

P4] Un satélite gira alrededor de la Tierra, en trayectoria circular con radio $2R$. con R radio de la Tierra.

a) Encuentre el período del satélite

b) Con la ayuda de un cohete, el satélite se acelera en forma instantánea de modo que la velocidad se incrementa de V_0 a αV_0 con $\alpha > 1$ siendo la nueva trayectoria elipsoidal. Encuentre la distancia del apogeo del satélite en función de α y R .

c) Calcule α mínimo para que el satélite escape hacia el infinito

Solución:

a) Ya sabemos que: $\frac{GMm}{4R^2} = m \frac{V^2}{2R} \Rightarrow \sqrt{\frac{GM}{2R}} = V$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{con} \quad \omega = \frac{V}{2R}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \cdot 2R \sqrt{\frac{2R}{GM}} = 4\pi \sqrt{\frac{2R^3}{GM}}$$

b) - Conservación de momentum angular
- Conservación de energía

Momentum: $\vec{L}_i = 2Rm \alpha V$

$$\vec{L}_f = R_a m V_a$$

R_a = distancia del apogeo
 V_a = velocidad Tangencial en el apogeo.

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow 2Rm \alpha V = R_a m V_a$$

$$V_a = \frac{2R}{R_a} \alpha V$$

Conservación de energía:

$$E_i = \frac{1}{2} m \alpha^2 V^2 - \frac{GMm}{2R} \quad E_f = \frac{1}{2} m V_a^2 - \frac{GMm}{R_a}$$

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m \alpha^2 V^2 - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2} m V_a^2 - \frac{GMm}{R_a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \alpha^2 \frac{GM}{2R} - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2} m \frac{4R^2 \alpha^2 V^2}{R_a^2} - \frac{GMm}{R_a}$$

$$\frac{GM}{2R} \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1 \right) = \frac{2R^2 \alpha^2 GM}{2R R_a^2} - \frac{GM}{R_a}$$

$$(\alpha^2 - 2) = \frac{4R^2 \alpha^2}{R_a^2} - \frac{4R}{R_a}$$

$$R_a^2 (\alpha^2 - 2) = 4R^2 \alpha^2 - 4R R_a$$

$$R_a^2 (\alpha^2 - 2) + R_a 4R - 4R^2 \alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow R_a = \frac{-4R + \sqrt{16R^2 + 16R^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 2)}}{2(\alpha^2 - 2)}$$

$$R_a = \frac{-4R + 4R \sqrt{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2}}{2(\alpha^2 - 2)} = \frac{4R(-1 + \sqrt{(1 - \alpha^2)^2})}{2(\alpha^2 - 2)}$$

$$R_a = \frac{4R(-1 + |1 - \alpha^2|)}{2(\alpha^2 - 2)} \Rightarrow R_a \rightarrow 2R$$
$$\rightarrow \frac{2R \alpha^2}{2 - \alpha^2}$$

$$\Rightarrow \text{la distancia del apogeo es } 2R \left(\frac{\alpha^2}{2 - \alpha^2} \right)$$

c) Para que se vaya al infinito: dist apogeo $\rightarrow \infty$

$$2R \left(\frac{\alpha^2}{2 - \alpha^2} \right) \rightarrow \infty \Rightarrow 2 - \alpha^2 \rightarrow 0$$

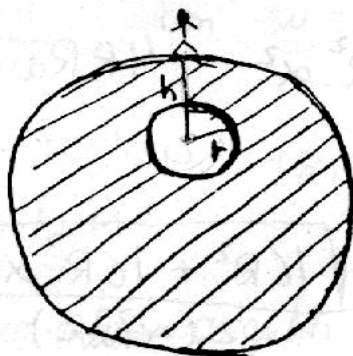
$$\alpha^2 \rightarrow 2$$

$$\alpha \rightarrow \sqrt{2}$$

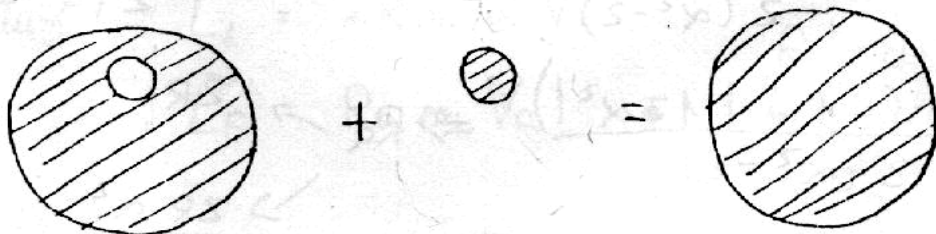
$\Rightarrow$ Para $\alpha > \sqrt{2}$ el satélite se va al infinito.

P5/ Calcule la gravedad ejercida sobre una persona de masa m parada sobre la superficie terrestre si a la Tierra se le hace una cavidad esférica de radio r a una profundidad h
(Ind: Considere a la Tierra con una densidad uniforme ρ)

Sol: Tenemos:



Se aplica el principio de "superposición":



$$F_A + F_B = F_T$$

$$\Rightarrow F_A = F_T - F_B$$