

Pauta Guía #4 - Funciones Trigonométricas

[la P1 y P2 no las desarrollé acá, dado que tengo entendido que la mayoría las realizó en clase, y respondieron sus consultas. Si esto no es así, no duden en preguntar por el foro de u-cursos :]

P3) pdg:
$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\tan(\alpha)}{\cotg(\alpha)} + \frac{\sec(\alpha)}{\operatorname{cosec}(\alpha)} = \frac{2\cotg(\alpha) + 1}{\cotg^2(\alpha)}$$

Para demostrar la igualdad anterior, desarrollaremos la parte izquierda de la igualdad hasta llegar a la parte derecha (también pueden hacerla al revés, aunque no es muy conveniente... para decidir esto es necesaria un poco de intuición)

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\tan(\alpha)}{\cotg(\alpha)} + \frac{\sec(\alpha)}{\operatorname{cosec}(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha) \cdot \cotg(\alpha) \cdot \operatorname{cosec}(\alpha) + \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \operatorname{cosec}(\alpha) + \sec(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) \cdot \cotg(\alpha) \cdot \operatorname{cosec}(\alpha)}$$

Para seguir con la demostración utilizaremos igualdades aprendidas en clases:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} ; \cotg(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} ; \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} ; \operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}{\cos(\alpha) \cdot \cotg(\alpha) \cdot \frac{1}{\sin(\alpha)}}$$

$$= \frac{\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + 1 + \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}{\cotg(\alpha) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}$$

$$= \frac{\cotg(\alpha) + 1 + \cotg(\alpha)}{\cotg(\alpha) \cdot \cotg(\alpha)} = \frac{2\cotg(\alpha) + 1}{\cotg^2(\alpha)}$$

P4 | resolver $\frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)} = 4$

la idea de esta pregunta es encontrar x tal que satisfaga la ecuación anterior;
 Para ello, hay que notar que $\underbrace{\cos(x) \neq 0}_{(*)} \wedge \underbrace{(1 + \operatorname{sen}(x)) \neq 0}_{(\heartsuit)}$

$(*) \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

$(\heartsuit) (1 + \operatorname{sen}(x)) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$

... luego de decir esto y desarrollando la ecuación:

$\Rightarrow \frac{[1 + \operatorname{sen}(x)]^2 + \cos^2(x)}{\cos(x) [1 + \operatorname{sen}(x)]} = 4$

$\Rightarrow \frac{1 + 2\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x) [1 + \operatorname{sen}(x)]} = 4$

Sabemos que
 $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\Rightarrow \frac{2 + 2\operatorname{sen}(x)}{\cos(x) [1 + \operatorname{sen}(x)]} = 4$

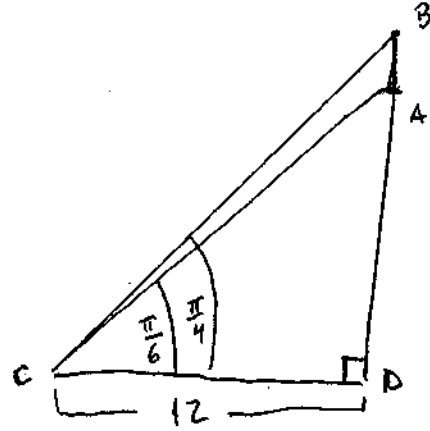
$\Rightarrow \frac{2 \cancel{[1 + \operatorname{sen}(x)]}}{\cos(x) \cancel{[1 + \operatorname{sen}(x)]}} = 4$ ojo! que podemos "cancelar" $[1 + \operatorname{sen}(x)]$ por $(\heartsuit)$

$\Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

"

P5



$\overline{AB}$?

Fijándonos en el triángulo CDB, podemos notar que es un triángulo isósceles (pues uno de sus ángulos es de 45° y el otro de 90° , queda que el tercero sea de 45°). Entonces podemos decir que los lados $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$ son iguales, entonces: $\overline{DB} = 12$

Por otro lado, ahora fijándonos en el triángulo CDA, podemos ver que:

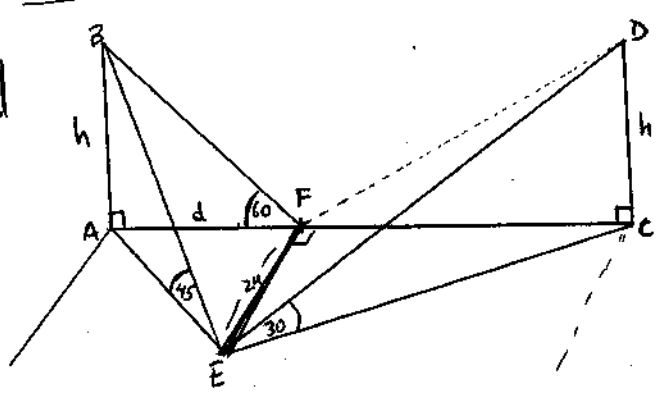
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\overline{AD}}{12} \Leftrightarrow 12 \cdot \frac{\operatorname{sen}(30)}{\cos(30)} = \overline{AD}$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \overline{AD} \Rightarrow \overline{AD} = 4\sqrt{3}$$

Finalmente, el largo del asta es igual a $(\overline{DB} - \overline{AD}) = 12 - 4\sqrt{3}$

$$\overline{AB} = 4(3 - \sqrt{3})$$

P6



llamemos el largo de las chimeneas $\overline{AB} = \overline{CD} = h$, y la recta $\overline{AF} = d$
(los datos del dibujo son los del enunciado)

Primero notemos que el triángulo ABE es isósceles, por lo tanto el lado $\overline{AE} = h$

Ahora, fijándonos en el triángulo ABF obtenemos que $\operatorname{tg}(60) = \frac{h}{d}$

$$\Rightarrow d = h \frac{\cos(60)}{\operatorname{sen}(60)} \Rightarrow d = h \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

[...] $\rightarrow$

[...] $\rightarrow$ observando ahora el triángulo AFE, podemos usar pitágoras para despejar h :

$$h^2 = 24^2 + d^2 \quad / \text{ usando (1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}h^2 = 24^2$$

$$\Rightarrow h^2 = 24^2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{h = 12\sqrt{6}} \quad "$$

Ahora nos piden determinar el largo de $\overline{AC}$ (distancia entre las chimeneas) para eso, basta determinar el valor de $\overline{FC}$, pues $\overline{AF}$ (ahora que sabemos el valor de h) es:

$$(\text{por (1)}) \quad d = \frac{h\sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{6}\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{2}$$

... como sabemos que $\overline{CD} = h$, fijándonos en el triángulo ECD , notemos que:

$$\operatorname{tg}(30) = \frac{h}{\overline{EC}} \Rightarrow \overline{EC} = \frac{h \cos(30)}{\operatorname{sen}(30)} = h \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = h\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\overline{EC} = h\sqrt{3}}$$

como sabemos el valor de h , $\boxed{\overline{EC} = 36\sqrt{2}}$

finalmente, observando el triángulo ECF , podemos usar pitágoras para despejar $\overline{FC}$:

$$\overline{EC}^2 = 24^2 + \overline{FC}^2$$

$$36^2 \cdot 2 = 24^2 + \overline{FC}^2$$

$$\overline{FC}^2 = 2592 - 576 = 2016$$

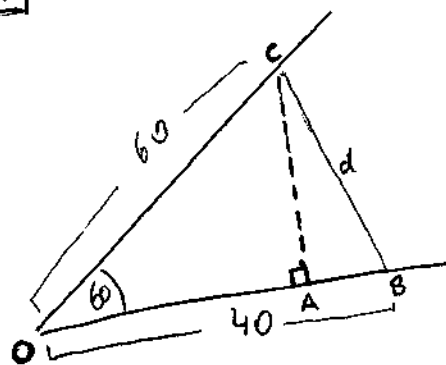
$$\Rightarrow \overline{FC} = 12\sqrt{14}$$

entonces el lado $\overline{AC}$ mide $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC}$

$$= 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2}\sqrt{7}$$

$$\boxed{\overline{AC} = 12\sqrt{2}(1 + \sqrt{7})} \quad "$$

P7



¡Ojo! en este problema no hay ningún ángulo recto (nunca lo dice el enunciado!!) $\therefore$ no podemos llegar y usar trigonometría así como así...

No nos queda otra que "inventarnos" algún ángulo recto, así que "inventé" una línea (roja) para formar un triángulo rectángulo.

Primero notemos que $\overline{OA} = 60 \cos(60) = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$

de aquí, como sabemos que $\overline{OB} = 40 \Rightarrow \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$
 $40 = 30 + \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} = 10$

Por otro lado, vemos que $\overline{AC} = 60 \sin(60) = 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$

y ahora usando pitágoras, despejamos d:

$$d^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 10^2 + 30^2 \cdot 3$$

$$= 100 + 2700 = 2800$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{2800} = 10\sqrt{28} = 20\sqrt{7}$$

$$\boxed{d = 20\sqrt{7}}$$