INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 29 de mayo de 2016

Índice general

Capítulo IX

OSCILADOR ARMÓNICO

IX.1. INTRODUCCIÓN

Al deducir la ley de Hooke, un resorte se estiraba lentamente colgando masas iguales consecutivamente en su extremo libre y se medía, después de detener su movimiento, e cambio en su largo. Este es el caso estático. Analizaremos a continuación la dinámica del resorte. Consideramos sólo el resorte y una masa en su extremo, se comprime -por ejem'lo-, y se deja libre. El movimiento que se observa se denomina armónico simple. Estudiaremos analíticamente este movimiento en este capítulo.

Esta oscilación es probablemente la más recurrente en todas las áreas de la física. Típico es encontrar un punto de equilibrio de un sistema y calcular las pequeñas oscilaciones alrededor de este punto.

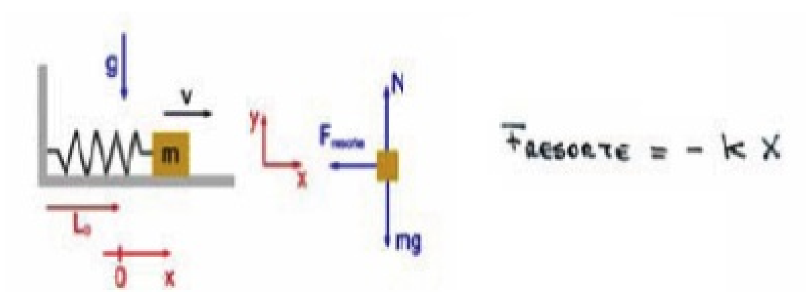


Diagrama de cuerpo libre del resorte. La única fuerza externa horizontal, proviene del resorte y el sentido de esta fuerza se opone desplazamiento con respecto del punto de equilibrio **x**. *Si el desplazamiento* **x** *es positivo, la fuerza apunta en el sentido negativo del eje x. Si es negativo, la fuerza del resorte apunta en el sentido positivo del eje x.*

En este escenario la segunda ley de Newton se traduce en

$$m\,a = -k\,x, \qquad \text{(IX.1)}$$

donde a≡ aceleración de la masa **m** a lo largo del eje **x** que es el eje del resorte. Estamos considerando un movimiento en una dimensión. La masa desliza sobre una superficie sin roce.

Suponemos que la ley de Hooke, encontrada estudiando el caso estático se aplica –sin cambios–, al movimiento acelerado ya que hemos supuesto un resorte de masa nula. La validez de esta suposición debe ser contrastada mediante los experimentos.

No consideramos el roce en esta etapa inicial. Se analizará al final por ser un problema más complejo.

El siguiente paso es resolver la ecuación de movimiento [IX.1]. Esta ecuación indica que la aceleración es proporcional a la posición de la masa, como la masa oscila, la aceleración no es constante . Esto es diferente al caso de una partícula moviéndose con aceleración constante: $a_y = g$, por ejemplo. Esta condición genera una trayectoria parabólica: $\mathbf{y(t)} = y_o + v_{oy}\, t\ + (1/2)\, g\, t^2$.

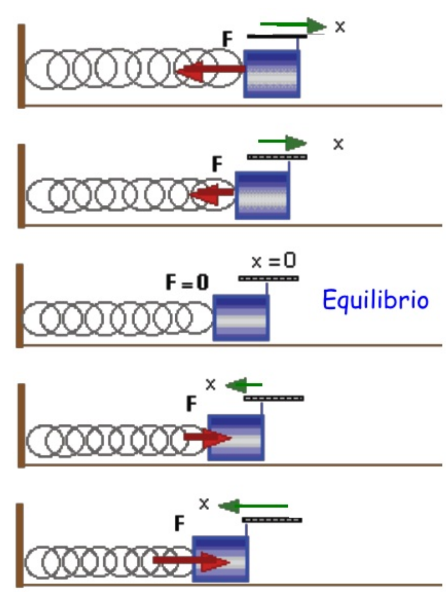
La ecuación de movimiento [IX.1] es una ecuación diferencial. La aceleración es la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo y la igualdad en [IX.1] exige que esta segunda derivada tome un valor proporcional al de la posición en cada instante.

Como no es requisito conocer ecuaciones diferenciales en este curso, resolveremos esta ecuación utilizando su analogía con el movimiento circular uniforme, donde -por ejemplo-, la proyección de su vector posición en el eje-x , cumple la misma ecuación que rige el movimiento del resorte IX.1.

Ejemplo

Analice cualitativamente la ecuación de una masa acoplada a un resorte.

La ecuación del oscilador siempre se puede escribir como:
a(t) = - [k/m] x(t). Como **k** y **m** son positivos y por su analogía con el movimiento circular, como veremos a continuación, se acostumbra a definir $\omega^2 \equiv \mathbf{k/m}$. Podemos apreciar que si la partícula se ubica en el lado positivo del eje en algún instante: **x(t)** >0, la aceleración es negativa, va frenando el movimiento de la partícula hasta que la partícula se detiene (velcidad nula) y comienza a devolverse. A continuación, su velocidad apunta hacia el origen (es negativa) y va creciendo en módulo debido a que la aceleración apunta hacia el origen.



La evolución de la fuerza (o aceleración) y el estiramiento del resorte.

Una vez que alcanza el origen la aceleración desaparece en ese instante y posteriormente al comenzar a moverse en la región negativa del eje **x**, la aceleración de la partícula apunta en el sentido positivo del eje **x** y nuevamente la partícula comienza frenar su movimiento. El argumento anterior se repite y la partícula no puede escapar de una cierta región finita del eje **x(t)**.□

Para resolver la ecuación IX.1 se requiere conocer cálculo diferencial. Afortunadamente, podemos resolverla utilizando una estrategia que explicamos a continuación y con la cual evitamos recurrir a la maquinaria del cálculo. Una parte del argumento es que esta ecuación diferencial m a = - k x , **tiene una solución única**, de modo que si encontramos una solución, cualquiera sea el método utilizado, es la solución buscada.

la segunda parte es comprobar que la ecuación IX.1 aparece en la descripción del movimiento circular uniforme. El detalle de este método viene en la sección siguiente.

IX.2. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

A continuación mostraremos que basta entender la cinemática del movimiento circular uniforme para resolver la ecuación [IX.1].

Empecemos recordando la expresión para la aceleración de una partícula que describe una circunferencia con una rapidez uniforme:

$$\vec{a} = -\omega^2 r[\cos\ \omega\, t,\ \text{sen}\,\omega\, t] = -\omega^2 \vec{x}. \tag{IX.2}$$

Al tomar la componente x de este vector, obtenemos:

$$a_x = -\omega^2\, r\ \cos\,\omega\, t = -\omega^2\, x, \tag{IX.3}$$

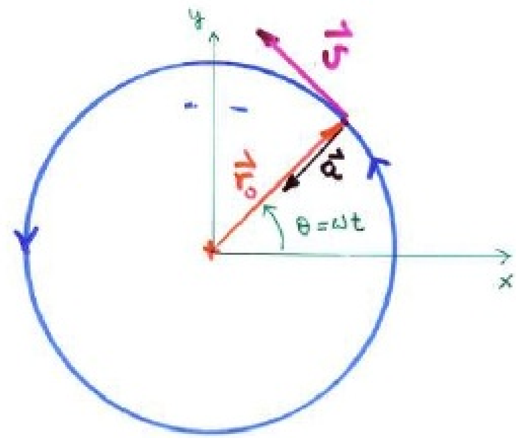
se puede apreciar que es el mismo tipo de ecuación que aparece en el caso del resorte, si identificamos ω^2 con k/m.

En palabras, esta ecuación nos dice que en cada instante el valor de la aceleración debe ser proporcional a la posición de la partícula. El factor de proporcionalidad es $-\omega^2$.

Si ambas ecuaciones, la obtenida al estudiar el movimiento armónico simple y aquélla que gobierna el movimiento de una masa unida a un resorte, son iguales, entonces tienen la *misma solución*. Una de las soluciones de la ecuación [IX.1], es:

$$x(t) = A \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right], \qquad \text{(IX.4)}$$

con A = Constante.
Como estamos resolviendo un problema físico, cada una de las cantidades que aparecen en la ecuación debe tener un significado concreto. En el caso de la constante A, representa la amplitud de la oscilación.
Por ejemplo, analizando en detalle la solución [IX.4] concluimos que corresponde a un resorte cuya elongación en $t = 0$ es $x(t = 0) = A$.



La velocidad en ese mismo instante es nula, como se puede verificar al derivar una vez esta solución. También se puede llegar a esta conclusión al inspeccionar la última Figura, donde se representa un movimiento circular uniforme. Allí se advierte que la velocidad es tangente a la circunferencia y en ese punto –donde $t = 0$– no tiene componente en el eje x. De hecho es perpendicular a él.

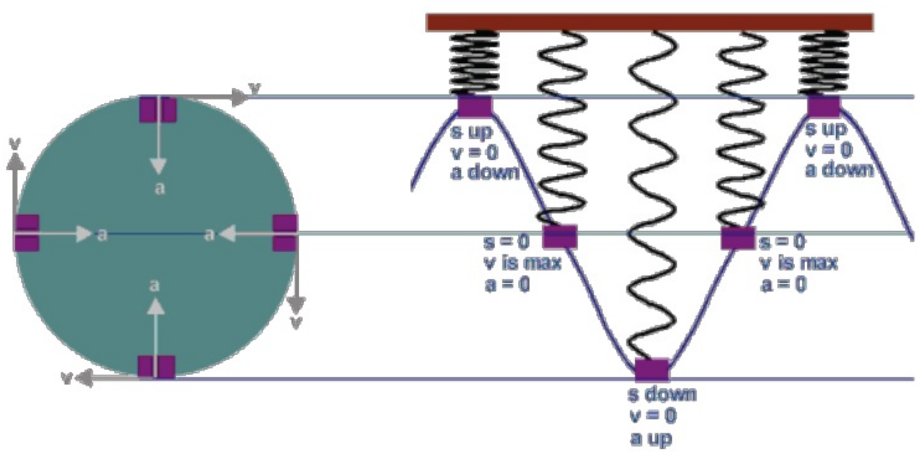


Figura IX.1: *El punto de equilibrio del resorte coincide con el centro de la circunferencia. La amplitud* **A** *coincide -en este caso-, con los valores extremos de la circunferencia.*

Si estiramos un resorte de forma que $x = A$ y en un instante arbitrario, que designamos como $t = 0$, se deja ir, el resorte oscila en torno al punto de equilibrio con una frecuencia $\omega = \sqrt{k/m}$. Gráficamente se puede ver en la Figura, como la proyección del punto P sobre el eje x , oscila entre $-A$ y $+A$, a medida que el punto P da vueltas a la circunferencia. (El ángulo que describe el vector que apunta hacia P es lo que se denomina la *fase* de dicho movimiento).

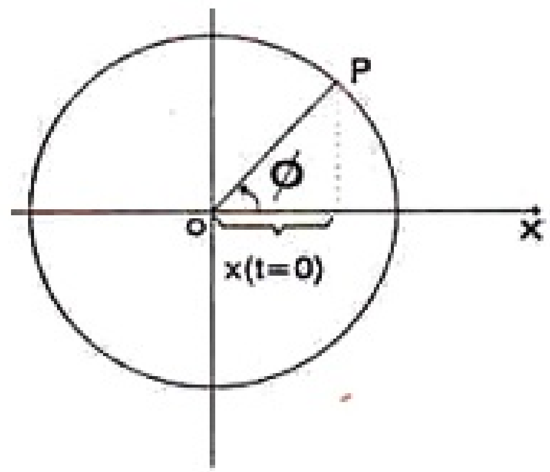
Sin embargo, ésta no es la situación más general. Puede ocurrir que al momento de empezar el movimiento, el punto P que representa a la posición inicial de la partícula en la Figura, no se ubique en el eje x sino que forme un ángulo ϕ con la horizontal, tal como se aprecia en la Figura.

En este caso debemos sumar el ángulo ϕ a $(\omega\, t)$ y la solución es:

$$x(t) = A\ \cos(\omega\ t + \phi), \qquad \text{(IX.5)}$$

con $\omega^2 \equiv \dfrac{k}{m}$.

Esta última ecuación es la solución más general de la ecuación [IX.1]. Todos los posibles casos que pueden ocurrir con un oscilador armónico se acomodan a esta expresión.



IX.3. CONDICIONES INICIALES

El problema del movimiento de una masa m atada a un resorte de constante k, masa nula y sin fricción, ya está resuelto. Su solución es la ecuación [IX.5]. Para usar esta expresión en cada uno de los casos particulares planteados en un ejercicio, debemos determinar los valores de las constantes A y ϕ, que aparecen en la ecuación [IX.5]. Estas dos constantes contienen la información acerca de la velocidad y la deformación del oscilador en el instante inicial.

La constante ω distingue un oscilador armónico de otro.

Para determinar A y ϕ debemos conocer las condiciones bajo las cuales se originó la oscilación, éstas se denominan las *condiciones iniciales* del problema.

Un problema está bien planteado si a partir de los datos que nos entregan se puede determinar, sin ambigüedades, A y ϕ.

Ejemplo

En el instante inicial, $t = 0$, el extremo de un resorte se encuentra en su punto de equilibrio $(x = 0)$, con una velocidad $(-V_0)$. Encontrar el valor de A y ϕ en este caso.

Estos son los datos típicos que se proporcionan para resolver un problema de oscilaciones.

En la solución general [IX.5], se debe ajustar los valores de A y ϕ para satisfacer estas condiciones iniciales:

$$x(t=0) = 0 = A\,\cos\phi \;\Rightarrow\; \phi = \frac{\pi}{2},$$

($A \neq 0$, puesto que si $A = 0$, *no* existe oscilación). Reemplazando en la ecuación general [IX.5], tenemos:

$$x(t) = A\,\cos(\omega\,t + \pi/2) = -A\,\text{ sen}(\omega\,t).$$

La velocidad se encuentra sumándole $(\pi/2)$ al ángulo correspondiente al vector posición y multiplicando la amplitud por ω. (Recordemos que, en todo instante, $\vec{V}$ es perpendicular al vector posición).

$$V(t) = -A\,\omega\;sen[\omega\,t + \pi/2] = -A\,\omega\,\cos[\omega\,t].$$

Hemos usado las propiedades del seno y del coseno. (Ver Apéndice Matemático para mayores detalles).

Aplicamos ahora la condición inicial a la expresión de la velocidad. Se obtiene:

$$t = 0, \qquad V(t=0) = -V_0 = -A\,\omega \;\Rightarrow\; A = \frac{V_0}{\omega}.$$

Así , en este caso, la ecuación de movimiento toma la siguiente forma:

$$x(t) = \left(\frac{V_0}{\omega}\right)\,\cos(\omega\,t + \pi/2). \tag{IX.6}$$

Las dimensiones de V_0/ω son,

$$\left[\frac{V_0}{\omega}\right] = \frac{\left[\frac{L}{T}\right]}{\left[\frac{1}{T}\right]} = L. \tag{IX.7}$$

Nota

Conviene destacar que el *movimiento armónico simple*, este es el nombre que recibe el movimiento que hemos estudiado, es fundamental en el funcionamiento de los relojes mecánicos porque ω, la velocidad angular, está determinada por la constante k del resorte y la masa m. Conocidos estos valores, la frecuencia queda *fija*, sin depender de la forma cómo se inicia esta oscilación.

Ya sabemos resolver el problema de la oscilación de un sistema masa resorte en ausencia de fricción. El procedimiento consiste en determinar las constantes A y ϕ, a partir de las *condiciones iniciales* del problema. Como es una operación que se repite una y otra vez, conviene ilustrarla con distintos casos.

Ejemplo

Aplicamos una fuerza sobre un resorte de modo que se alarge X_0 metros, medidos a partir de su largo natural. Repentinamente lo soltamos. ¿Qué valor toman las constantes A y ϕ en este caso?

Las condiciones iniciales son:

$$\text{En} \quad t=0: \quad \begin{array}{ll} x = X_0 & = A\, cos\ \phi, \\ v = 0 & = -A\, \omega\ sen\ \phi. \end{array}$$

Con estas ecuaciones A y ϕ quedan determinadas y podemos conocer la posición y la velocidad en cualquier instante posterior.

Si le hubiésemos dado un impulso (un golpe corto) justo cuando estaba en reposo, entonces las condiciones iniciales serían:

$$\text{En} \quad t=0: \quad \begin{array}{ll} x(t=0) = 0 & = A\, cos\ \phi \ \Rightarrow \phi = \pi/2, \\ v(t=0) = v_0 & = -A\, \omega sen\ \phi \ \Rightarrow \ A = -v_0/\omega. \end{array}$$

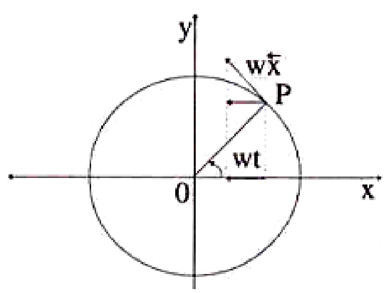


Figura IX.2: La velocidad se puede obtener geométricamente de la Figura. Es tangente a la circunferencia y su magnitud está dada por el producto del radio por la velocidad angular. La velocidad de la masa unida al extremo del resorte se obtiene proyectando $w\,r$ sobre el eje x.

Un impulso corresponde físicamente a un cambio repentino en el valor de la velocidad, sin afectar –en ese instante– a la posición, la cual permanece inalterada.

Sabemos que $v(t)$ es la derivada de $x(t)$ con respecto al tiempo. Pero también se puede pensar (de acuerdo a la Figura [IX.2]), en una rotación en $\pi/2$ radianes con respecto al vector $\vec{x}(t)$ y además multiplicar el largo (módulo) del vector $\vec{x}(t)$ por ω.

Esta operación nos permite obtener gráficamente la velocidad en cualquier instante.

Ejercicio

Se tiene una masa unida a un resorte de constante k, que oscila sobre una mesa sin roce. Demuestre que si la posición en el instante $t = 0$ es x_0, y su velocidad es v_o en el mismo instante, entonces las constantes A y ϕ, toman los siguientes valores:

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}, \quad \tan\,\phi = -\frac{v_o}{\omega\; x_o}. \;\Box \qquad \text{(IX.8)}$$

Ejemplo.

Una partícula que realiza un movimiento oscilatorio armónico pasa consecutivamente a través de dos puntos separados por una distancia a, con la *misma velocidad* (en magnitud, dirección y sentido). El tiempo que tarda en recorrer el trayecto entre estos dos puntos es τ segundos.

Sabemos, además, que la partícula demora $2\,\tau$ segundos en pasar por el segundo punto, ahora con la misma velocidad (en dirección y magnitud), pero en *sentido opuesto*.

A partir de estos datos encuentre el período T y la amplitud A de este movimiento.

En este ejemplo, las condiciones iniciales para determinar las constantes A y ϕ no están dadas en forma simple y directa, como es lo usual en otros problemas. En otras palabras, conociendo a y τ, debemos determinar las constantes de movimiento A, ϕ, y la razón k/m del oscilador.

Notemos que la magnitud de la velocidad del oscilador en los puntos citados en el enunciado, *no* es conocida, sólo a y τ son datos. Otro punto, es la presentación de los datos iniciales: la distancia a y los tiempos aparecen en forma relativa. Esto nos permite definir la posición inicial del oscilador, el instante en que el tiempo comienza a contar, $t = 0$, como nos convenga más.

La posición y la velocidad están determinadas por:

$$x(t) = A\,\cos\left(\omega\,t + \phi\right) \qquad \text{y} \qquad v(t) = -A\,\omega\,\text{sen}(\omega\,t + \phi).$$

Usando la identidad trigonométrica: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, podemos obtener una relación entre $x(t)$ y $v(t)$, válida para todo t:

$$x^2(t) + \frac{v^2(t)}{\omega^2} = A^2 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \pm\sqrt{A^2 + \frac{v^2(t)}{\omega^2}}.$$

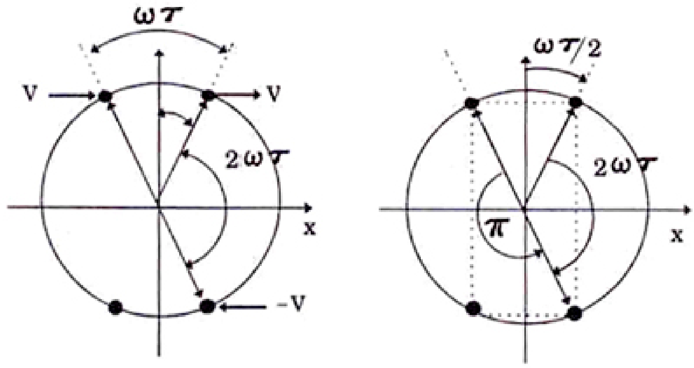


Figura IX.3: *El gráfico del movimiento circunferencial uniforme señala las condiciones que se han impuesto en la cinemática del problema (izquierda). La simetría del movimiento permite determinar que el ángulo descrito entre los puntos con velocidad v y $-v$, es $\omega\, 3\,\tau = \pi$.*

De esta última relación se deduce que si *la velocidad es la misma en los puntos P y Q* (Figura [IX.3]) entonces $x(t)$ –la proyección sobre el eje horizontal de estos dos puntos–, debe ser simétrica con respecto al origen.

De este resultado se desprende que debemos elegir ϕ de manera que el tiempo empiece a contar cuando el oscilador pasa por el origen: de esta forma las ecuaciones se simplifican. Tomando $\phi = \pi/2$ las expresiones para $x(t)$ y $v(t)$ se transforman en:

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}\,\omega\, t \qquad \text{y} \qquad v(t) = A\,\omega\,\cos\,\omega\, t.$$

Podemos comprobar directamente que para $t = 0$, $x(0) = 0$ y la velocidad es positiva $v(0) = A\,\omega$.

Según el enunciado, la distancia entre el punto P y Q es:

$$x(\tau/2) - x(-\tau/2) \equiv a = 2\,A\,\mathrm{sen}\,\omega\,\tau/2.$$

Donde hemos utilizado la igualdad $\mathrm{sen}(-\alpha) = -\mathrm{sen}\alpha$. Tenemos una ecuación y dos incógnitas: A y ω.

La siguiente ecuación proviene del dato acerca de la velocidad de retorno por Q. De la Figura [IX.3] se deduce que:

$$\omega\,\tau/2 + \omega\,\tau/2 + \omega\, 2\,\tau = \omega\, 3\,\tau = \pi.$$

Con esta ecuación tenemos el problema resuelto: $\omega = \pi/[3\,\tau]$ y $A = a/[2\,\mathrm{sen}(\pi/6)] = a$. La constante ϕ la fijamos al comienzo de la resolución.

$$x(t) = a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3\,\tau}\,t\right). \;\Box$$

Ejercicio

En el ejemplo anterior y usando sólo igualdades trigonométricas, demuestre que a partir de la condición:

$$v(\tau/2) = -v(\tau/2 + 2\,\tau) \quad \Longrightarrow \quad A\,\cos\,\omega\,\tau/2 = -A\,\cos[\omega\,(\tau/2 + 2\,\tau)],$$

se obtiene: $\omega\,\tau = \pi/3$, sin hacer uso de las propiedades geométricas exhibidas en la Figura [IX.3]. □

IX.4. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La solución del oscilador armónico permite obtener la conservación de la energía directamente.

$$x(t) \,=\, A\,\cos(\omega\,t\,+\,\phi), \quad \text{y} \quad v(t) \,=\, -\,\omega\,A\,\text{sen}\omega\,t\,+\,\phi) \quad \text{con} \quad \omega^2 \,=\, k/m,$$

donde **A** es la amplitud de la oscilación: la máxima distancia que se aleja la partícula de su punto de equilibrio.

Recordando que $\cos^2\,\alpha\,+\,\text{sen}^2\,\alpha\,=\,1$ obtenemos

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2\,A^2} \,=\, 1,.$$

Si multiplicamos esta ecuación por el factor $k\,A^2/2$ y reemplazamos ω^2 por k/m, obtenemos la forma canónica de la conservación de la energía. Esto es

$$\frac{1}{2}\,k\,x^2\,+\,\frac{1}{2}\,m\,v^2\,=\,\frac{1}{2}\,k\,A^2\,\equiv\,E. \tag{IX.9}$$

La conservación de la energía se escribe como

$$\mathbf{T}\,+\,\mathbf{V}\,=\,\mathbf{E}, \quad \text{con} \quad \mathbf{T} \equiv \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{V}(\mathbf{t})^{\mathbf{2}}, \quad \text{y} \quad \mathbf{V}(\mathbf{x})\,\equiv\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x}^{\mathbf{2}}, \tag{IX.10}$$

donde **T** es la Energía Cinética y **V**(x), la Energía Potencial. par Estas definiciones permiten evaluar los límites del movimiento del oscilador armónico sin resolverlo.

La ecuación IX.9 también se puede graficar en un sistema de referencia cuyos ejes sean la posición **x** y la velocidad **v**. El nombre técnico de este gráfico es **espacio de fase**. Se puede mostrar que esta curva es una elipse. Se puede escribir como $x^2/a^2 + v^2/b^2 = 1$. Para ello debo dividir la ecuación IX.9 por $(k\,A^2)/2$. Con esto podemos definir los números **a** y **b**. Veamos

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\left[\dfrac{k\,A^2}{m}\right]} = 1. \tag{IX.11}$$

Entonces $a \equiv A$ y $b \equiv \sqrt{k/m}\,A$.

El siguiente paso es un cambio de escala en cada uno de los ejes. Definimos $\bar{x} = A\,x$ y $\bar{v} = \sqrt{k/m}\,A\,v$. De esta forma tenemos la siguiente ecuación

$$(\bar{x})^2 + (\bar{v})^2 = 1. \tag{IX.12}$$

La posición $\bar{x}(t)$ depende del tiempo, como es obvio al observar la oscilación generada por un resorte. Lo mismo sucede con la velocidad $\bar{V}(t)$, depende del tiempo.

IX.5. OSCILACIONES PEQUEÑAS

IX.5.1. Péndulo simple

El caso más representativo de las oscilaciones pequeñas es el de un péndulo simple. Este consiste de una masa m colgando de un hilo o de una barra de masa despreciable y que realiza pequeñas oscilaciones en un campo gravitatorio.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen en este caso (oscilaciones pequeñas), son similares a las de una masa atada a un resorte.

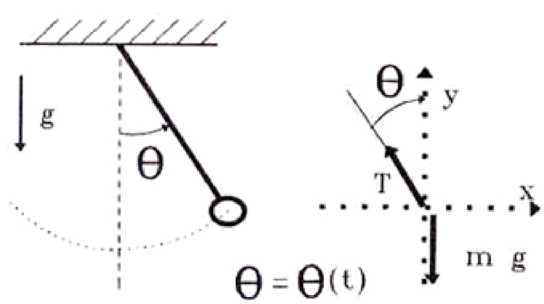


Figura IX.4: Una masa m suspendida de una cuerda de largo ℓ, oscila en un campo gravitatorio. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de la masa m. El ángulo θ debe ser del orden de 5^o para usar la aproximación $sen\,\theta \approx \theta$.

La masa m está restringida a viajar a lo largo de la circunferencia, de manera que su desplazamiento sigue la tangente a la circunferencia en todo instante. Por lo tanto, el elemento de arco recorrido en un intervalo de tiempo por la partícula es:

$$\begin{aligned}
\Delta s \quad & \equiv \ell\,\Delta\theta : \quad \text{elemento de arco recorrido} \\
& \qquad\qquad \text{en el intervalo } \Delta t, \\
\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad & = \ell\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} : \quad \text{velocidad tangencial de la partícula,} \\
\frac{\Delta\left[\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right]}{\Delta t} \quad & = \ell\,\frac{d^2\theta}{d t^2} : \quad \text{aceleración tangencial de la masa } m.
\end{aligned}$$

Donde ℓ es el radio de la circunferencia.

Del diagrama de cuerpo libre (ver Figura [IX.4]) se desprende que:

$$T\,\cos\theta - m\,g = m\,a_y, \quad \text{y} \quad -T\,\text{sen}\,\theta = m\,a_x.$$

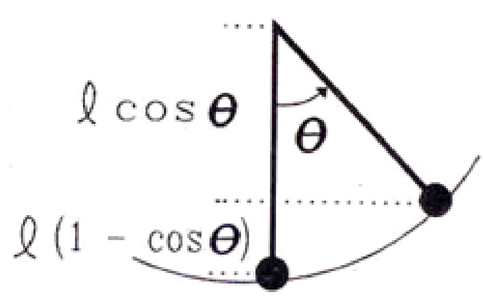
La ecuación de la izquierda es la segunda ecuación de Newton proyectada en la dirección vertical. T proviene de la tensión que ejerce la cuerda sobre la masa m.

La ecuación de la derecha es la proyección sobre el eje horizontal.

El siguiente paso consiste en simplificar las ecuaciones anteriores introduciendo la *aproximación* $\theta << 1$, con θ medido en radianes.

De acuerdo al desarrollo en serie de $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$ tenemos: $\cos\theta \;\approx\; (1-\theta^2/2, ...)$ y sen$\theta \;\approx\; \theta$.

Si despreciamos los términos que contienen θ^2, esta aproximación es equivalente a que el péndulo se mueva horizontalmente y despreciemos totalmente el movimiento vertical. De hecho, el cambio de altura de la masa m, desde la posición de equilibrio hasta el punto de máxima elongación es $\ell\,(1-\cos\theta)$, lo cual dentro del orden de aproximación adoptado aquí es: $\approx \ell\,\theta^2$, y por lo tanto podemos suponer que el péndulo *no se levanta.*



De aquí se desprende que no hay desplazamiento y, en consecuencia, no hay aceleración en dicha dirección: $a_y \approx 0$ y $a_x \;\approx\; a_{\text{tangencial}}$.

Con estas aproximaciones, la segunda ecuación de Newton queda:

$$T - m\,g = 0, \qquad \text{y} \qquad T\,\text{sen}\,\theta \approx T\,\theta = m\,a_{\text{tangencial}},$$

reemplazando la tensión en la ecuación de la derecha y la expresión encontrada anteriormente para la aceleración tangencial en a_x, se tiene:

$$m\,\ell\,\frac{d^2\,\theta}{d\,t^2} = -m\,g\,\mathrm{sen}\,\theta \approx -m\,g\,\theta, \qquad \text{para valores pequeños del ángulo } \theta. \tag{IX.13}$$

Esta última ecuación es del mismo tipo que la ecuación de una masa que oscila unida a un resorte [IX.5]. En aquel caso la segunda derivada de la posición, la aceleración, era proporcional a la posición, aquí la segunda derivada del ángulo θ es proporcional al ángulo θ. Matemáticamente son idénticas, sólo necesitamos identificar ω como:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \;\Rightarrow\; T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

En esta ecuación, T es el período del péndulo. No es la tensión de la cuerda.

La ecuación de movimiento queda descrita por la siguiente fórmula:

$$\theta(t) = \theta_o\,\cos\left(\omega\,t + \phi\right). \tag{IX.14}$$

donde θ_0 es el máximo valor que puede tomar el ángulo θ en su oscilación y ϕ, al igual que en el caso anterior, está relacionado con las condiciones iniciales del péndulo. Esta ecuación es general, abarca todos los casos posibles de un péndulo con oscilaciones pequeñas.

Ejemplo.

A continuación mencionamos tres ejemplos en cuya resolución podemos usar como *modelo aproximado*, un sistema masa–resorte.

• El cable de acero que sostiene un peso en una grúa. Este cable se **estira** debido al peso y podemos modelarlo como un resorte ideal. Igual cosa sucede con el cable de acero que sostiene un ascensor que aparece en la otra Figura. Al comenzar a elevarse recibe un tirón desde el extremo opuesto al ascensor y el cable comienza a oscilar. Es claro que las oscilaciones son pequeñas y se amortiguan debido al roce que existe en todas sus componentes.

• De la misma forma que un resorte oscila con una frecuencia bien determinada, el sistema de tres partículas de la Figura tiene tres formas naturales de oscilación, cada una asociada con una frecuencia ω diferente.

Un edificio puede ser modelado por este conjunto de masas unidas a una barra común. Las masas, que representan la loza del edificio, experimentan una oscilación transversal como se indica en la Figura.

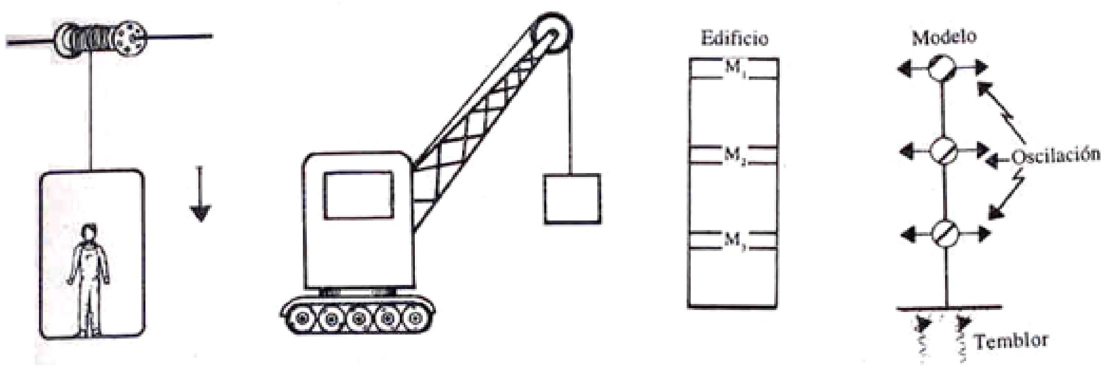


Figura IX.5: Algunas estructuras que, al ser modeladas a través de un oscilador armónico, proporcionan información relevante acerca del sistema.

Existen modelos mucho más sofisticados para representar un edificio, pero éste permite estimar, en orden de magnitud, sus frecuencias propias de oscilación.

Es importante conocer los valores de estas frecuencias puesto que el edificio debe diseñarse de modo que los valores de su frecuencia de oscilación (las frecuencias naturales mencionadas anteriormente), sean diferentes de las frecuencias características observadas en los terremotos ocurridos en la región, con el fin de evitar que comience a oscilar en simpatía con las oscilaciones de la Tierra, aumentando de esta forma su amplitud y terminando por destruirlo.

• Si debemos remolcar un auto averiado, al comienzo se debe actuar lentamente, en caso contrario, si hay movimientos bruscos se corre el peligro de alcanzar la tensión límite de la cuerda que los une.

Esto se debe a que al aplicar una determinada fuerza en forma repentina, la cuerda se estira dos veces más que al realizar la misma operación *en forma lenta*. De esta última forma se evita sobrepasar el límite elástico de la cuerda.

Este resultado lo usan quienes, después de amarrar un paquete, cortan la cuerda dándole un tirón violento. Desde nuestro punto de vista, lo que hacen es aplicar toda su fuerza repentinamente y, además suman toda la energía cinética acumulada con la velocidad de la mano, para gastarla en trabajo y estirar suficientemente el hilo hasta cortarlo.

En el último párrafo usamos los términos: Energía Cinética y Trabajo. En la siguiente sección explicamos el significado físico de estos dos conceptos.

IX.6. MOVIMIENTO ARMONICO AMORTIGUADO

Muchos fenómenos naturales presentan aproximadamente las características de un movimiento armónico simple. La diferencia entre las oscilaciones armónicas que ocurren en la naturaleza y aquéllas que se observan en un oscilador ideal radican en la conservación de la energía. La energía de un oscilador real disminuye en forma perceptible al cabo de algunas oscilaciones. Este efecto tiene su origen en el trabajo que realizan las fuerzas disipativas presentes en el sistema. La disminución de energía, en estos casos, se materializa en el decrecimiento gradual que experimenta la amplitud de la oscilación. Esto es lo que se denomina *Amortiguamiento* de la oscilación.

Un modelo matemático simple, que sin embargo introduce los ingredientes esenciales del proceso de amortiguamiento, incluye la disipación de energía a través de una fuerza proporcional a la velocidad instantánea del sistema pero que se opone al movimiento.

Para ilustrar este modelo, consideremos el movimiento de una masa unida a un resorte de constante de rigidez k sometida a una fuerza de roce del tipo $f = -b\,v(t)$. En esta expresión b es una constante positiva y $v(t)$ es la velocidad instantánea de la partícula. De acuerdo a la segunda ley de Newton, podemos escribir:

$$F = m\,\ddot{x} = -b\,\dot{x} - k\,x$$

donde,

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \quad ; \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$$

El problema ahora consiste en encontrar la función $x(t)$ que satisface la ecuación de movimiento:

$$m\,\ddot{x} + b\,\dot{x} + k\,x = 0 \qquad \text{(IX.15)}$$

En este libro nos limitaremos a presentar la solución y a discutir brevemente las tres familias de soluciones que caracterizan a este modelo.

Al cambiar la dependencia de las fuerzas disipativas en la velocidad, por ejemplo, hacerla proporcional al *cuadrado de la velocidad*, se obtienen otras soluciones, más complejas que las tratadas aquí.

La solución de la ecuación [IX.15] es:

$$x(t) \;=\; A\,\exp\left(-b\,t/2\,m\right)\,\cos(\omega_f\,t + \phi) \qquad \text{(IX.16)}$$

donde ω_f es igual a: $\omega_f \;=\; \dfrac{\sqrt{4\,m\,k - b^2}}{2\,m}.$

Dependiendo del valor de ${\omega_f}^2$ se pueden distinguir tres familias de soluciones, cuya representación gráfica se incluye en la Figura [IX.6]. Estas son:

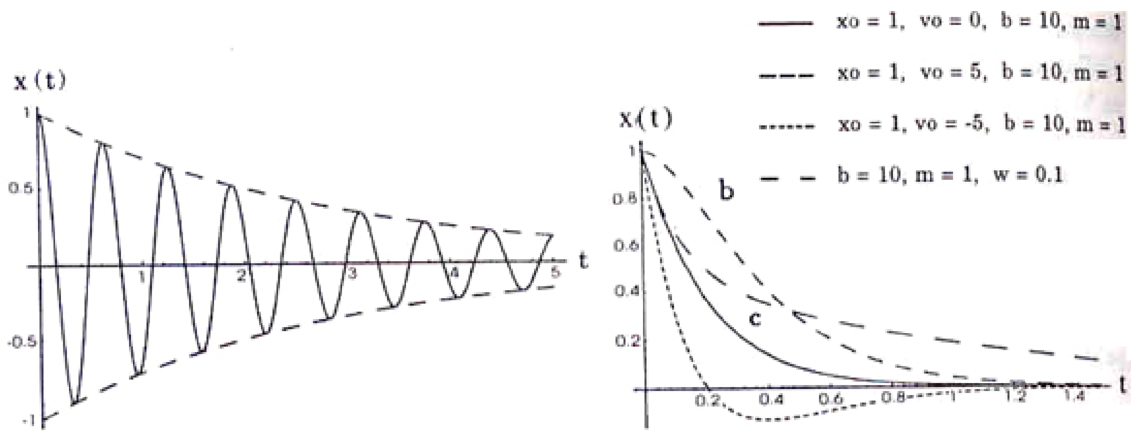


Figura IX.6: Se incluye una clasificación de los movimientos amortiguados en tres tipos: (a) Amortiguamiento normal, (b) Caso crítico y (c) Sobreamortiguamiento

a) Movimiento Amortiguado: ${\omega_f}^2 > 0$

   Gráfico (a) de la Figura [IX.6 a)].

b) Movimiento Sobreamortiguado: ${\omega_f}^2 < 0$

   La función $\cos(\omega_f\, t + \phi)$ se transforma en una función hiperbólica, $\cosh(\omega_f\, t + \phi)$. Este caso representa un movimiento *sobreamortiguado* Figura [IX.6 b)]. El sistema no oscila y la amplitud decrece monotónicamente en el tiempo.

c) Caso Crítico: $\omega_f = 0$

   En el caso (c) la solución de la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = C_1\,(1 + C_2 t)\,exp(-bt/2m)$$

   El gráfico de esta función se muestra en la Figura [IX.6 c)]. El sistema *no oscila* y disipa su energía más rápidamente que en los casos anteriores.

IX.7. MOVIMIENTO ARMONICO FORZADO

Existen muchas situaciones donde un oscilador armónico oscila con una frecuencia impuesta por un mecanismo externo, por ejemplo: la membrana de un micrófono es *forzada* a oscilar con la frecuencia de la onda de sonido que incide sobre ella. Esta frecuencia externa, en general, no coincide con la frecuencia de oscilación propia.

Las características del movimiento armónico forzado las podemos estudiar en el sistema más simple: un resorte unido a una masa sobre la cual se aplica una fuerza externa que varía periódicamente con frecuencia angular ω ($f = f_0 \cos\, \omega\, t$). Simultáneamente supondremos que actúa una fuerza de roce de magnitud proporcional a la velocidad instantánea de la masa y que apunta en dirección contraria a ésta.

La ecuación de movimiento es similar a la ecuación del movimiento armónico simple, excepto por la aparición de un término adicional debido a la fuerza armónica externa:

$$m\,\ddot{x} + b\,\dot{x} + k\,x = f_0\,\cos(\omega\,t) \tag{IX.17}$$

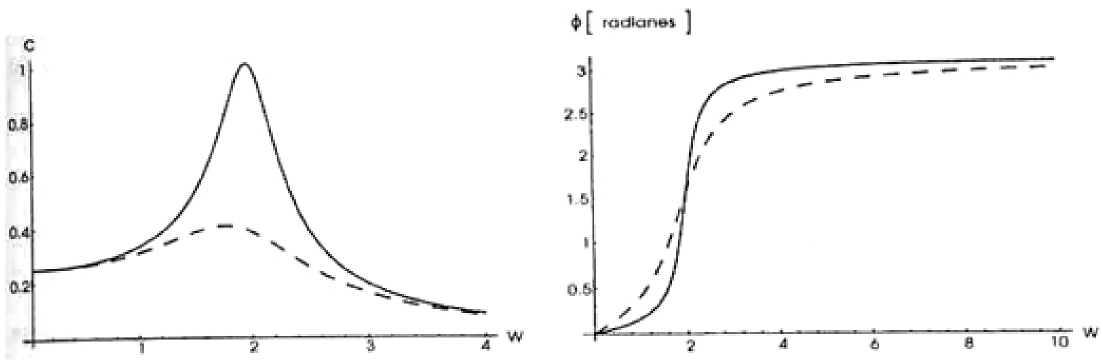


Figura IX.7: Amplitud y fase de la oscilación forzada en función de la frecuencia de la fuerza aplicada. La línea punteada muestra el efecto de aumentar el valor de la constante de amortiguamiento b, manteniendo fijos el resto de los parámetros.

La evolución de este sistema, desde el instante en que se conecta la fuerza externa se compone de una superposición de dos movimientos armónicos de distinta frecuencia. Supongamos que inicialmente el sistema estaba en reposo y que en $t = 0$ comienza a actuar la fuerza armónica. El sistema tarda un cierto tiempo en adecuarse a esta situación –denominada etapa transiente–, cuyo largo depende de los parámetros propios del sistema ($m,\ k,\ y\, b$). Pasado ese tiempo, que en general es muy corto comparado con el período de oscilación de la fuerza externa (siempre que el término de fricción sea pequeño), el sistema evoluciona de acuerdo a la expresión:

$$x(t) = C\ \cos(\omega\,t - \phi), \quad \text{donde:}$$

$$C = \frac{f_0}{\left[m^2\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\,b^2\right]^{1/2}},$$

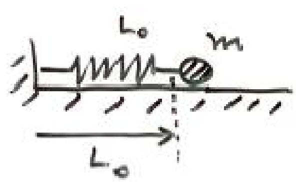
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{y,} \qquad \tan\,\phi = \frac{b\,\omega}{m\ \left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)}$$

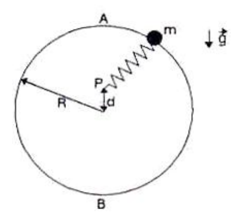
La Figura [IX.7] muestra como cambia la amplitud de la oscilación forzada, C, en función de la frecuencia de la fuerza armónica aplicada: $\nu\,(\omega \equiv 2\pi\nu)$. Allí se aprecia que la amplitud crece rápidamente en la vecindad de $\omega = \omega_0$, alcanza el valor máximo para esa frecuencia, y luego decrece rápidamente para valores mayores que ω_0. Cuando $\omega = \omega_0$ decimos que el sistema está en *resonancia*. Note que, de no existir el término disipativo (i.e., si b fuera cero), la amplitud de la oscilación forzada tendería a infinito en la condición de resonancia.

La Figura [IX.7] muestra, además, cómo varía la constante de fase ϕ en función de la frecuencia angular ω.

IX.8. EJERCICIOS

1.– Calcule cuánto tarda la masa **m** en completar un ciclo, si permanece unida firmemente a un resorte que tiene una rigidez k_1 para la compresión y una rigidez $k_2 < k_1$ para la elongación.

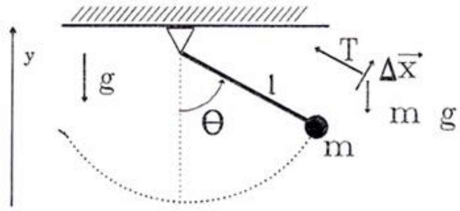


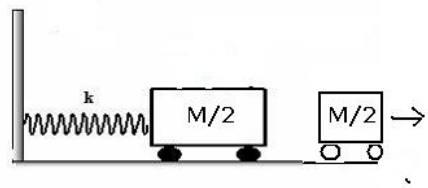


2.– Una partícula de masa m que se desliza sin roce sobre un anillo de radio R, se libera en el punto A. El anillo está unido a un resorte de constante k, cuyo otro extremo está fijo al punto P, a una distancia d del centro del anillo. Para simplificar los cálculos, suponga que el largo natural del resorte es despreciable comparado con los otros largos. Si la partícula parte desde A, con velocidad inicial nula, y al pasar por el punto B no ejerce ninguna fuerza sobre el aro. Calcule el valor de la distancia d. ¿Puede alcanzar d un valor nulo o negativo? Explique.

3.– a.- Encuentre las ecuaciones de movimiento de un péndulo matemático. Suponga que se desvía de la vertical un ángulo θ arbitrario, pero menor de 90^o; que la masa **m** está unida al extremo de un hilo de masa despreciable, inextensible y de largo **L**.

b.- Resuelva las ecuaciones anteriores para el caso en que $\theta << 1$ (medido en radianes). Compare este resultado con el obtenido para el oscilador armónico.





4.– Analice el caso del oscilador armónico horizontal que se describe a continuación. Se tiene una masa **M** unida a un resorte de constante de rigidez **k** y largo natural $\mathbf{L}_o$. Inicialmente el resorte se comprime una distancia Δ a partir del largo natural y se suelta. Al llegar al punto de equilibrio la mitad de la masa **M** se desprende suavemente (sin perturabar o ejercer una fuerza sobre la masa que queda unida al resorte) y continúa desplazándose con su la misma velocidad que tenía al momento del despegue sobre el piso sin roce. El resorte llega a su máxima elongación, vuelve a contraerse, se expande y nuevamente al llegar al punto de equilibrio, libera, de igual modo, la mitad de la **masa restante** (por ejemplo, $\mathrm{M}/4$, en el segundo desprendimiento), que sigue propagándose con velocidad constante en el piso sin roce. Y así sucesivamente.
Analice este movimiento y describa su comportamiento. Ud. debe señalar los aspectos físicamente relevantes de este problema.

5.– En el sistema de la Figura, la masa m_1 está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural L_o y una cuerda ideal, que desliza sin roce por una polea. Entre el suelo y el bloque de masa m_1 existe un coeficiente de roce dinámico μ.

Si en t=0 el resorte tiene su largo natural y la masa m_2 tiene una velocidad V_o, determine la velocidad de la masa m_2 en el instante en que ha descendido una altura h con respecto a su posición inicial.

6.– Derive las ecuaciones de movimiento y encuentre los períodos de oscilación para los dos sistemas que aparecen en la Figura. m se mueve en la línea recta, en un plano horizontal sin roce y bajo la influencia de los dos resortes de rigidez k_1 y k_2 respectivamente.

7.– Dos masas distintas $m_1 = m,\ m_2 = 2m$, descansan sobre una mesa sin roce. Si un resorte de constante k es comprimido una distancia d, con m_2 pegado a la pared y entonces el sistema es abandonado desde el reposo, encontrar qué distancia viaja m_1 antes que m_2 comience a moverse.

8.– Considere un bloque de masa M colocado sobre un resorte vertical (fijo a él) de

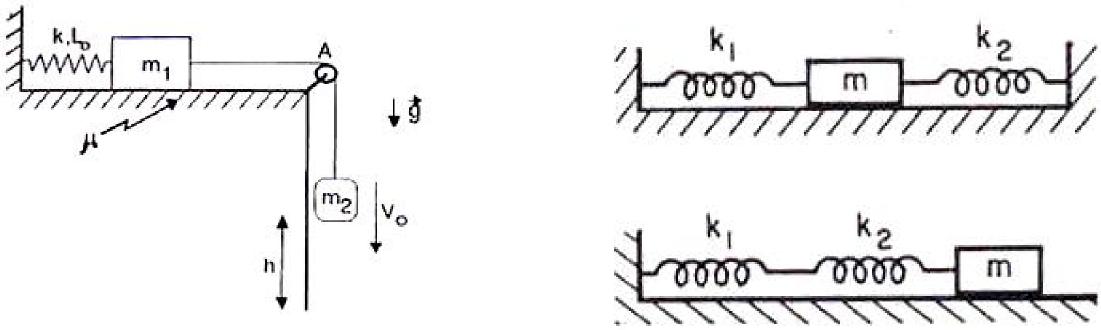


Figura IX.8: **Problema # 11** **Problema # 12**

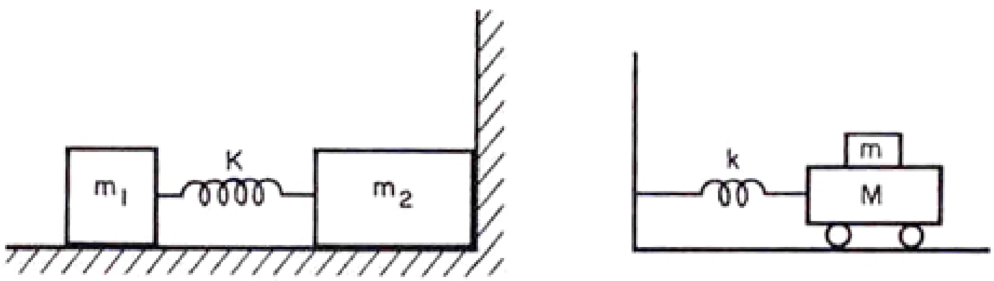


Figura IX.9: **Problema # 14** **Problema # 15**

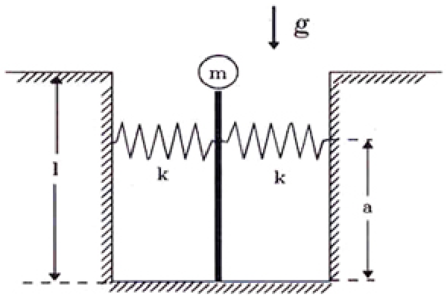
constante k y largo natural L_o. Sobre el bloque se coloca una partícula de masa m. Suponga que inicialmente se comprime el resorte en una distancia d con respecto a la posición de equilibrio del sistema. Calcule la altura máxima (sobre el suelo) que alcanza la masa m una vez que se libera el resorte.

9.– Dado el oscilador mecánico mostrado en la Figura. Encontrar la amplitud máxima de oscilación para que la masa superior no resbale sobre M. El coeficiente de fricción estática entre las dos masas es μ.

10.– En el sistema de la Figura, la masa m realiza *pequeñas oscilaciones* alrededor de la posición de equilibrio –la línea vertical–, con una velocidad angular ω.

a) Encuentre el valor de la frecuencia de oscilación ω, sin considerar la aceleración de gravedad.

b) Considere ahora el efecto de la aceleración de gravedad g, debido a las pequeñas variaciones que se producen en la altura de la masa m durante la oscilación.


g
m
k
k
l
a

Bibliografía

[1] **Matter and Interactions I, Modern mechanics**, R. W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley and Sons,2007.

[2] **Newton Rules Biology**, C. J. Pennycuik, Oxford University Press, Oxford,1995.

[3] Retrato de Hooke: www.newscientist.com/blogs/shortsharpscience/2012/01/hooke-springs-to-life-in-new-p.html

[4] **Física Universitaria**, Harris Benson, Compañá editora Continental, S. A DE C., México, Primera reimpresión, 1996.