

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 4 de noviembre de 2014

Índice general

XI. TORQUE y ESTÁTICA	3
XI.1. TORQUE	3
XI.1.1. Introducción	3
XI.2. DEFINICION DE TORQUE	4
XI.2.1. Definición de producto vectorial	5
XI.2.2. Algebra del producto vectorial (o producto cruz).	8
XI.3. ESTATICA	9
XI.3.1. Ecuaciones de la estática	12
XI.4. VIGAS Y ESTRUCTURAS	18
XI.5. EJERCICIOS	26

Capítulo XI

TORQUE y ESTÁTICA

XI.1. TORQUE

XI.1.1. Introducción

Al resolver un problema comenzamos por hacer un diagrama de cuerpo libre del sistema. En esta operación, tácitamente lo estamos considerando como una *partícula puntual*: todas las fuerzas se dibujan alrededor de un punto, al sumarlas se obtiene la fuerza resultante y luego, usando la segunda ley de Newton podemos predecir el movimiento resultante.

La extensión del cuerpo, ya sea un bloque, una cuña o una polea, interviene sólo para especificar la dirección de la fuerza de acción y reacción entre las distintas partes.

Obviamente las partículas puntuales constituyen una primera aproximación a problemas más reales: los cuerpos no son puntos y pueden, por ejemplo, rotar en torno a sí mismos.

Para estudiar el origen de la rotación de un cuerpo rígido, debemos considerar las fuerzas que intervienen y los puntos donde cada una de ellas actúa. Este par: la fuerza y el vector posición del punto donde se aplica la fuerza, da origen a otro vector que se denomina *torque*.

Para evaluar la rotación de un cuerpo se define el vector *momento angular*. Para una partícula este vector está asociado a su posición \vec{r} , y a su momentum \vec{p} . Para un cuerpo sólido, se obtiene como la suma del momento angular de cada una de sus partículas que lo componen.

Los valores asociados con el torque y el momento angular, dependen –salvo una excepción: el caso estático– del origen de coordenadas elegido. El momento angular es el equivalente del momentum lineal \vec{p} .

El movimiento más general de un cuerpo rígido está compuesto de una rotación y una traslación. En los párrafos anteriores, introdujimos la rotación. La traslación reduce el cuerpo a un punto –denominado *centro de masa*– y concentra en él, las fuerzas externas. El centro de masa es un punto matemático que, para el efecto de las leyes de Newton, representa al cuerpo real y es el lugar donde se concentran todas las fuerzas externas. Como se ha trabajado hasta ahora es, precisamente, de esa forma: considerando todos los cuerpos como puntos materiales y aplicando sobre estos puntos las leyes de Newton.

En este capítulo *no se introducen nuevas leyes físicas* con el objeto de dar cuenta de la rotación que experimentan los cuerpos. No es necesario. Basta con definir una nueva operación matemática entre vectores y aplicarla a las mismas leyes físicas ya conocidas.

En el caso de la rotación de un cuerpo en torno a un eje fijo, el torque se relaciona con la aceleración angular a través de una ecuación similar a la segunda ley de Newton.

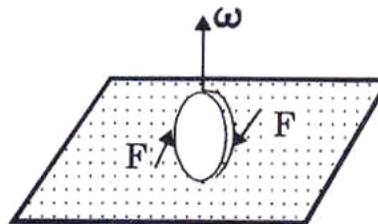
Aquí nos referiremos exclusivamente a las rotaciones en torno a un eje. Sólo dedicaremos un párrafo a la rotación de un cuerpo rígido en torno a un punto. Esta es una materia que requiere más herramientas matemáticas y por lo tanto no se incluyó en este curso.

Para introducir el torque, necesitamos definir una operación entre dos vectores llamada *producto vectorial*. Este es el tema de la siguiente sección.

XI.2. DEFINICION DE TORQUE

Las manillas de una puerta están siempre alejadas de los goznes. Por ejemplo, al cerrar una puerta –por liviana que ésta sea–, si la empujamos de un punto demasiado cercano al eje de giro, el esfuerzo que es necesario desarrollar es notorio.

Otra situación similar es la de una moneda que hacemos girar rápidamente cuando le aplicamos en forma simétrica un par de fuerzas en los bordes. En este caso, si nos hemos preocupado de aplicar dos fuerzas iguales en magnitud y dirección pero de sentidos opuestos sobre el borde de la moneda, ésta rotará en torno a un eje imaginario que atraviesa el cuerpo.



En estas operaciones intervinieron la fuerza aplicada y su brazo de acción: distancia entre el punto de aplicación y el eje de giro, que son los dos parámetros que contiene el

concepto de *torque*.

Cuando existe un par de fuerzas que actúan sobre puntos distintos de un sólido rígido (que no sufre deformación), existe lo que se denomina un *torque* y su efecto genera una aceleración angular sobre el cuerpo.

El torque con respecto a un origen arbitrario O, es el producto *vectorial* entre el vector posición que une el punto de referencia O con el punto P y la fuerza \vec{F} :



$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (\text{XI.1})$$

XI.2.1. Definición de producto vectorial

El producto vectorial es una operación matemática que se designa por el símbolo \wedge y que asocia a un par de vectores \vec{a} y \vec{b} , un tercer vector \vec{c} ,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \equiv \vec{c} \quad \text{para todo vector } \vec{a}, \vec{b}.$$

A continuación definimos la dirección, el módulo y el sentido de este nuevo vector generado por \vec{a} y \vec{b} .

- **Dirección:**

$(\vec{a} \wedge \vec{b})$ es un vector perpendicular al plano formado por los vectores \vec{a} y \vec{b} .

- **Magnitud:**

Es el producto de las magnitudes de ambos vectores, multiplicado a su vez, por el seno del ángulo más pequeño que ellos forman:

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \operatorname{sen} \theta. \quad (\text{XI.2})$$

Donde θ : es el ángulo más pequeño que forman \vec{a} y \vec{b} .

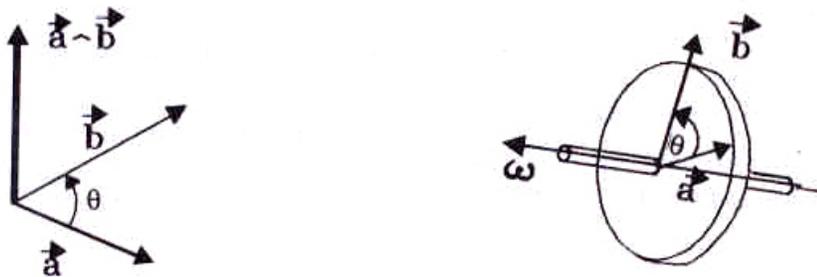


Figura XI.1: Se indica la dirección y sentido del vector que representa el producto vectorial de los vectores \vec{a} y \vec{b} .

• **Sentido** del vector ($\vec{a} \wedge \vec{b}$):

Use la *regla de la mano derecha*, empuñe la mano y estire el dedo pulgar. El ángulo θ es el ángulo más pequeño que va desde \vec{a} hacia \vec{b} , y ésta debe ser la dirección en que apuntan los dedos empuñados. En esta posición, el pulgar indica la dirección y sentido del vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$.



Figura XI.2: Uso de la regla de la mano derecha. Es una convención usada frecuentemente y por lo tanto conviene no olvidar. Entre sus aplicaciones permite asociar un vector a la velocidad angular ω .

Nota

La dirección del ángulo en $\vec{a} \wedge \vec{b}$ se toma siempre partiendo desde el primer vector (\vec{a}) hacia el segundo (\vec{b}). El orden es importante en esta definición.

• Definición de \otimes y \odot .

Siempre trabajaremos con la situación más simple: rotación de un cuerpo en torno a un eje. En este caso nos basta definir un *vector unitario cuya dirección sea normal al plano del papel y cuyo sentido identifiquemos a continuación*:

\otimes \equiv Entrando en el papel.

\odot \equiv Saliendo del papel.

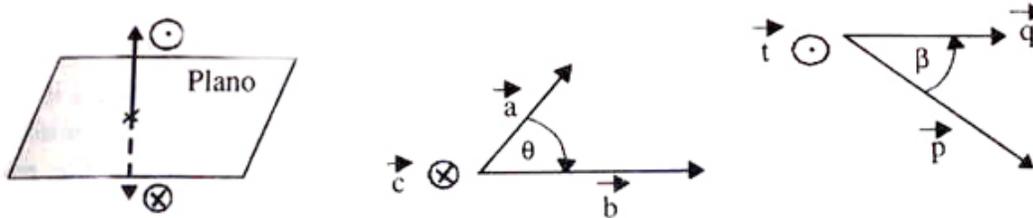


Figura XI.3: Definición de los vectores \otimes y \odot .

Ejemplo

Calcular $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

Los vectores \vec{a} y \vec{b} , se ubican en el plano, entonces:

$$\vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \otimes.$$

Si tomamos otro par de vectores, como \vec{p} y \vec{q} de la Figura, entonces:

$$\vec{t} = |\vec{p}| |\vec{q}| \sin \beta \odot.$$

\oplus , \odot indican los dos sentidos posibles en la dirección perpendicular al plano del papel. Es la única información que necesitaremos en este caso.

La notación anterior representa una flecha que, si apunta hacia el papel toma la forma de la cola de una flecha, \oplus . Por otra parte, el vector saliendo del papel hacia nosotros se designa como \odot , y representa la punta de la flecha.

Note que:

$$\oplus = -\odot. \quad (\text{XI.3})$$

XI.2.2. Álgebra del producto vectorial (o producto cruz).

Asociatividad.

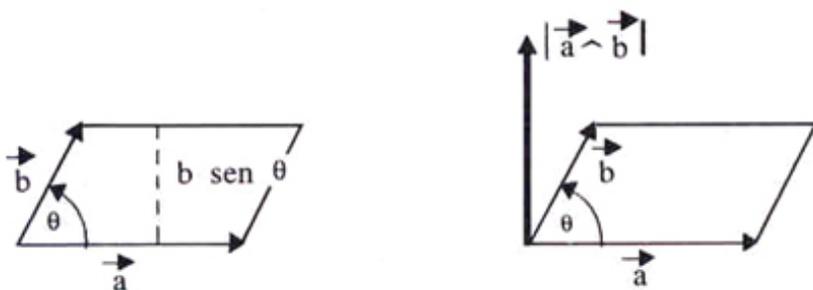
Dados tres vectores, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , entonces se cumple que:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}. \quad (\text{XI.4})$$

El álgebra **anticonmuta**. En otras palabras: el orden de los términos en el producto es importante:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}. \quad (\text{XI.5})$$

Una superficie plana se puede asociar con un vector generado precisamente a través del producto vectorial. Imaginemos un romboide pequeño del tamaño de una moneda, esta superficie puede ser representada por un vector perpendicular a ella. Con esta definición ya conocemos la dirección del vector, su sentido es arbitrario y lo definimos al final de esta sección. La magnitud de este vector está determinada por el valor del área de la superficie. Este valor está dado por la magnitud del producto vectorial de los dos vectores que limitan el romboide (como es el caso de la Figura).



Es decir, el área del romboide de la Figura es:

$$\text{Area} = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{sen } \theta.$$

El área de un elemento de superficie puede ser representado por un vector, cuya dirección indica la orientación de la superficie en el espacio y su magnitud nos da el valor del área:

$$\vec{\text{Area}} \equiv \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

De la regla de la mano derecha se desprende que, al elegir el orden de los vectores \vec{a} y \vec{b} , estamos definiendo automáticamente el sentido del vector que representa la superficie.

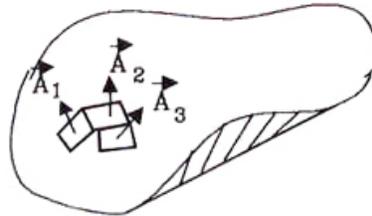


Figura XI.4: En cada una de las superficies se ha dibujado un romboide elemental. El vector que lo identifica lo hace dando solamente el punto P de la superficie y el vector perpendicular que lo representa.

En el caso de una superficie curva como la de una esfera o un elipsoide, siempre se puede descomponer en elementos de área muy pequeños (infinitesimales) de forma que la superficie queda armada mediante un conjunto de escamas (o tejas) y cada una de ellas se puede representar de la forma definida anteriormente.

XI.3. ESTÁTICA

Esta es la primera aplicación del concepto de torque que estudiaremos. La estática se concentra en el estudio de cuerpos (objetos con dimensiones finitas), que permanecen en equilibrio bajo la acción de fuerzas externas aplicadas en distintos puntos. Por equilibrio entendemos cuerpos que no rotan ni se trasladan. Estos incluyen principalmente estructuras fijas como puentes, edificios, grúas...etc.

Comenzamos definiendo lo que entendemos por traslación y rotación.

Traslación y Rotación

Traslación: Existe traslación pura si todos y cada uno de los puntos de un cuerpo rígido experimentan el *mismo* desplazamiento.

Si el desplazamiento de cada uno de los puntos del cuerpo –que permanece sin deformarse– es diferente, el movimiento se puede considerar como una superposición de una *Rotación* y una *Traslación*.

Si el Torque, $\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$, ejercido por todas las fuerzas que actúan sobre un objeto con respecto a un punto dado, es nulo, el cuerpo no rota o permanece rotando con velocidad angular constante si lo estaba inicialmente.

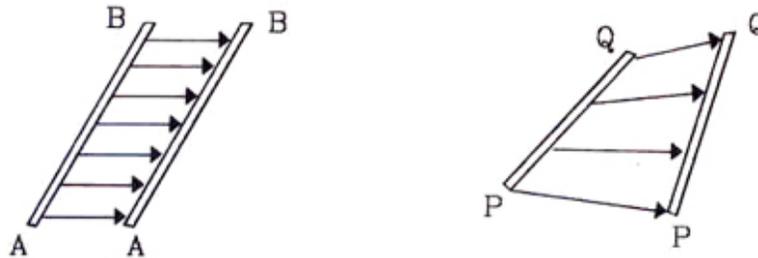


Figura XI.5: La barra AB experimenta sólo una traslación: cada uno de sus puntos se desplaza la misma cantidad. La barra PQ experimenta una traslación y una rotación simultáneamente.

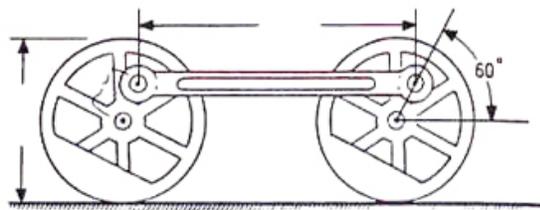
Con esta definición iniciamos el estudio del movimiento de los cuerpos rígidos, teniendo en consideración sus dimensiones espaciales. Si el cuerpo se reduce a un punto, ni el torque ni la rotación están definidos, y por lo tanto no existen.

El Torque está asociado a la aceleración angular de un cuerpo. En un punto material, no tiene sentido hablar de rotación ni torque. Si un cuerpo extendido tiene aplicadas varias fuerzas y no experimenta rotación alguna, entonces el torque neto de estas fuerzas es nulo.

Ejemplo

La barra de la Figura está unida rígidamente a las dos ruedas. La distancia entre ejes de estas ruedas permanece constante. Se pregunta si la barra realiza un movimiento de rotación neto o un movimiento de traslación.

La barra que une ambas ruedas, experimenta una traslación pura, de acuerdo a nuestra definición, puesto que cada uno de sus puntos sufre el mismo desplazamiento. □

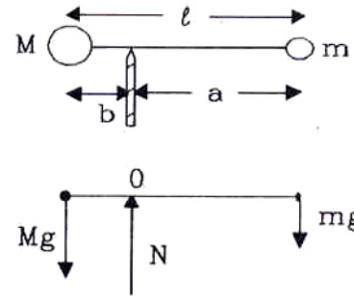


Ejemplo

Estudiemos el *equilibrio* de dos masas M y m unidas por una barra muy liviana (sin masa) de largo ℓ y pivoteada en algún punto entre ellas de forma que el sistema permanezca en equilibrio.

Encontrar el valor de a y b , de forma que las partículas permanezcan en equilibrio.

(Suponga que las dos masas M y m , se comportan como masas puntuales concentradas en el centro de la esfera).



Por equilibrio entendemos que no existe movimiento: ni traslación, ni rotación, por lo tanto, en la dirección vertical, se cumple que:

$$\vec{a} = 0 \implies \sum \vec{F} = 0, \tag{XI.6}$$

$$N = (M + m)g. \tag{XI.7}$$

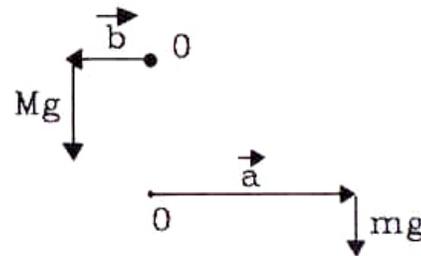
Sabemos que si ubicamos el punto de apoyo en un lugar arbitrario de la barra, volcará hacia uno de los lados. Volcar significa adquirir una velocidad angular. Para que esto no suceda el torque también debe ser cero. Elegimos como origen de coordenadas el punto de apoyo y con respecto a él, calculamos el torque generado por las masas M y m .

$$\vec{\tau}_M = \vec{b} \wedge M\vec{g} = b M g \odot$$

$$\vec{\tau}_m = \vec{a} \wedge m\vec{g} = a m g \otimes$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \implies$$

$$0 = \vec{\tau}_M + \vec{\tau}_m = [b M g - a m g] \odot$$



Como la suma de los torques debe ser nula, para que no exista rotación, entonces:

$$b M = a m, \tag{1}$$

pero el largo de la barra es:

$$a + b = \ell. \quad (2)$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas y por lo tanto podemos resolver el problema. Su resultado es:

$$b = \frac{m}{M + m} \cdot \ell, \quad (\text{XI.8})$$

$$a = \frac{M}{M + m} \cdot \ell. \quad (\text{XI.9})$$

De esta forma, si ubicamos el pivote a una distancia a de la masa más pequeña, la barra permanecerá en equilibrio.

XI.3.1. Ecuaciones de la estática

Un cuerpo permanece en reposo (sin traslación ni rotación), si la suma del total de las fuerzas y torques que actúan sobre él, se anulan.

En estática, el torque puede ser evaluado con respecto a un origen arbitrario de coordenadas y no cambia su valor.

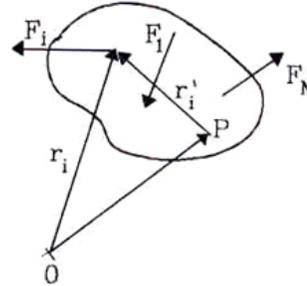
En dos dimensiones, la estática proporciona tres ecuaciones: dos de ellas provienen de las ecuaciones de Newton y la otra de la anulación del torque.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (\text{XI.10})$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \quad (\text{XI.11})$$

Torque con respecto a un punto arbitrario.

A continuación demostramos que en Estática el valor obtenido para el torque es *independiente* del punto que se tome como origen de coordenadas.



En la Figura aparece un conjunto de fuerzas arbitrarias $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$, que actúan sobre una figura con forma de riñón que representa al cuerpo rígido. Existen dos puntos: O y P , con respecto a los cuales tomaremos torque. Los vectores que unen el punto de referencia con las respectivas fuerzas, se designan con prima si provienen del punto P , por ejemplo, \vec{r}'_i . Los vectores sin prima, \vec{r}_i , están definidos teniendo al punto O como su origen.

Al calcular el torque total de las fuerzas con respecto al punto O , comprobaremos que toma el mismo valor que al repetir la operación pero ahora con respecto al punto P .

Como ambos puntos: O y P , son arbitrarios, concluiremos que el valor del torque en *estática*, es independiente del punto que se tome como referencia.

A continuación realizamos los cálculos explícitamente.

Como el cuerpo está en equilibrio, el torque total $\sum \vec{\tau}$, evaluado con respecto al punto O es:

$$\sum \vec{\tau} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = 0,$$

usando la igualdad $\vec{r}_i = \vec{OP} + \vec{r}_i'$, obtenemos:

$$\sum \vec{\tau} = \sum_{i=1}^N (\vec{OP} + \vec{r}_i') \wedge \vec{F}_i,$$

como el producto vectorial es asociativo, tenemos:

$$= \sum_{i=1}^N \vec{OP} \wedge \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i$$

pero:
$$\sum_{i=1}^N \vec{OP} \wedge \vec{F}_i = \vec{OP} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OP} \wedge \vec{F}_2 + \dots + \vec{OP} \wedge \vec{F}_n,$$

entonces:
$$\sum_{i=1}^N \vec{OP} \wedge \vec{F}_i = \vec{OP} \wedge \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right),$$

reemplazando este resultado en la ecuación original:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{OP} \wedge \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i,$$

como la **estática** se caracteriza por:
$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0,$$

$$= \vec{OP} \wedge \vec{0} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i$$

$$\sum \vec{\tau}_O = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{\tau}_P \quad (\text{XI.12})$$

Concluimos que en *estática*, podemos tomar torque con respecto al punto que más nos convenga: aquel que produzca la expresión más simple o que entregue mayor información acerca de la magnitud de la fuerza que buscamos. El valor del torque, como se demostró, no depende del origen escogido.

Ejemplo

¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de roce estático μ para que la escalera de la Figura no resbale sobre el piso?

Conocemos el largo de la escalera L , sabemos que el pintor se ubica a una distancia s del suelo y que tiene una masa M . Despreciamos la masa de la escalera comparada con la masa del pintor. El ángulo que forma la escalera con el piso es 60° .

Consideramos la pared como una superficie sin roce. El roce en el piso es el único relevante para el equilibrio de la escalera.

Recordemos que:

$$\sin 30^\circ = 1/2, \quad \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2,$$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2, \quad \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2.$$

Si no hay roce en el piso, se puede demostrar (**Ejercicio**) que no hay posibilidad de alcanzar equilibrio. Nadie, en su sano juicio, pone una escalera en un piso recién encerado.

Con el objeto de simplificar los cálculos, se desestima el roce generado entre la escalera y la muralla.

A partir del diagrama de cuerpo libre que se incluye y usando las ecuaciones [XI.10] y [XI.11], obtenemos:

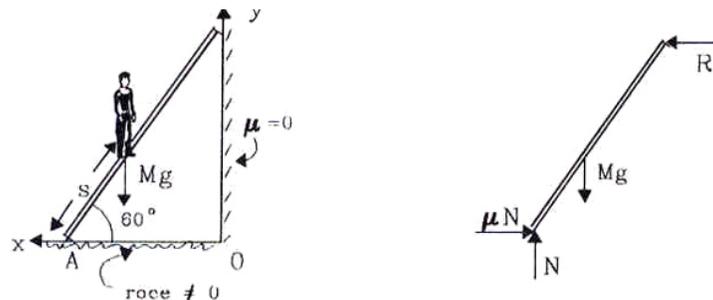


Figura XI.6: Escalera apoyada en una muralla sin roce. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de la escalera.

$$\sum F_x = 0 \implies -\mu N + R = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \implies N - F_G = 0 \quad (F_G \equiv Mg) \quad (2)$$

El torque con respecto al punto A es:

$$\vec{r}_G \wedge \vec{F}_G = s M g \operatorname{sen}(90 + 60) \otimes$$

$$\vec{r}_G \wedge \vec{F}_G = s M g \cos 60^\circ \otimes$$

$$\vec{r}_R \wedge \vec{R} = L R \operatorname{sen} 120^\circ \odot = L R \cos 30^\circ \odot$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 = s M g \cos 60^\circ \otimes + L R \cos 30^\circ \odot$$

De esta última ecuación, y recordando que: $\otimes = -\odot$, obtenemos el valor de la reacción R:

$$s M g = L R \sqrt{3} \implies R = \frac{s M g}{L \sqrt{3}}. \quad (3)$$

Introduciendo este valor en la ecuación (1) obtenemos:

$$\mu N = R = \frac{s M g}{L \sqrt{3}},$$

y finalmente usando la ecuación (2): $N = F_G = M g$, encontramos el valor mínimo de μ :

$$\mu = \frac{s}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Cualquier valor mayor para μ , es también una solución posible.

Comprobemos que este resultado contiene los casos extremos en los cuales se puede intuir, a través de la experiencia, la respuesta correcta. Por ejemplo, si $s = 0 \implies$ no necesita roce, puesto que el pintor se ubica justo en el piso.

Si $s = L \implies \mu = 1/\sqrt{3}$, el valor del roce debe ser máximo, como es natural si el pintor se ubica en el último peldaño de la escalera.

Es interesante notar que el roce necesario para mantener en equilibrio la escalera *no* depende de la masa del pintor. Si la escalera no resbala con un niño encima, tampoco lo hará con una persona de mayor masa. Lo que cambia son los valores de las reacciones sobre la pared y el piso. ¿Cómo cambian estas últimas afirmaciones si no despreciamos el roce entre la escala y la pared?

Ejercicio

Repita el Ejemplo anterior suponiendo que la escalera forma un ángulo α con el piso. Encuentre el valor de μ en este caso, y examine los límites para diversos valores del ángulo α .

Respuesta: $\mu = [s/L] \tan \alpha$. \square

Ejemplo

Un trozo de madera de base cuadrada, lado $2a$ y peso W , descansa sobre un piso cuyo coeficiente de roce estático es μ_e . A una altura h de la base se aplica una fuerza horizontal \vec{P} .

Encontrar la condición que debe cumplir el coeficiente de roce estático μ_e , para que el trozo de madera vuelque, sin deslizar, bajo el efecto de la fuerza \vec{P} .

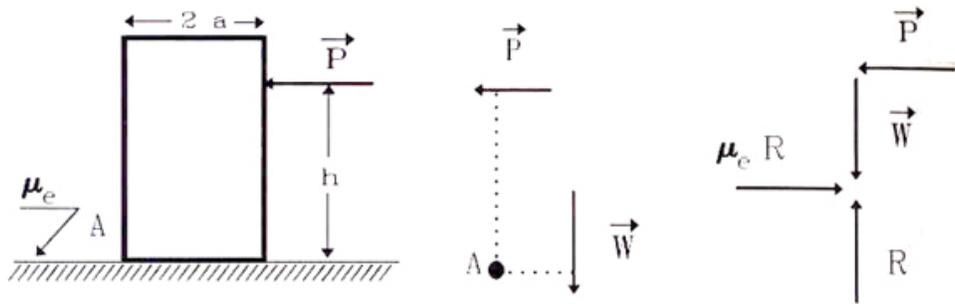


Figura XI.7: Tomando como origen el vértice A del bloque, aparecen dos torques: uno generado por la fuerza P y el otro debido al peso W del cuerpo. A la derecha se incluye el diagrama de cuerpo libre correspondiente.

Tomando torque con respecto al vértice A, y suponiendo (correctamente) que el peso actúa justo en el centro del rectángulo que caracteriza a este objeto, tenemos:

$$\sum (\tau_P + \tau_W) = Ph - Wa = 0, \quad \text{para que el bloque esté a punto de volcar,}$$

$$\sum F_{\text{horizontales}} = 0 \implies P \leq \mu_e W, \quad \text{cota para el valor máximo de } \vec{P}.$$

Despejando P de ambas ecuaciones obtenemos: $a/h < \mu_e$. Esta es la condición necesaria para volcar el bloque. Al contrario, si $\mu_e < a/h$, el cuerpo comienza a deslizar sin volcarse, porque el torque es nulo y la fuerza \vec{P} es mayor que la fuerza de roce que se le opone.

Podemos analizar este resultado: supongamos que a es muy pequeño, en este caso es muy difícil impedir que el bloque no vuelque, puesto que deslizará sólo si $\mu_e < a/h \approx 0$.

Supongamos que se desea trasladar un armario –una caja vertical cuyo alto es mayor que su ancho y mucho mayor que su fondo– de un punto a otro dentro de una pieza. Una forma de hacerlo es empujar desde un punto muy bajo del armario para evitar que se tumbe. Esta estrategia corresponde a poner h muy pequeño en nuestra solución. En este caso siempre ocurrirá que $\mu_e < a/h$ y el cuerpo –un armario, en este caso– deslizará sin volcarse.

Para finalizar, destaquemos que al tomar el punto A de la Figura como referencia para calcular el torque simplificamos la solución de este problema. La estrategia seguida fue la

siguiente: se pensó primero que el cuerpo estaba a punto de comenzar a levantarse para terminar posteriormente volcando –puesto que ése es el caso crítico que nos interesaba– en ese instante, la fuerza de reacción del piso sobre el bloque se *aplicaba justo sobre el vértice A, el único punto de contacto con el piso*, de modo que esta reacción no generó torque alguno, al igual que la fuerza de fricción y, de esta manera, simplificamos la resolución del ejemplo propuesto. □

XI.4. VIGAS Y ESTRUCTURAS

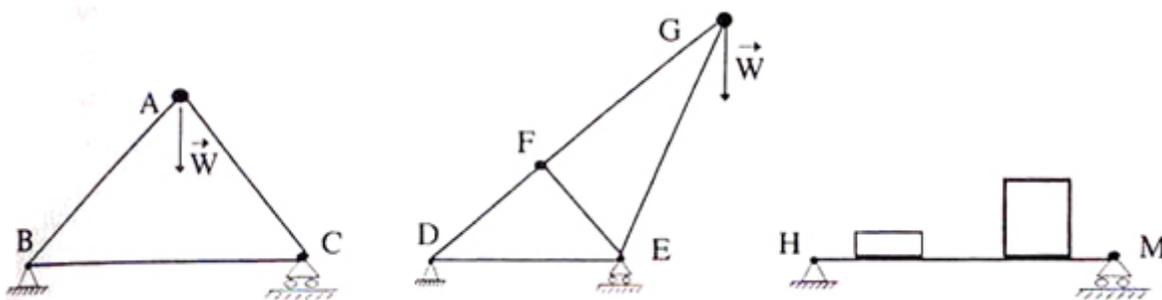


Figura XI.8: Se incluyen varios tipos de estructuras simples, isostáticas, que pueden ser resueltas –bajo las suposiciones que indicamos en el texto–, con las ecuaciones de estática.

Las estructuras de la Figura [XI.8] se denominan *isostáticas*, porque se pueden resolver usando sólo las ecuaciones de la estática. Se caracterizan porque en cada unión (por ejemplo, A, B,...H, en la Figura [XI.8]) *sólo se transmiten fuerzas y no torques*. En estos casos tampoco consideramos las deformaciones de las estructuras.

En el mundo real, las uniones transmiten fuerzas, torques y producen deformaciones; pero la inclusión de todas estas características corresponde más bien a un curso de resistencia de materiales, que a uno de introducción a la física.

Bajo estas consideraciones, el modelo de un puente corresponde a la estructura de la Figura [XI.11]. Los apoyos de un puente son diferentes en cada extremo y ambos se describen a continuación.

Una forma de apoyo (izquierda de la Figura [XI.11]) consiste en fijar una rótula al piso. Este extremo está soldado al piso. En el diagrama de cuerpo libre [XI.10] separamos el piso (o fundación) de la estructura y debemos reemplazarla por dos fuerzas perpendiculares entre sí. Una de las fuerzas impide que la estructura se deslice y la otra impide que se hunda en el piso. Como esta rótula es ideal *no* transmite torque.

Otra posibilidad es permitir la dilatación de la estructura – su cambio de longitud– para ello se reemplaza la rótula por un par de rodillos sobre los cuales se apoya la viga [XI.10]. De esta forma se permite el deslizamiento en dicho extremo.

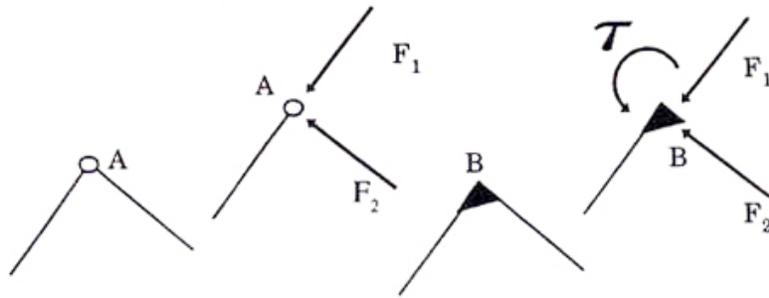


Figura XI.9: Los efectos de una unión ideal (izquierda) y otra más cercana a la realidad (derecha) son comparados en la Figura. En la unión ideal sólo se transmiten fuerzas. En la versión más realista de la derecha se incluye el torque que genera la unión.

En este tipo de soporte sólo se ejerce una fuerza perpendicular al piso. Aquí se desestima la fuerza de roce que se genera entre las dos superficies al compararla con la fuerza normal.

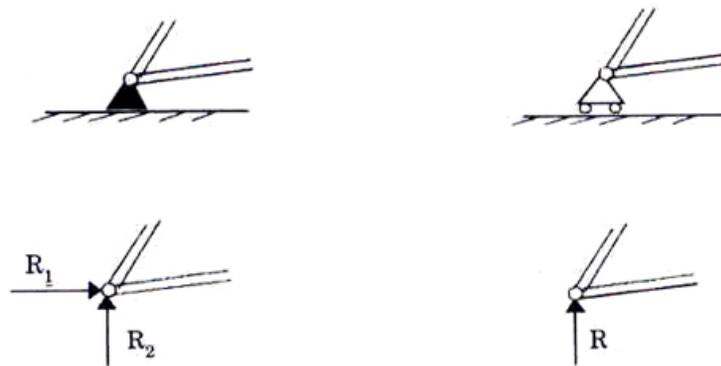


Figura XI.10: Dos tipos de soporte de estructuras: uno fijo al piso y el otro con rodillos que permiten el deslizamiento. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de cada uno de ellos.

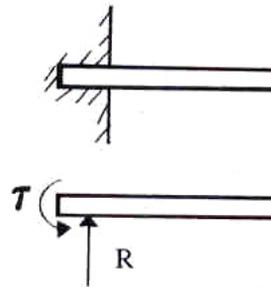
Los puentes férreos usualmente tienen este tipo de soporte en un extremo.

Estas dos uniones son las más recurrentes en este tipo de ejemplos. Ambas aparecen siempre de a pares en estructuras de mucha longitud, puesto que al dejar libre un extremo, permite la expansión o contracción de los materiales debido a los cambios de temperatura, evitando las deformaciones en la estructura. Además, como se señaló anteriormente, al incluir dos pivotes fijos en cada extremo, las ecuaciones de la estática [XI.10] y [XI.11], no proporcionan suficientes ecuaciones para resolver todas las incógnitas que aparecen, el problema deja de ser isostático y para resolverlo debemos analizar las deformaciones del cuerpo para obtener de allí las ecuaciones que faltan.



Figura XI.11: Modelo de la viga soportada en sus extremos por una unión fija y otra deslizante. A la derecha se incluye el diagrama de cuerpo libre de la estructura.

Otra forma de fijar un extremo de una estructura, es mediante un empotramiento. En este caso se fija sólo uno de los extremos de la viga. Esta configuración se denomina viga empotrada. En el diagrama de cuerpo libre correspondiente a este caso, se debe reemplazar la muralla por un torque y una fuerza vertical que se aplican sobre la viga.



Resolvamos el siguiente ejemplo haciendo uso de las leyes de Newton y de las propiedades de las uniones respectivas en los extremos. Es notable que en esta primera aproximación al estudio de estructuras, no necesitamos mayores herramientas para obtener información relevante acerca de su comportamiento.

Ejemplo

Un modelo más primitivo de la estructura de un puente se reproduce en la Figura que se acompaña. Sobre el punto medio de la viga, cuyo peso es despreciable, actúa una fuerza externa W .

Calcular las reacciones en los extremos de la viga, los esfuerzos de corte y el torque que soporta la viga en cada uno de sus puntos.

Como la estructura es rígida entonces, por simetría $R_1 = R_2 = W/2$. Podemos obtener este resultado si, por ejemplo, calculamos el torque tomando el punto medio de la barra como origen. Recordemos que –en el caso estático– el resultado es independiente del origen de referencia.

Calculemos ahora el esfuerzo de corte en cada punto de la barra y procedamos a graficarlo.

Para ilustrar qué es el esfuerzo de corte, supongamos que efectivamente cortamos la viga en un punto intermedio manteniendo el valor de las reacciones en los extremos de la viga. Obviamente, si no aplicamos una fuerza y un torque en el extremo en que se hizo el corte, la estructura comienza a rotar y desplazarse. Precisamente, la fuerza que debemos aplicar para mantener estática la estructura al cortarla, es lo que se denomina *esfuerzo de corte* y su cálculo se realiza del modo señalado: cortando un extremo de la viga y reemplazándola por una fuerza y un torque.

Calculemos primero el esfuerzo de corte y designémoslo como $s(x)$.

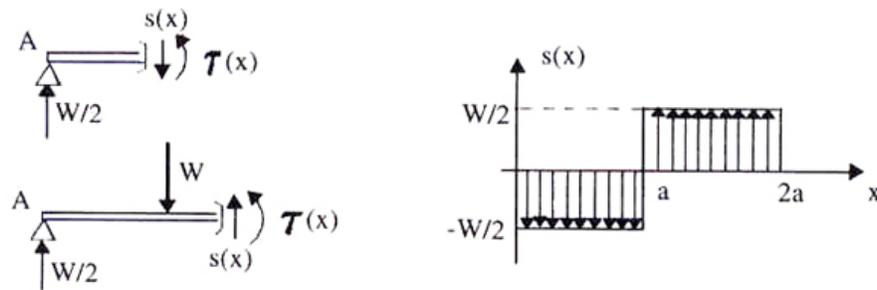


Figura XI.12: Se incluye el diagrama de cuerpo libre al cortar la viga a la izquierda y a la derecha del punto de aplicación de la fuerza W . También aparece un gráfico del esfuerzo de corte a lo largo de la viga.

El diagrama de esfuerzo de corte indica el esfuerzo que soporta la barra en cada uno de sus puntos para resistir el peso W aplicado. Hay una discontinuidad en $x = a$ debido a la existencia de la fuerza externa aplicada W .

Para $x < a$, al hacer la suma de las fuerzas a la izquierda de W , tenemos:

$$s = -\frac{W}{2} \quad \text{independiente de } x.$$

A la derecha de W , el diagrama de cuerpo libre me indica ($x > a$),

$$s = +\frac{W}{2} \quad \text{independiente de } x.$$

Con estos resultados podemos graficar el esfuerzo de corte. Si cortamos la viga en cualquier punto a la izquierda de W , debemos aplicar la fuerza $s = -W/2$ para sostener el sistema y una fuerza $s = +W/2$ si cortamos la viga a la derecha de W . Estos son los valores que se grafican.

Calculemos el torque que debemos aplicar en cada punto de la viga para evitar que ésta gire. Usemos la notación introducida para designar un vector saliendo (\odot), o entrando en el plano del papel (\otimes).

Calculamos el torque producido por las fuerzas ubicadas a la izquierda del punto x y este resultado nos indica el valor del torque $\tau = \tau(x)$ que debemos aplicar en ese punto: x para evitar la rotación.

$x < a$	$x > a$
$\frac{W}{2} \cdot x \otimes + \tau(x) \odot = 0$	$(\frac{W}{2} \cdot x) \otimes + (W \cdot (x - a)) \odot + \tau \odot = 0$
$(-\frac{W}{2} \cdot x + \tau(x)) \odot = 0$	$[-(W a) + \frac{W}{2} \cdot x + \tau(x)] \odot = 0$
$\tau(x) = \frac{W}{2} \cdot x.$	$\tau(x) = W (a - \frac{x}{2}).$

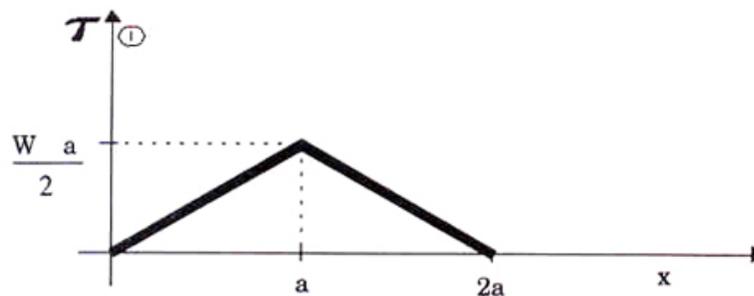


Figura XI.13: Gráfico del torque que actúa en cada punto de la viga. $\tau(x)$ indica el torque que debemos aplicar en el punto x para cancelar el proveniente del resto de las fuerzas. Hemos adoptado \odot como sentido positivo.

¿Con qué objeto calculamos el torque en función de la posición?

Se desea conocer la deformación que sufre la barra debido a las cargas aplicadas.

Es posible demostrar (Ley de Euler-Bernuilli) que el valor del torque en cada punto es inversamente proporcional a ρ , el radio de curvatura de la forma que adopta la viga al deformarse:

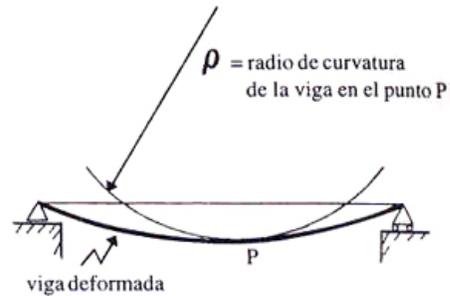
$$\tau(x) = \frac{k}{\rho},$$

La constante k es el producto de dos parámetros: $k = E I$, donde $E \equiv$ Módulo de Young e $I \equiv$ Momento de Inercia. E es un número que caracteriza la rigidez de un material, mientras más rígido, menos se curva bajo la misma carga externa.

El valor de I da una idea de la distribución de la masa de una sección transversal de la viga con respecto a una línea de simetría de la misma viga.

Su definición se incluye más adelante en este capítulo.

Una forma de entender el significado geométrico del radio de curvatura es la siguiente (ver Figura): tomar tres puntos muy cercanos de la viga deformada y trazar una circunferencia que pase a través de ellos. El radio de esta circunferencia, es el radio de curvatura ρ de la viga en dicho punto.



Si queremos el mínimo de deformación para una viga dada, entonces, el radio de curvatura debe ser lo más grande posible: $\rho \rightarrow \infty$, de esta forma la curva se aproxima a una línea recta.

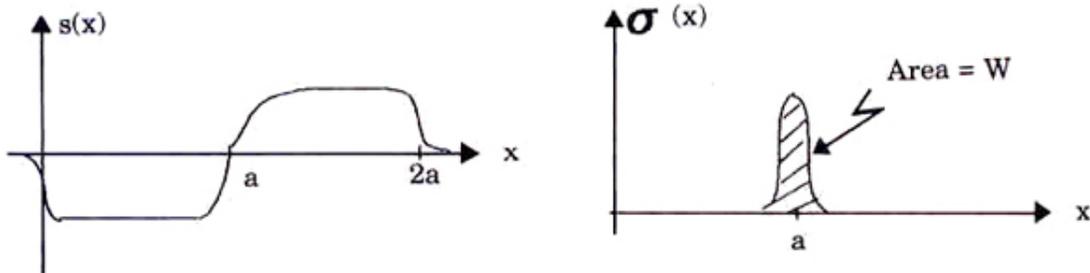


Figura XI.14: Una fuerza actuando en un punto de la viga es fácil de estudiar, pero es más realista suponer que la fuerza se distribuye en un pequeño sector de la viga. Aquí se esboza el diagrama de esfuerzo de corte para este caso.

Nota

Como en este problema nos acercamos un poco a la ingeniería, podemos comentar acerca del significado físico de tener una fuerza actuando sobre un punto de la viga. Esta situación es una aproximación razonable. Más cercano a la realidad –aunque más complicado en su expresión matemática–, es identificar la fuerza W con una distribución de *fuerzas por unidad de superficie*, en una vecindad del punto donde nosotros instalamos la fuerza externa W . Esta fuerza por unidad de superficie se denomina *presión*.

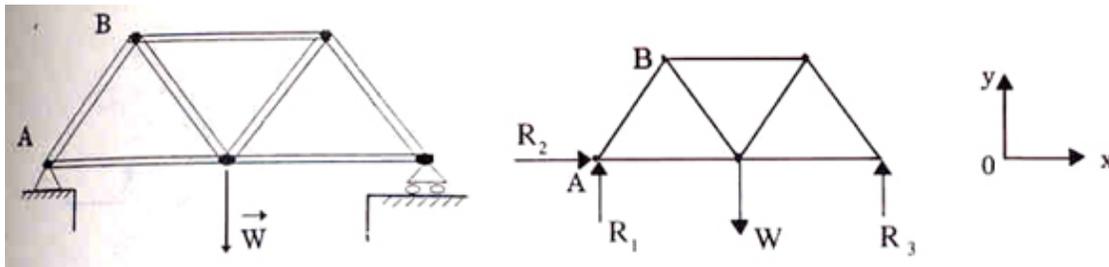


Figura XI.15: A la izquierda aparece un modelo simple de la estructura de un puente soportando una carga estática W . Se incluye el diagrama de cuerpo libre de la estructura.

En el caso de una viga, que la consideramos como un cuerpo sin dimensiones salvo longitud, la fuerza se distribuye por unidad de largo, $\sigma(x)$. Esta fuerza por unidad de largo se conecta a la fuerza W que nosotros usamos, de la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \sigma(x_i) \Delta x_i = W.$$

En el gráfico F_{total} versus x , se reproduce el esfuerzo de corte en su versión de fuerzas por unidad de largo distribuidas en una vecindad de W . Este resultado se puede comparar con el gráfico obtenido en el primer punto del ejercicio: $s(x)$ versus x .

Ejemplo

En la Figura [XI.15] aparece un modelo simple de un puente. W , representa una carga estática que descansa sobre esta estructura. Todas las barras son de largo a y tienen las mismas propiedades físicas.

- a) Calcular las reacciones en cada uno de los soportes de los extremos del puente, generados por la fuerza W .
- b) Calcular la tensión en la barra AB de la estructura.

a) Para calcular las reacciones en los apoyos usamos el único método que conocemos: las leyes de Newton y el diagrama de cuerpo libre.

Consideramos el puente como un todo rígido. Las leyes de Newton no tienen cómo distinguir entre el puente con sus barras y un cuerpo rígido, puesto que no se incluyen las deformaciones. Las barras sólo identifican dónde y en qué dirección actúan las fuerzas. Las ecuaciones de la estática permiten obtener los siguientes resultados:

$$1) \sum F_x = 0 \quad \implies R_2 = 0,$$

$$2) \sum F_y = 0 \quad \implies R_1 + R_3 = W.$$

Calculamos el torque tomando como origen el punto A:

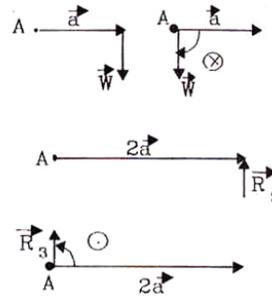
$$\vec{\tau}_W = aW \quad \otimes$$

$$\vec{\tau}_{R_3} = 2aR_3 \quad \odot$$

$$3) \sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow -aW + 2aR_3 = 0$$

Haciendo uso de las tres ecuaciones obtenemos los valores de las reacciones:

$$R_3 = \frac{W}{2}, \quad R_1 = \frac{W}{2}$$

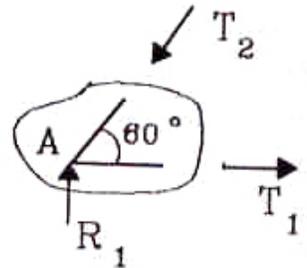


b) A continuación calculamos la tensión sobre la barra AB. El mismo método usado aquí puede aplicarse a cualquiera de las otras barras.

Como cada sección del puente debe estar en equilibrio para que el puente como un todo lo esté, entonces en cualquier sección arbitraria del puente se deben satisfacer las leyes de la estática. En particular en la sección que se indica en la Figura a continuación, debe cumplirse que:

$$\sum F_x = 0, \quad -T_2 \cos 60^\circ + T_1 = 0,$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_1 - T_2 \sin 60^\circ = 0.$$



Estas son todas las ecuaciones, puesto que al tomar torque con respecto al punto A, obtenemos $0 = 0$.

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, T_1 y T_2 , por lo tanto el problema está resuelto.

$$T_1 = \frac{W}{2\sqrt{3}}, \quad T_2 = \frac{R_1}{\sqrt{3}/2} = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

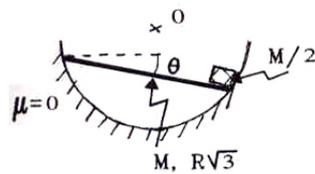
donde T_1 y T_2 son las tensiones a las que están sometidas las barras.

XI.5. EJERCICIOS

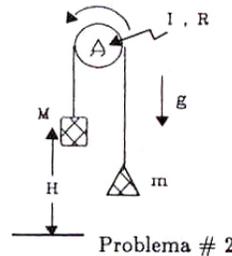
- Una barra de masa M y largo $\sqrt{3}R$ descansa sobre un canal de sección circular y de radio R . En un extremo de la barra se ubica una masa puntual $M/2$, como se indica en la Figura. Calcule el ángulo θ que adopta la barra en su posición de equilibrio.
- Sobre la polea de la Figura, cuyo momento de inercia es I , se enrolla una cuerda inextensible y sin masa. La polea gira unida a la cuerda, sin resbalar en ningún momento. En cada uno de sus extremos, cuelga un bloque de masa m y M respectivamente, con $M > m$.

Inicialmente la masa M está a una altura H y en reposo. Al soltarla cae y después de chocar con el piso permanece en reposo.

- Calcule el tiempo que demora la masa M en tocar el piso.
- Calcule hasta que altura alcanza a subir la masa m después que M toca el piso.



Problema # 1



Problema # 2

Figura XI.16:

- Cuando un cuerpo cuelga de un punto y se encuentra en reposo, cualquiera sea su forma, *siempre* su centro de masa se ubica en la vertical que pasa por dicho punto. Las dos barras de largo $2L$ y 2ℓ , cuyas masas son M y m respectivamente, están soldadas en B formando un ángulo de 90° .
 - Calcule la posición del Centro de Masa del sistema de las dos barras.
 - Calcule el ángulo α que hace la barra $2L$ con la vertical en la posición de equilibrio.
 - Estudie su respuesta con los siguientes casos particulares:
 - $m = 0$,
 - $M = 0$
 - $\ell = L$, con $m = M$.
- Pedro y Pablo Diet desean saber cuánto pesan, pero no disponen de una buena balanza. Para hacerlo idearon el siguiente método: se dirigieron a la plaza y se ubicaron en los extremos del balancín. Si Pablo se ubica a una distancia l_1 del apoyo del balancín y Pedro a una distancia l_2 , el balancín queda en equilibrio (ver Figura).

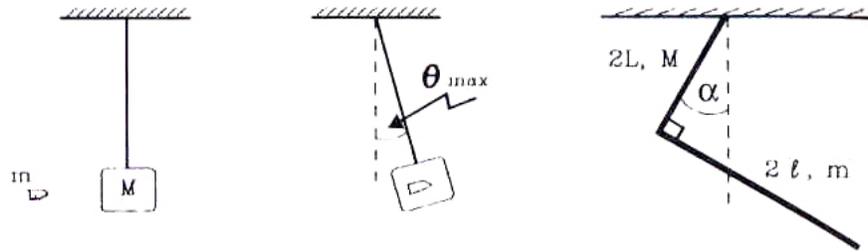


Figura XI.17:

Problema # 3

Problema # 4

Enseguida, Pedro toma una piedra de P kg. y se ubica a una distancia l_3 del centro de giro, mientras que Pablo lo hace a una distancia l_4 , quedando el sistema en equilibrio. Considere $l_4 > l_3$.

Obtenga una expresión para los pesos de Pedro y Pablo en función de los datos del problema.

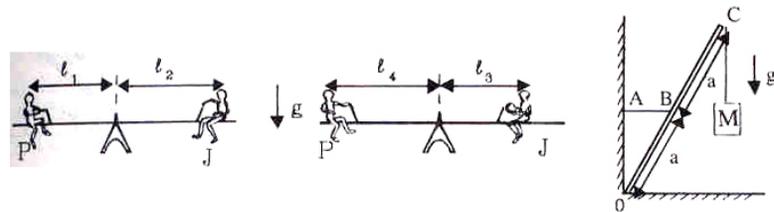


Figura XI.18:

Problema # 5

Problema # 6

5. – Calcular la tensión sobre la cuerda AB, si la barra OC tiene masa despreciable y el pivote en O no tiene roce.
6. – Un letrero luminoso, cuya masa tiene un valor M , cuelga en forma horizontal, sostenido mediante una cuerda y una barra, como se muestra en la Figura. Calcule la tensión en la cuerda DC y las reacciones en la rótula de apoyo A.

