integrando nuevamente, se llega a $u = \frac{1}{\gamma}\theta^2 + C_2$ (ii).

Nuevamente, para $\theta = 0$, $u(0) = \frac{1}{r(0)} = \frac{1}{a} \longrightarrow C_2 = \frac{1}{a}$ (iii)

Finalmente, $u = \frac{1}{\gamma}\theta^2 + \frac{1}{a}$ o

$$\boxed{r = \frac{a\gamma}{\gamma + a\theta^2}}$$



Integración de la ecuación de Binet para el caso: $\boxed{\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}}$

Este caso reviste especial importancia puesto que las fuerzas gravitacionales (Ley de gravitación universal de Newton) y las fuerzas electrostáticas atractivas (Ley de Coulomb) son precisamente de este tipo, en que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de atracción. $k = cte.$

Se tiene entonces que $F = -\frac{k}{r^2} = -ku^2$ (13)

de modo que la ecuación de Binet correspondiente es:

$$-ku^2 = -m l_0^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right]$$

ecuación que se reduce a:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k^2}{ml_0^2} \qquad (14)$$

Se trata de una ecuación diferencial inhomogénea. Su solución general se construye sumando a la solución de la parte homogénea (primer miembro en (14)), una solución particular de la ecuación completa inhomogénea. Ahora bien, la parte homogénea es del mismo tipo que la ecuación diferencial del oscilador armónico y por lo tanto su solución puede escribirse de inmediato como:

$$u_1 = A\cos(\theta - \theta_0) \quad ,$$

en tanto que como solución particular de la ecuación inhomogénea podemos escoger: $u_2 = \frac{k}{ml_0^2}$

De este modo, la solución general de (14) queda como:

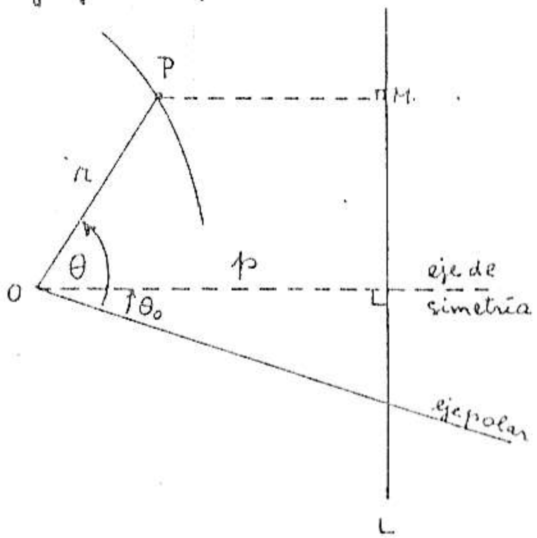
$$u = \frac{1}{r} = A\cos(\theta-\theta_0) + \frac{k}{ml_0^2} \qquad (15)$$

A y θ_0 son dos constantes arbitrarias que se determinan de las condiciones iniciales del movimiento. La ecuación (15) es la ecuación de la trayectoria de la partícula en este campo central de fuerzas.

Escribamos la ecuación (15) como

$$r = \frac{ml_0^2/k}{1 + \frac{Aml_0^2}{k}\cos(\theta-\theta_0)} \qquad (16)$$

<u>Secciones cónicas</u>. En Geometría Analítica, el lugar geométrico de un punto P es una sección cónica cuando la razón de sus distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz), es constante. La razón constante ϵ es la excentricidad de la cónica. La recta que pasa por el foco perpendicularmente a la directriz es el eje de simetría o eje principal de la cónica.



p = distancia del foco a la directriz.

Considerando el caso general en que el eje polar no coincida con el eje de simetría de la cónica, de la definición podemos escribir

$$\epsilon = \frac{PO}{PM} = \frac{r}{p - r\cos(\theta-\theta_0)} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\cos(\theta-\theta_0) + \frac{1}{p\epsilon} \quad (17)$$

Podemos escribir (17) como

$$r = \frac{p\epsilon}{1+\epsilon\cos(\theta-\theta_0)} \qquad (18)$$

Las ecuaciones (17) y (18) corresponden a la clase de curvas conocidas como secciones cónicas, expresadas en coordenadas polares.

La forma genérica de una cónica queda determinada por el valor de la constante ϵ, la excentricidad de la cónica, mientras que su tamaño queda determinado por el valor de $p\epsilon$.

De la geometría analítica se sabe que si

$\epsilon = 0$ la cónica es una circunferencia (curva cerrada)
$\epsilon < 1$ " " " " elipse (curva cerrada)
$\epsilon = 1$ " " " " parábola (curva abierta)
$\epsilon > 1$ " " " " hipérbola (" ")

De la comparación de las ecuaciones (16) y (18) se desprende que la trayectoria de una partícula en un campo central de fuerzas del tipo proporcional al inverso de los cuadrados de su distancia al polo debe ser una cónica. De esta comparación resulta también que

$$p\epsilon = m l_0^2/k \quad y \quad \epsilon = \frac{A m l_0^2}{k} \qquad (19)$$

La ecuación (16) de la trayectoria se puede escribir entonces como:

$$\boxed{r = \frac{m l_0^2/k}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}} \qquad (20)$$

Las constantes l_0 y ϵ se determinan de la velocidad inicial impartida a la partícula para ponerla en movimiento desde un punto dado del campo.

Potencial de la fuerza $\vec{F} = -(k/r^2)\,\hat{r}$

En coordenadas esféricas, $F_\varphi = F_\theta = 0$ y F_r depende sólo de r. por lo que su rotor $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ y la fuerza es conservativa.
El potencial correspondiente lo obtenemos de la ecuación $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$.

o sea,

$$-\frac{k}{r^2}\hat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} \Rightarrow dV = \frac{k}{r^2}dr \Rightarrow V = -\frac{k}{r} + cte.$$

Se acostumbra fijar arbitrariamente el valor cero para el potencial en el infinito lo que hace nula la constante y negativa la energía potencial V:

$$\boxed{V = -\frac{k}{r}} \quad (21)$$

Siendo $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$ una fuerza conservativa, la energía mecánica $E = K + V$ es otra constante del movimiento junto a l_0.

Así,

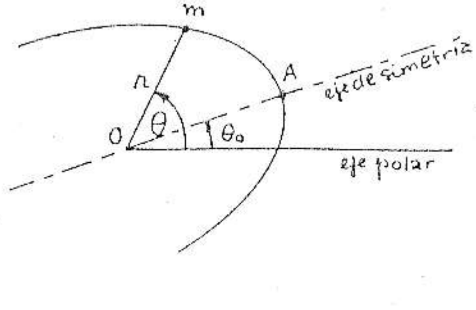
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}$$

Como $l_0 = r^2\dot{\theta}$, eliminando $\dot{\theta}$ de la ecuación anterior:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{l_0^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} = cte. \quad (23)$$

De la paridad de la función coseno se desprende, al examinar la ecuación (20), que las cónicas son curvas simétricas respecto del eje que, pasando por el polo, forma un ángulo θ_0 con el eje polar.



Calculemos la componente radial $\dot{r}$ de la velocidad con que pasa la partícula por el punto A en que su trayectoria corta al eje de simetría. Este punto corresponde al ángulo $\theta = \theta_0$.

De la ecuación de la trayectoria (20)

$$r = \frac{m l_0^2/k}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)} \qquad (20)$$

derivando respecto del tiempo se tiene:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{(m l_0^2/k)\,\epsilon \operatorname{sen}(\theta - \theta_0)}{[1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)]^2}\dot{\theta}$$

Se observa que para $\theta = \theta_0$, $\dot{r}(\theta_0) = 0$, es decir, al pasar la partícula por el punto A la componente radial de su velocidad es nula.

Aprovechando esta circunstancia, calcularemos el valor constante de la energía mecánica E, evaluando su valor cuando la partícula pasa por A, a partir de la ecuación (23):

$$E = E_A = \frac{1}{2} m \frac{l_0^2}{r_A^2} - \frac{k}{r_A}$$

Pero de (20), con $\theta = \theta_0$, $r_A = \dfrac{m l_0^2}{k(1+\epsilon)}$, luego,

$$E = E_A = \frac{m l_0^2}{2} \frac{k^2(1+\epsilon)^2}{(m l_0^2)^2} - \frac{k^2(1+\epsilon)}{m l_0^2}$$

de donde, finalmente,

$$\boxed{E = \frac{k^2(\epsilon^2 - 1)}{2 m l_0^2}} \quad (24) \qquad y \qquad \boxed{\epsilon = \left[1 + \frac{2 m E l_0^2}{k^2}\right]^{1/2}} \quad (25)$$

De (25) se observa que el parámetro ϵ queda determinado a partir de los valores de las constantes del movimiento E y l_0 calculadas a partir de las condiciones iniciales del lanzamiento de la partícula.

Además se encuentra que

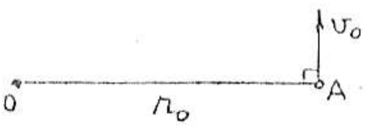
$\epsilon < 1 \iff E < 0$ elipse

$\epsilon = 1 \iff E = 0$ parábola

$\epsilon > 1 \iff E > 0$ hipérbola.

De éstas, la única trayectoria cerrada es la elipse, a la que correspon- de una energía negativa, característica de los sistemas ligados. (Caso especial es la circunferencia, con $\epsilon = 0$).

<u>Lanzamiento perigeo</u>. La partícula es puesta en movimiento desde un punto a la distancia r_0 del polo y con una velocidad v_0 perpendicular al radio vector $OA = r_0$.



En este caso no hay componente radial inicial de la velocidad y el eje de simetría de la órbita que describirá la partícula coincidirá con el eje OA. En consecuencia, la ecuación de la trayectoria será la ecuación (20), con $\theta_0 = 0$, o sea,

$$r = \frac{m l_0^2 / k}{1 + \epsilon \cos\theta}$$

que también es válida para el punto A del lanzamiento, por lo que, con $l_0 = r_0 v_0$ y $\theta = 0$,

$$r_0 = \frac{m r_0^2 v_0^2}{k(1+\epsilon)}$$

Despejando ϵ :

$$\boxed{\epsilon = \frac{m r_0 v_0^2}{k} - 1} \qquad (26)$$

Reescribiendo (26) como $\epsilon + 1 = \dfrac{m r_0 v_0^2}{k}$ se observa que $\epsilon + 1 > 0$ de modo que ϵ debe ser mayor que -1.

Distinguimos entonces los siguientes casos para v_0 :

a) $-1 < \epsilon < 0$, o sea, $-1 < \dfrac{m r_0 v_0^2}{k} - 1 < 0 \Rightarrow \boxed{0 < v_0 < \sqrt{\dfrac{k}{m r_0}}}$

La trayectoria resultante es una elipse con su <u>foco izquierdo</u> en el polo de atracción O.

b) $\epsilon = 0$; $\dfrac{m r_0 v_0^2}{k} - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m r_0}}}$

La trayectoria es una circunferencia de radio r_0 con su centro en el polo O.

c) $0 < \epsilon < 1$; $0 < \dfrac{m r_0 v_0^2}{k} - 1 < 1 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\dfrac{k}{r m_0}} < v_0 < \sqrt{\dfrac{2k}{m r_0}}}$

La trayectoria resultante es una elipse con su foco derecho en el polo de atracción.

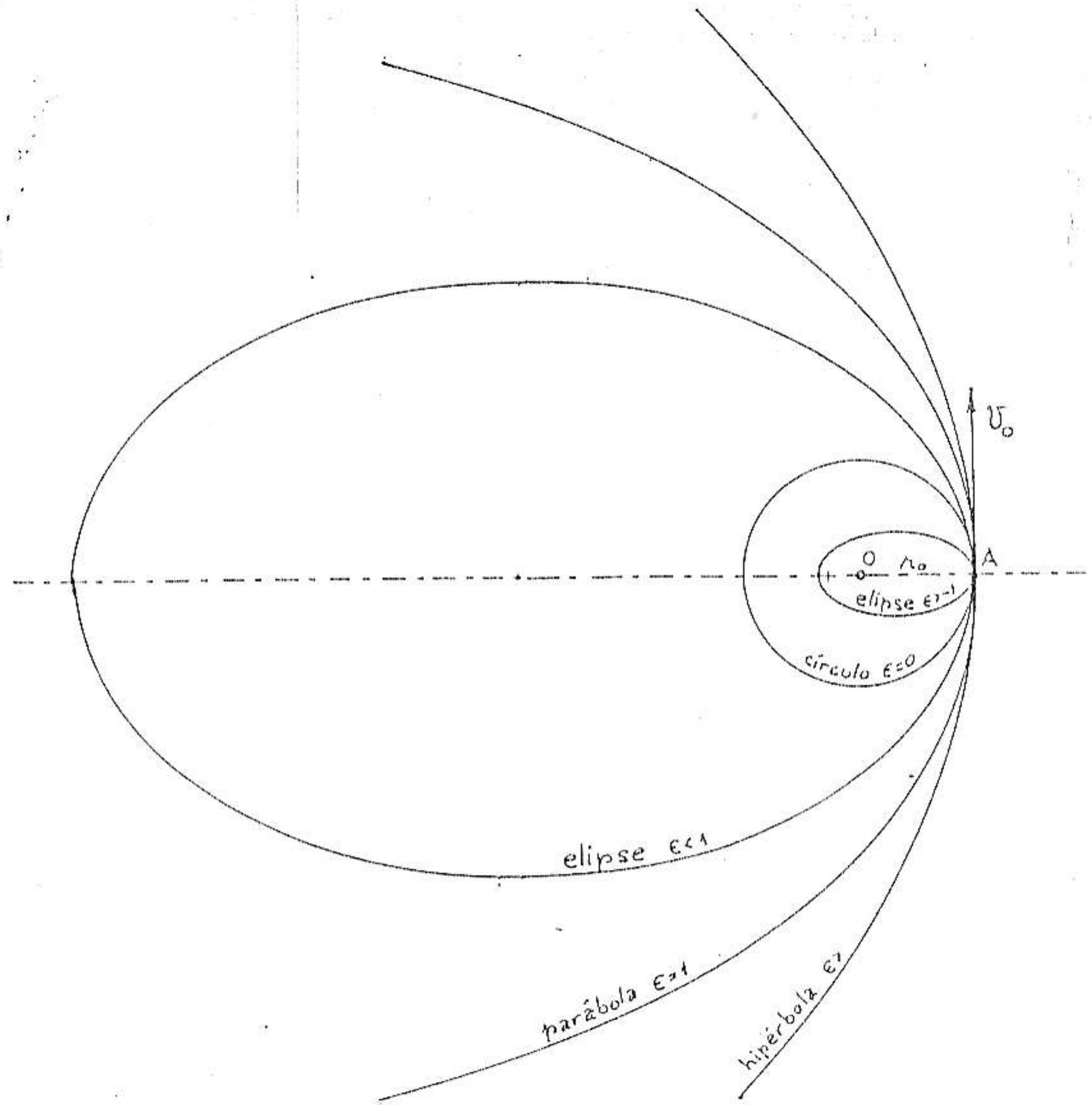
d) $\epsilon = 1$; $\dfrac{m r_0 v_0^2}{k} - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m r_0}}}$

La trayectoria es una parábola.

e) $\epsilon > 1$; $\dfrac{m r_0 v_0^2}{k} - 1 > 1 \Rightarrow \boxed{v_0 > \sqrt{\dfrac{2k}{m r_0}}}$

La trayectoria es una hipérbola.

La velocidad $v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m r_0}}$ correspondiente a la órbita parabólica recibe el nombre de velocidad de escape. Es la mínima velocidad que debe dársele a la partícula de masa m desde un punto situado a la distancia r_0 del polo para que ésta se aleje indefinidamente.



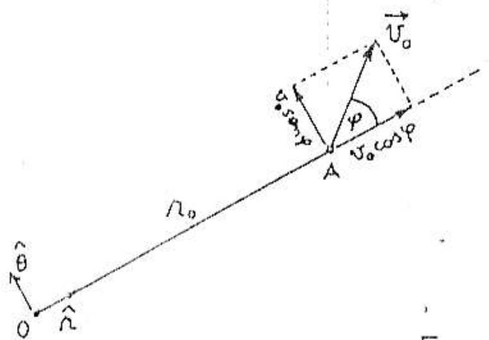
La velocidad de escape es independiente del ángulo de lanzamiento. En efecto, si desde un punto a la distancia $r = r_0$ del polo O se lanza una partícula de masa m con velocidad $\vec{v}_0$, como E = cte,

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{k}{r_0} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r}$$

Para que la partícula se aleje al infinito $(r \to \infty)$, con $v_\infty = 0$, $v_0 = v_e$

luego, $\frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{k}{r_0} = 0$ y $v_e = \sqrt{\frac{2k}{m r_0}}$

Lanzamiento oblicuo. Imaginemos una partícula de masa m, proyectada desde un cierto punto del campo a la distancia r_0 del polo, con velocidad $\vec{v}_0$ formando un ángulo φ con la línea radial, la que se elige como eje polar.



Velocidad inicial: $\vec{v}_0 = v_0 \cos\varphi \,\hat{r} + v_0 \,\text{sen}\,\varphi \,\hat{\theta}$

$\therefore \dot{r}_0 = v_0 \cos\varphi$ y $r_0 \dot{\theta}_0 = v_0 \,\text{sen}\,\varphi$

$$\therefore \; l_0 = r_0 v_0 \,\text{sen}\,\varphi \qquad (27)$$

Excentricidad ϵ: calculamos previamente la energía E_0 a partir de las condiciones iniciales:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{k}{r_0} = E \qquad (28)$$

y luego se procede a calcular ϵ de la ecuación (25):

$$\epsilon = \left[1 + \frac{2 m E_0 l_0^2}{k^2} \right]^{1/2} \qquad (29)$$

Cálculo del ángulo θ_0. θ_0 es el ángulo de inclinación del eje de simetría respecto del eje polar. Se le conoce también con el nombre de "anomalía".

Despejando $\cos(\theta - \theta_0)$ de la ecuación (20):

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{m l_0^2}{k r} - 1 \right) \qquad (30)$$

Derivándola con respecto al tiempo se encuentra: