

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 17 de abril de 2016

Capítulo VI

DINAMICA

VI.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos previos hemos descrito el movimiento de una partícula con la aceleración como dato. Dos casos hemos analizado: aceleración gravitacional constante y la aceleración centrípeta, asociada al movimiento circular uniforme. Dada la aceleración podemos describir la trayectoria de un cuerpo.

En este capítulo -siguiendo la propuesta de Newton-, determinaremos la aceleración de un objeto a partir de sus interacciones (por definir) con su vecindad. Estas interacciones son por ejemplo, el contacto entre dos cuerpos, la acción de una cuerda sobre un objeto, el roce entre dos superficies en movimiento relativo... las modelaremos mediante un vector, que llamaremos fuerza.

Este paso fue la culminación de los trabajos de Galileo, Kepler y Newton. Ellos establecieron que ni la posición $\vec{x}$, ni la velocidad $\vec{v}$ tenían una causa inmediata, el factor clave resultó ser la aceleración.

Este resultado fue difícil de aceptar porque gran parte de la información llega a través de la observación, a simple vista. El ojo es sensitivo a la velocidad pero a menudo ignora la aceleración, en consecuencia es difícil de aceptar que la velocidad no sea parte central de las leyes de movimiento [1].

Nuestro sentidos como el tacto y el equilibrio nos proporcionan la ayuda esencial que necesitamos para percibir la aceleración. Si el metro frena, debemos afirmarnos de una manilla para que (por contacto) aparezca una fuerza que nos mantenga fijos, en reposo relativo, con respecto al metro.

La aparición de las tres leyes de movimiento y la ley de gravitación universal, publicadas por

Isaac Newton, constituyó la culminación de una serie de logros alcanzados durante los siglos XVI y XVII. Entre ellos se destacan: las leyes de Kepler en el campo de la astronomía, las ideas de Galileo y su descripción del movimiento de los cuerpos, el progreso logrado por Descartes en geometría analítica, Huygens y su libro acerca de la luz, el perfeccionamiento del reloj de péndulo... Estos y muchos otros, hicieron del siglo XVI y XVII un período brillante en el desarrollo de la humanidad. Todo sucedió en el lapso de tiempo comprendido entre dos generaciones: la de Galileo y Newton. Este último nació el mismo año de la muerte de Galileo, en 1642.

VI.2. LEYES DE NEWTON, LA SINTESIS FINAL

La revolución que produjo la publicación de su libro “Principia” (1687) que contenía sus leyes más famosas, no puede ser considerada como la obra de un sólo hombre, sino el broche genial que coronó el esfuerzo de quienes lo precedieron.

Las leyes de Newton son el protocolo que nos indica cómo debemos operar para determinar la aceleración de un cuerpo.

PRIMERA LEY

Cada cuerpo material persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme, solamente si la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él, se anulan entre sí.

Esta es la ley de **inercia**. Es la definición de un **sistema inercial**. Por ejemplo, si en un cierto sistema de referencia un objeto que inicialmente estaba en reposo permanece en reposo sin precisar alguna interacción extra, entonces este sistema constituye un sistema de referencia inercial.

Históricamente ésta fue una abierta confrontación con la física Aristotélica que postulaba que la *fuerza* (o acción ejercida por un agente externo) era proporcional a la velocidad. En muchos casos se oponía al sentido común: cualquier observador puede comprobar que para mantener un carro en movimiento con velocidad constante, necesita aplicar una fuerza constante. Galileo, como vimos, ya había dado el primer paso al atribuir a los cuerpos esta *modorra* que los hacía mantener su movimiento adquirido. Newton generalizó este principio e incluyó el movimiento circular. Esta afirmación contradecía a los filósofos antiguos y también a Galileo que pensaban que el movimiento circular –en particular el de los planetas–, era natural y no necesitaba la presencia de una fuerza (o mejor de un agente extraño) que cambiara constantemente su velocidad. Newton coincidía con Descartes en esta disputa, quien afirmaba que una partícula que describe un movimiento circular

tiende a seguir por la tangente a la circunferencia en ese punto, si no es retenida en su órbita por una cuerda.

Podemos mencionar ejemplos. Si dejamos rodar una esfera de acero sobre un riel horizontal, esta esfera rueda por un largo trecho sin detenerse si el roce entre la esfera y el riel es despreciable. La esfera mantiene su movimiento horizontal porque no existe ninguna interacción (o fuerza) en dicha dirección.

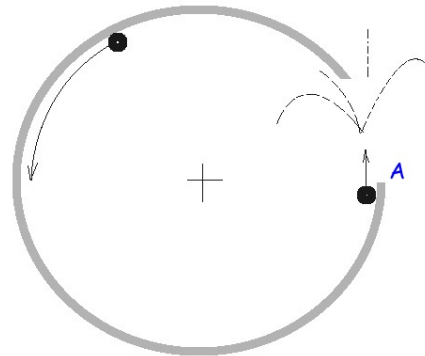
Si viajamos en un vehículo por un camino plano a velocidad constante, el movimiento no se percibe. Sin embargo, si el vehículo frena bruscamente, nuestra tendencia (inercia) es mantener el estado de movimiento inicial.

Ejemplo

El anillo (incompleto) permanece fijo sobre una superficie horizontal. Un pedazo de arco se ha extraído del anillo, como muestra la figura. Si una esfera se pone a rodar sobre el interior del anillo, indique cuál de las trayectorias indicadas seguirá la esfera una vez que alcance el punto A del anillo. ¿Depende esta trayectoria de la velocidad de la esfera?

Solución

Por el principio de inercia, cualquiera sea la velocidad la partícula seguirá la dirección y sentido de su velocidad en el punto A. Una trayectoria que sigue el contorno del anillo *después* de abandonar el punto A, era la creencia (errónea) que profesaban en la antigüedad y que extendían a la trayectoria (círculos) seguido por los planetas. Newton nos dice, como veremos a continuación, que la esferita sigue al anillo en su trayectoria debido a la interacción (fuerza) que ejercía el anillo sobre la esfera.



Lo usual es que la velocidad de los cuerpos cambie ya sea en su módulo solamente, o sólo en su dirección o en ambas.

La segunda ley de Newton, contiene la relación entre la suma de las fuerzas externas y la aceleración adquirida por el cuerpo. Originalmente fue escrita utilizando el *momentum*, que es el producto de la velocidad por la masa inercial de un cuerpo.

SEGUNDA LEY

El cambio de momentum es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, y apunta en la dirección y sentido

de la línea generada por la fuerza neta.

$$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{P}.$$

La segunda ley establece en forma cuantitativa *cómo* cambia el movimiento debido a la aparición de la fuerza. Al enunciar su segunda ley, Newton dió especial importancia al concepto de *cantidad de movimiento* (momentum) $\vec{P}$

$$\vec{P} \equiv m \cdot \vec{v}_0 \quad (\text{VI.1})$$

en esta fórmula el concepto de masa es aceptado en forma intuitiva.

Si la masa permanece constante, entonces:

$$\vec{F} \Delta t = \Delta(m \cdot \vec{v}) = m \Delta \vec{v}.$$

Ahora podemos introducir la aceleración en la fórmula anterior,

$$\vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv m \cdot \vec{a}. \quad (\text{VI.2})$$

Vemos que si $\vec{F} = 0$, entonces $\Delta \vec{v} = 0$, es decir, no cambia ni la dirección ni la magnitud de la velocidad y el movimiento permanece rectilíneo.

Por otra parte si la fuerza es constante y la masa no varía, se origina un movimiento con aceleración constante. Un ejemplo, es la caída libre de los cuerpos sobre la superficie de la Tierra.

La definición de *masa inercial* m , se hace a través de un experimento que es fácil describir y entender pero más difícil de realizar ¹.

Por ahora aceptamos la masa inercial como un número real que asociamos con cualquier objeto y para el cual existe un procedimiento bien determinado que fija su valor sin ambigüedades.

Vemos que la expresión $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ incluye dos conceptos nuevos: fuerza y masa. Si aceptamos la definición de masa, entonces la segunda ley de Newton es una definición de fuerza, y viceversa. No hay forma de salir de este círculo vicioso puesto que tenemos una ecuación y dos conceptos nuevos.

Esta característica de las ecuaciones de Newton es común a todas las teorías realmente *nuevas*. No constituyen una extensión de los conceptos antiguos, sino más bien los conceptos antiguos *caben* y se ordenan dentro de este nuevo esquema. En este escenario se introducen conceptos nuevos—como la **fuerza**— y, simultáneamente se provee una receta consistente (vía leyes simples y universales) de cómo usarla en distintas circunstancias [3].

¹Un ensayo escrito por el Profesor Igor Saavedra acerca de las ideas y conceptos introducidos por Newton al anunciar sus leyes, se incluye en un Apéndice, al final del libro.

En este caso, la receta consiste en describir un procedimiento que defina la masa de un objeto en forma *única*: de una vez para siempre.

Con la masa ya definida y suponiendo que el objeto no sufre ningún cambio físico, tenemos el número que asociamos a m en las ecuaciones de Newton.

En forma *independiente*, definimos la fuerza que incluiremos en cada caso. Por ejemplo, fuerzas de interacción gravitacional si hay un objeto masivo en la cercanía, fuerzas de contacto si hay objetos que se tocan, fuerzas de roce si hay deslizamiento relativo entre superficies...etc. y, con cualquiera de estas u otras fuerzas que actúen sobre el cuerpo, aplicamos la segunda ley de Newton. Enseguida verificamos si la aceleración *observada* coincide con el comportamiento obtenido a partir de la teoría. Si hay acuerdo entre la teoría y la observación, aceptamos esta ley de movimiento como verdadera. Si aparece una contradicción que no encuentre explicación dentro del esquema descrito, debemos revisar la teoría.

Newton dió una (y sólo una) prescripción clara, concreta y corta para determinar en forma única las fuerzas que intervienen en una situación dada y que es necesario utilizar para resolver cualquier problema propuesto.

Cada vez que olvidemos incluir una de las fuerzas que, de acuerdo a la prescripción, deba ser considerada, llegaremos a un resultado erróneo y, en ese caso, se nos podrá señalar *sin ambigüedades*, qué fuerza se nos olvidó incluir en el problema.

En resumen, lo impresionante en las leyes de Newton es su esquema simple y claro de funcionamiento, que es capaz de predecir acertadamente una gran cantidad de fenómenos observados en la vida diaria.

TERCERA LEY

Si un cuerpo **A, ejerce una fuerza sobre otro **B**, éste último ejerce sobre **A**, una fuerza igual en magnitud y dirección, pero en sentido opuesto. Estas fuerzas, denominadas de acción y reacción actúan siempre en puntos diferentes.**

La tercera ley de Newton define una propiedad que deben tener todas las fuerzas. Las fuerzas de *acción* y *reacción* aparecen bien delineadas al existir dos objetos en contacto. Por ejemplo, esta prescripción indica que al tener dos bloques, A y B, y en el caso que uno, A, empuja al otro, B, se debe reemplazar A por una fuerza que actúa sobre B y, simultáneamente, una fuerza actuando sobre A, en la misma dirección que la anterior pero con sentido contrario.

También es válida para objetos que se influncian unos a otros por intermedio de una acción a distancia, es decir sin un medio material que los una.

Por ejemplo: al tirar un bloque mediante una cuerda se ejerce una fuerza (acción) F_0 sobre el bloque, en consecuencia –de acuerdo a la tercera ley de Newton– este objeto aplica sobre la mano una fuerza (reacción) cuya magnitud es la misma $|F_0|$, pero cuyo sentido es opuesto.

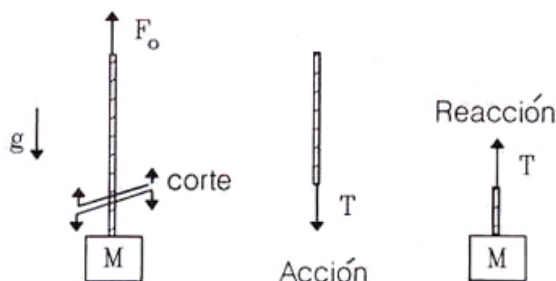


Figura VI.1: La Tercera Ley de Newton en acción. F_0 representa la fuerza que se aplica sobre el bloque a través de la cuerda. El tipo que sujeta la cuerda soporta una fuerza $-F_0$. Al cortar esta cuerda, en forma imaginaria, debemos reemplazar en cada extremo cortado la tensión T de acuerdo a esta ley.

La utilidad de esta ley es transparente cuando analizamos sistemas complejos (con varios cuerpos interactuando entre ellos). En este caso debemos *cortar (imaginariamente)*, los vínculos que une cada uno de los cuerpos y reemplazarlo por su fuerza equivalente de acuerdo a la tercera ley de Newton.

VI.2.1. Unidades y Dimensiones

Si la masa se mide en kg y la aceleración en (m/s^2) , entonces la fuerza viene dada en newtons. la dimensión de la fuerza es $[M][L][T^2]$.

$$1 \text{ newton} \equiv 1 \text{ kg} \times 1 \frac{m}{(s)^2} \equiv 1N, \quad \text{MKS} \quad (\text{VI.3})$$

$$1 \text{ newton} = 1000 \text{ gr} \times \frac{100 \text{ cm}}{(s)^2} = 10^5 \frac{\text{gr} \times \text{cm}}{(s)^2} \equiv 10^5 \text{ dinas} \quad \text{CGS.} \quad (\text{VI.4})$$

Es interesante notar que, a pesar de que Newton fue un ciudadano Británico, el concepto de fuerza, que constituyó sin duda, una gran contribución a la ciencia, se midió hasta hace poco en Gran Bretaña, en otras unidades denominadas Libras. Hoy este desorden en las unidades está llegando a su fin debido a la necesidad de los países de uniformar sus unidades de medida. El newton como unidad de fuerza es universal.

VI.3. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Los problemas de dinámica, por complejos que sean, son una superposición de problemas simples. A continuación, ilustraremos cómo enfrentar una serie de problemas simples.

Lo primero es aislar el cuerpo que nos interesa y reemplazar el resto de los objetos que interactúan con él mediante una fuerza. Esto es hacer **diagrama de cuerpo libre** o abreviado **DCL** del objeto en estudio.

Analizar las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo es equivalente a aislarlo del resto de los objetos que interactúan con él. Cada objeto que interactúa con este cuerpo es borrado y reemplazado por una fuerza de acuerdo con la tercera ley de Newton. El resultado de esta operación es un cuerpo aislado (libre) sobre el cual actúan diversas fuerzas. Es lo que se denomina un **DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE** del objeto: **DCL**.

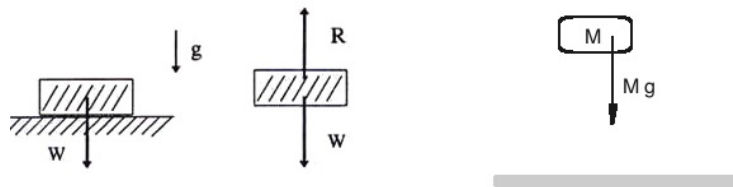


Figura VI.2: Dos casos se ilustran en esta Figura. Una masa en reposo sostenida por un piso plano y un objeto en caída libre, sobre el cual también se aplica la atracción gravitacional de la Tierra, pero a diferencia del anterior no existe una reacción del piso porque NO hay un piso que lo sostenga. Este objeto cae libremente.

Ejemplo

Analizar las fuerzas que actúan sobre un bloque que permanece en reposo sobre el piso.

Comenzaremos definiendo una de las fuerzas que debemos incluir en la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m \vec{a}$, cuando estudiemos el movimiento de un objeto situado sobre la Tierra. Esta fuerza es el *peso*:

A cada objeto, le asignamos una fuerza, que definimos como: $\vec{W} = M \cdot \vec{g}$, y que apunta hacia el centro de la Tierra. Posteriormente analizaremos su origen, por ahora la aceptamos como una propiedad de cada objeto. Esta fuerza es, por definición:

$$\vec{W} = -Mg \hat{j}, \quad W \equiv \text{peso del objeto.}$$

Como el bloque se apoya sobre el piso, al retirar el piso para hacer el diagrama de cuerpo libre,

lo debemos reemplazar por una fuerza, que llamamos la *reacción* del piso $\vec{R}$. Estas, $\vec{R}$ y $\vec{W}$ son todas las fuerzas que actúan sobre el bloque.

Como además nos dicen que el bloque permanece en reposo en la dirección vertical entonces $v_y = 0$, en todo instante y por lo tanto $a_y = 0$, y, de acuerdo a la segunda ley de Newton, la suma de todas las fuerzas externas en esa dirección debe anularse. De esta forma la fuerza que ejerce el piso *sobre* el bloque debe ser *igual en magnitud y de sentido opuesto* al peso del bloque. Tomando como vector unitario $\hat{j}$ en la dirección vertical y , sumamos todos los vectores en dicha dirección y obtenemos:

$$(+R - W)\hat{j} = M(\vec{a} \cdot \hat{j}) \equiv Ma_y = 0 \Rightarrow R = W.$$

En la dirección horizontal, no existen fuerzas ni aceleraciones.

Nota

- R representa el módulo del vector $\vec{R}$, y análogamente, W es el módulo del vector $\vec{W}$, son por lo tanto **positivos**. Si al resolver las ecuaciones uno de ellos resulta ser negativo, nos indica que el sentido asignado inicialmente a dicho vector, no corresponde con el sentido que tiene dicha fuerza.

Las ecuaciones, si son aplicadas consistentemente, proporcionan el sentido correcto de los vectores.

- En la segunda ley $\vec{F} = m\vec{a}$, la fuerza $\vec{F}$ denota la suma de **todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo**. Así, en rigor debemos escribir la segunda ley como:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Si el cuerpo no sufre ninguna aceleración, ($\vec{a} = 0$) y $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$.

Esta ecuación define la *estática* de objetos puntuales.

Ejemplo

Un objeto de masa M cuelga desde el techo mediante una cuerda, que suponemos sin masa. (Es decir la masa de la cuerda es despreciable al compararla con la masa del bloque). Encontrar la tensión en la cuerda.

Para calcular la tensión, cortamos la cuerda y hacemos el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte inferior del dibujo.

Como este elemento permanece en reposo absoluto, la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre él, debe ser cero. Además, como lo hemos aislado del resto del medio (de la parte superior de la cuerda, de la atracción de la Tierra) debemos reemplazar cada uno de ellos por la interacción (**fuerza**) con que actuaba sobre nuestro sistema. Las denominamos T y $W = Mg$.

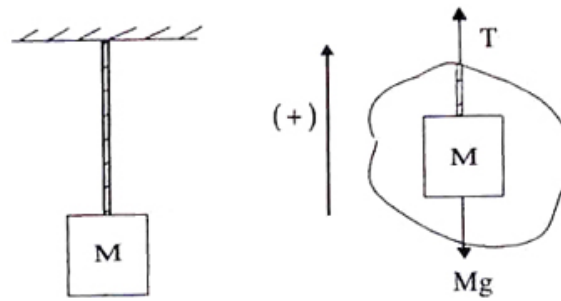


Figura VI.3:

Haciendo una elección juiciosa de las coordenadas (ver Figura) tenemos:

$$+T - Mg = Ma = 0 \implies T = Mg.$$

Las cuerdas que usaremos en nuestros problemas se refieren a objetos que sólo tienen longitud (largo), son inextensibles y transmiten solo tensiones en sus extremos en la dirección de la cuerda. Claramente una cuerda NO puede transmitir compresiones. Como la masa de la cuerda es nula, el módulo de la tensión en ambos extremos es el mismo. Más tarde estudiaremos resortes cuyo modelo será idéntico a éste de la cuerda pero permitiremos que su largo sea variable y transmita compresiones.

Ejemplo

Considere la masa **M** sostenida de dos formas diferentes. En el primer caso (Fig- A) se sostiene mediante una cuerda que está unida a una pared. En el segundo caso (Fig- B) se sostiene mediante otra masa idéntica colgando en forma simétrica desde el lado opuesto. No existe roce en ninguna de las superficies en contacto.

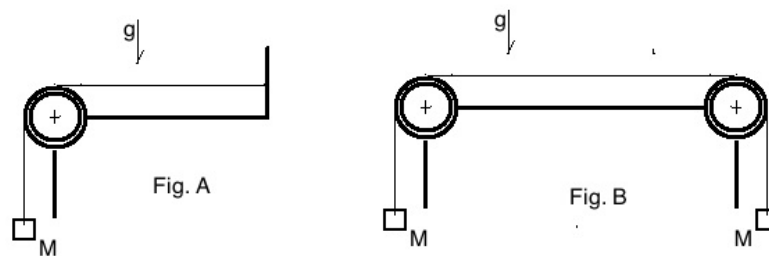
La tensión en la cuerda es

- a.- mayor en el caso **A** que en el caso **B**.
- b.- Es mayor en el caso **B** que en **A**.
- c.- Es igual en ambos casos. Dé una razón cuantitativa que justifique su decisión.

El DCL de la masa en el extremo izquierdo es el mismo en ambos casos. Similar al del ejemplo anterior. La polea ideal del extremo no tiene masa ni roce. Su papel es sólo desviar en 90° la dirección de la tensión de la cuerda. Al igual que el caso anterior la tensión es igual al peso de la masa $T = Mg$.

Ejercicio

Dos cuerdas de largo diferente y sin masa, se sostienen desde una superficie plana y horizontal.



El otro extremo de la cuerda está atada a un gancho instalado en la masa **M**. Calcular la tensión sobre cada una de las cuerdas AB y BC de la Figura VI.4.

Nota

Este es un problema en dos dimensiones. Como la segunda ley de Newton es vectorial debe usarla separadamente en cada una de las dos direcciones. En este caso Ud. no conoce la magnitud de ninguna de las dos reacciones en la cuerda, pero sí conoce su dirección y sentido; su dirección es la misma que adoptan las cuerdas y el sentido de la fuerza debe ser tal que mantenga la cuerda tensa.

Respuesta: $T_C = T_A \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $T_A = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{3}} M g$ Note que al ser las cuerdas diferentes la tensión en cada una es diferente. Si fuera una sola cuerda que atravesara el gancho para sostener a **M**, la tensión debería ser la misma, una sola para toda la cuerda.

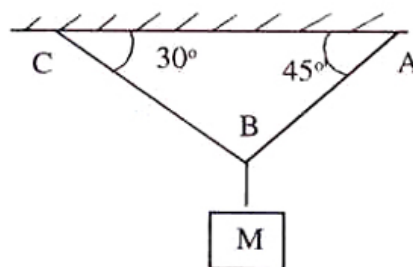


Figura VI.4:

Considere el sistema de dos masas **m** y **M** unidas por una cuerda sin masa e inextensible, con todas las superficies en contacto con roce despreciable. Inicialmente el sistema se mantiene en reposo sosteniendo la masa **m** mediante un agente externo (con una mano, por ejemplo). Posteriormente se deja ir y el sistema comienza a deslizarse. Compare el valor de la tensión en la cuerda para

ambos casos, cuando estaba sostenida y al liberarla. Justifique su respuesta.

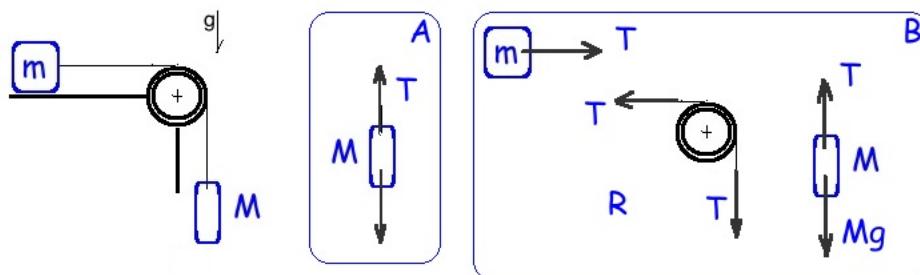


Figura VI.5: La fuerza **R** indicada en la figura **B** representa la reacción en el eje de la polea (supuesta sin masa o cuya masa es despreciable con respecto a la tensión que actúa en la cuerda). Si las tensiones son perpendiculares entre sí, la reacción apunta en 45° .

En el primer caso, donde la masa **m** está inmovilizada basta que calculemos la tensión en la masa que está colgando del otro extremo de la cuerda (Ver recuadro **A** en la figura VI.5), dado que la tensión se transmite sin cambiar de magnitud a lo largo de la cuerda. En este caso entonces la tensión es $T = Mg$.

Cuando el sistema se deja libre, la masa **M** comienza a caer. Como la cuerda es inextensible, lo que baja la masa **M** es seguido en la misma forma por la masa **m**. Ambas tienen por tanto el mismo desplazamiento por unidad de tiempo, la misma velocidad y la misma aceleración. Debemos resolver el problema de dos masas unidas por una cuerda, que se mantiene tensa durante la caída. Este es el planteamiento del problema. Ahora insertamos el protocolo de Newton para resolverlo. Los diagramas de cuerpo libre están en el recuadro **B** de la figura VI.5. Elegimos como positivo el sentido que sigue la caída de la masa **M** y lo consideramos a lo largo de la cuerda. Las ecuaciones que se desprenden del DCL son

$$1. - T = m a, \quad 2. - Mg - T = M a. \quad \text{Sumando ambas ecuaciones obtenemos}$$

$$a = \frac{M}{m + M} g. \quad \text{Por tanto la tensión en el caso B es} \quad T = \frac{m M}{m + M} g. \quad (\text{VI.5})$$

La tensión es menor en el caso en que la masa **M** está cayendo y arrastra a **m**. Era de esperar una respuesta así debido que al caer la masa **M** la tensión debe disminuir necesariamente para que el sistema adquiera aceleración.

Ejercicio

Dos masas, M y m , son aceleradas sobre una superficie (sin roce) mediante una fuerza aplicada en el extremo de la cuerda situada a la derecha de la masa m . Se pide comparar las magnitud de las tensiones soportadas por la cuerda **A** y **B**. Para ello decida si:

- a.- De acuerdo a la Fig. la tensión en la cuerda **A** es mayor que la tensión que soporta la cuerda **B**.
- b.- O el opuesto, la tensión en **B** es mayor que la de **A**.
- c.- Las tensiones en ambas cuerdas son iguales.

Debe justificar su elección con argumentos físicos.

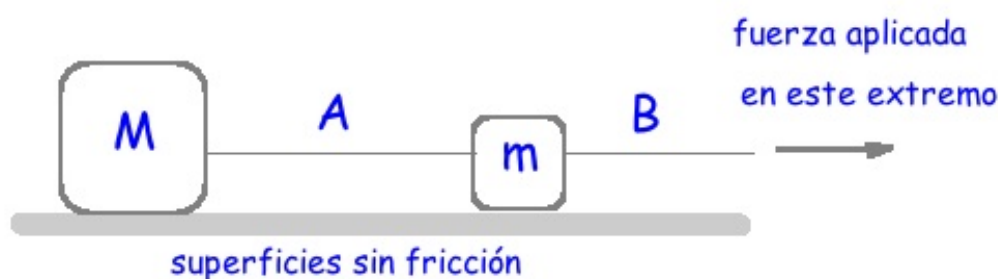


Figura VI.6:

La resolución de este problema es semejante al tratamiento del ejemplo anterior. La fuerza F_o de este caso, corresponde al peso de la masa M , Mg , en el caso anterior. No existe la polea. Pruebe reemplazando Mg por F_o en ec. VI.5

VI.4. SISTEMAS INERCIALES

Existe otra condición adicional para que las Leyes de Newton sean aplicables en la forma enunciada. El sistema de referencia usado debe permanecer en reposo absoluto o con una velocidad constante con respecto a otro sistema que permanece en reposo absoluto.

Ilustremos esta afirmación con un ejemplo.

Si se deja caer una pedazo de plasticina en el interior del Metro cuando está detenido, la plasticina cae verticalmente hacia el suelo. Ahora si lo hacemos cuando el Metro está acelerando (en el momento de partir, por ejemplo) podemos verificar que la plasticina *no* cae en el mismo punto que en el caso anterior, verticalmente bajo el punto de lanzamiento, sino que se desvía con respecto al observador. En los dos casos el objeto fue lanzado bajo las mismas condiciones, y una vez en el aire está sujeto a la misma fuerza, la atracción gravitacional (despreciamos la resistencia del aire). Sin embargo, la diferencia está que *en el segundo caso, el Metro no constituye un sistema de referencia inercial, por estar acelerado*, y por lo tanto no podemos aplicar las Leyes de Newton en la forma

usual; aparecen fuerzas no inerciales, que deben ser incluidas para poder predecir correctamente las trayectorias observadas.

Resumiendo: Las Leyes de Newton son válidas cuando están referidas a un *Sistema Inercial*, uno en el cual un objeto en reposo, permanece en reposo o que se desplaza con una velocidad constante con respecto al sistema de referencia ².

No existe en la naturaleza un sistema que cumpla con las condiciones de ser inercial. Sin embargo, existe una multitud de sistemas que denominamos inerciales puesto que su desviación con respecto a uno inercial es despreciable y por tanto se consideran genuinamente inerciales.

La pregunta obvia en este punto es con qué objeto enunciamos las leyes de Newton si no existe el sistema de referencia donde podamos aplicarlas.

Esta no es realmente una dificultad. Se resuelve en forma pragmática:

En todos los ejemplos que estudiemos, siempre existirá un sistema de referencia en el cual, los efectos de origen no-inercial del sistema de referencia son tan pequeños, que no los consideramos, salvo que explícitamente se indique.

Ejemplo

El sistema de referencia más usado es la superficie de la Tierra, que no constituye en rigor un sistema inercial puesto que está girando con respecto a un eje. Sabemos que al girar existe una aceleración y por lo tanto deben aparecer efectos de las fuerzas no inerciales en este sistema.

Si estudiamos el movimiento de partículas en un plano inclinado o el movimiento de un par de masas unidas mediante una cuerda que cruza una polea y en todas ellas la superficie de la Tierra es un buen sistema de referencia. Los efectos de la rotación son despreciables.

En caso que sea necesario incluir la rotación de la Tierra en algún ejemplo, ubicamos nuestro sistema de referencia que no gira en el centro de la Tierra. En este ejemplo estamos despreciando el movimiento de rotación de la Tierra en torno al Sol. Pero este inconveniente puede resolverse ubicándonos en el centro del sistema solar...y así sucesivamente.

Existen algunos fenómenos, que se originan debido a la naturaleza no-inercial de la Tierra y que en ciertas circunstancias se pueden apreciar. Indicamos un par de ellos.

- Si hacemos oscilar un péndulo justo en el Polo Sur –o mejor, justo en el eje de rotación de la Tierra–, no es difícil imaginar que al cabo de 24 horas, nuestro observador habrá dado una vuelta completa en torno a su eje. La *dirección de oscilación del péndulo* habrá permanecido, durante

²En la actualidad, el único sistema que cumple esta condición es uno desde el cual se observa la radiación de fondo sin ninguna anisotropía. Ver esta idea en un libro de Cosmología.

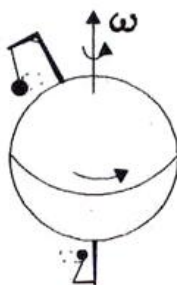


Figura VI.7:

todo este tiempo, fija con respecto a las estrellas. La explicación para la rotación de este péndulo que gira sin razón aparente según el observador, se debe a que el péndulo, al estar sostenido por un hilo, no está obligado a seguir a la rotación de la Tierra, y por tanto oscila conforme a las leyes de Newton pero referidas a un sistema de referencia fijo al centro de la Tierra, con respecto a las estrellas— y que, obviamente, no gira con la Tierra.

Algo similar sucede con un péndulo que oscila en Santiago (o cualquier otro lugar). El péndulo oscila y a la vez comienza a rotar, más lentamente esta vez, con respecto a su eje.

Este es el péndulo de Foucault que se exhibe en algunos Museos de Ciencia y Tecnología.

- Todos sabemos que es muy peligroso caminar sobre un disco que está girando. Es muy difícil saber qué debemos hacer para equilibrarnos. Sin embargo la Tierra está girando y nosotros no perdemos el equilibrio. La explicación radica en la pequeña magnitud que tiene la velocidad angular de la Tierra. Consecuentemente, sus efectos son difíciles de captar.

- Otros fenómenos similares ocurren con las corrientes oceánicas, las direcciones de los vientos en las vecindades de la zona tropical, el movimiento de los glaciares que se desvían con respecto a las corrientes oceánicas que los ponen en movimiento ...etc.

Todos estos fenómenos se originan cada vez que existe un movimiento sobre un sistema de referencia que está en rotación. La aceleración que se genera se denomina la aceleración de Coriolis y tiene la expresión siguiente:

$$|\vec{a}_{\text{coriolis}}| = 2 v_{\text{relativa}} \cdot \omega_{\text{Tierra}}.$$

En consecuencia, cuando dejamos caer un objeto sobre la Tierra éste no cae verticalmente, sino que desvía su trayectoria debido a la aceleración de Coriolis. Afortunadamente este efecto es muy pequeño. Podemos **estimar** el valor máximo de la aceleración de Coriolis para un objeto que se deja caer desde una altura de 10 metros.

Sabemos que la desviación es pequeña, así que podemos considerar la velocidad relativa a la Tierra como la velocidad de caída libre. Esta es de aproximadamente 14 m/seg (cuando llega al suelo), si es lanzada desde una altura de 10 metros. Por otra parte, la velocidad angular de la Tierra

es aproximadamente $0,7 \times 10^{-4}$ rad/seg, de esta forma el valor máximo de la aceleración de Coriolis es aproximadamente de 10^{-3} m/seg². Si comparamos este número con el valor de la aceleración de gravedad, 10 m/s², se percata que existen 4 órdenes de magnitud de diferencia entre ellas y que se necesita bastante más precisión que la habitual para detectar este efecto.

Ejercicio

Obtenga el valor de la velocidad angular de la Tierra. Encuentre el valor de la velocidad tangencial de un habitante de Antofagasta, de Puerto Montt y de Santiago.

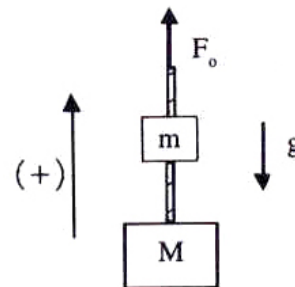
VI.5. APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

Proseguimos resolviendo ejemplos con aplicaciones de las leyes de dinámica. En todos consideramos la Tierra como un sistema inercial.

Ejemplo

Dos bloques m y M , están atados por una cuerda. El bloque superior m está sostenido verticalmente por otra cuerda a la cual se le aplica una fuerza $\vec{F}_0$. Los bloques están sometidos a la atracción gravitacional de la Tierra.

- ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza $\vec{F}_0$ para mantener ambos bloques en reposo? (Suponga ambas cuerdas sin masa).
- ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza $\vec{F}_0$ para comunicar a ambas masas una aceleración $\vec{a}_0$?
- Suponga ahora que la cuerda que une ambas masas tiene, a su vez, una masa μ . ¿Cuál es la tensión de la cuerda que las une?



a) Definimos como positivo el sentido opuesto a la aceleración de gravedad $\vec{g}$. Si consideramos como nuestro sistema el conjunto de las dos masas, entonces en el diagrama de cuerpo libre, la suma de las fuerzas externas es F_0 y el peso de cada una de las masas:

$$\sum F_{ext} = F_0 - (M + m)g,$$

Incluyendo el término de la aceleración en la ecuación anterior, tenemos:

$$F_0 - (M + m)g = (M + m) \cdot a_0,$$

donde hemos supuesto que las masas son *aditivas*: si existen varias masas, la masa total es la *suma* de ellas.

No existe ninguna razón, para que esta suposición sea válida, pero los resultados que genera se ajustan a lo que se observa.

Si exigimos que $a_0 = 0 = v_0$, vale decir, que el sistema se encuentre en reposo, entonces:

$$F_0 = (M + m)g.$$

b) Si $a_0 \neq 0$, entonces $F_0 = (M + m)(g + a_0)$.

Ahora podemos dar a a_0 diferentes valores: si $a_0 < 0$, indica que la aceleración está apuntando en el mismo sentido que g , ahora si su módulo es igual a g , entonces $a_0 = -g$ y $F_0 = 0$. Este caso indica que el objeto está en caída libre y, obviamente, no se necesita aplicar ninguna fuerza sobre el cuerpo para lograr este resultado.

c) Calculemos la tensión en la cuerda que une las masas. En este caso tomemos como nuestro sistema, la masa M .

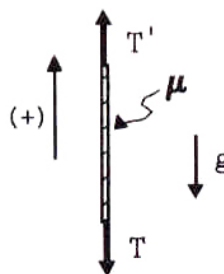
$F_{ext} \equiv T - Mg = Ma_0$ (Recordemos que T indica el módulo de la tensión $\vec{T}$ donde ya hemos incluido el signo correspondiente, lo mismo es válido para el peso de la masa M). Ordenando tenemos $T = M(a_0 + g)$.

El diagrama de cuerpo libre de la cuerda aparece en la Figura. Las fuerzas que actúan sobre ella son:

$$F_{ext} \equiv T' - T - \mu g = \mu a_0,$$

donde a_0 es la aceleración dada. Despejando, $T' = T + \mu(a_0 + g)$. Reemplazando el valor de T indicado más arriba obtenemos:

$$T' = (M + \mu)(a_0 + g)$$



Vemos nuevamente que si $a_0 = -g$ (caída libre), la tensión T' sobre el extremo superior de la cuerda es nula, como era de esperar, puesto que si el cuerpo está en caída libre, nadie sostiene la masa m .

Si $\mu = 0$, entonces $T' = T$: el módulo de la tensión en ambos extremos de la cuerda es la misma.

De la ecuación obtenida para T' , se desprende que si $M \gg \mu$, podemos despreciar el efecto de la masa de la cuerda μ en la dinámica del sistema.

Si la masa de la cuerda es despreciable comparada con el resto de las masas que intervienen en el sistema en estudio, podemos suponer que la tensión es la misma en ambos extremos de la cuerda $T' = T$. Esta es una aproximación usada frecuentemente.

Podemos volver a este mismo ejercicio y analizarlo desde un punto de vista diferente. Al considerar como nuestro sistema las dos masas (unidas por una cuerda ideal, sin masa) entonces las fuerzas *externas* que actuaban sobre el sistema eran $\vec{F}_{ext} = +\vec{F}_0 - m\vec{g} - M\vec{g}$.

Ahora, si tomamos como nuestro sistema la masa M , entonces el diagrama de cuerpo libre nos muestra las fuerzas externas del sistema: $\vec{F}_{ext} = \vec{T} - M\vec{g}$. La pregunta que surge es: ¿por qué se dejó fuera la fuerza $\vec{T}$ (tensión en la cuerda) cuando se consideró cómo nuestro sistema el conjunto de las dos masas?

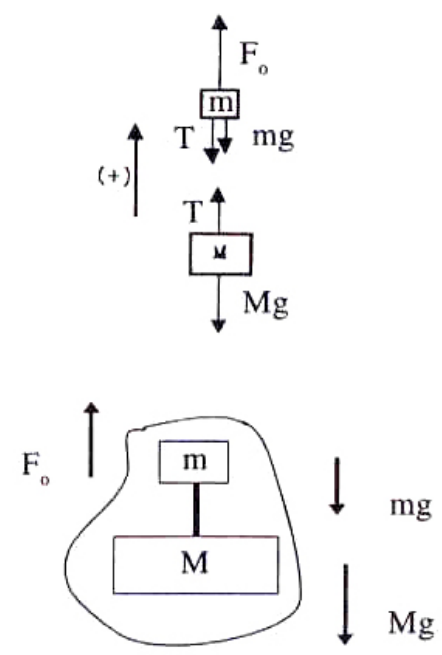
La respuesta es la siguiente: como consecuencia de la tercera ley de Newton *todas las fuerzas internas del sistema escogido se anulan mutuamente*, sólo sobreviven las fuerzas *externas* al sistema.

En el diagrama de Fuerzas que se acompaña intentamos explicar gráficamente este resultado. Dibujamos los diagramas de cuerpo libre de cada una de las masas m y M separadamente (no incluimos la masa de la cuerda) y sumamos todas las fuerzas que actúan sobre ambas masas. Por el principio de acción y reacción las tensiones T se anulan entre ellas y sólo sobreviven las fuerzas externas al sistema.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sistema } m. \\ F_{ext.}^m = F_0 - mg - T, \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sistema } M. \\ F_{ext.}^M = T - Mg, \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sistema } \{m + M\} \\ F_{ext.}^{m+M} = F_{ext.}^m + F_{ext.}^M. \\ F_{ext.}^{m+M} = F_0 - mg - Mg \end{array} \right\}$$



The diagrams show: 1) Mass m with forces F0 (up), T (down), and mg (down). 2) Mass M with forces T (up) and Mg (down). 3) The combined system {m+M} with forces F0 (up), mg (down), and Mg (down). The tension forces T are shown as internal forces between the two masses and are not included in the external force sum for the combined system.

□

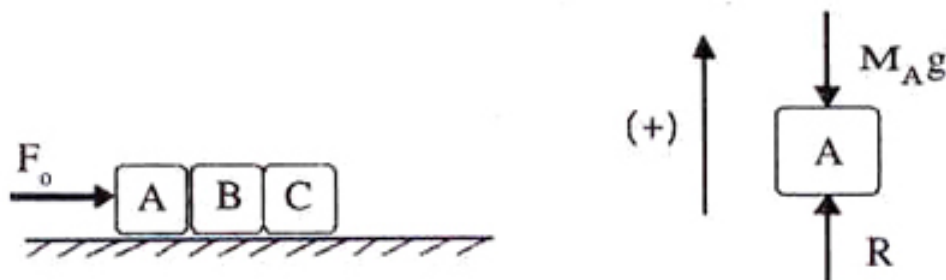
Ejemplo

Tres bloques idénticos de masa M son empujados por una fuerza horizontal F_0 sobre una mesa

sin fricción.

- ¿Cuál es la fuerza *neta* vertical sobre el bloque A?
 - ¿Cuál es la fuerza *neta* horizontal sobre el bloque A?
 - ¿Cuál es la aceleración del bloque C?
 - ¿Cuál es la fuerza que ejerce el bloque B sobre el bloque A?
- a) Fuerza vertical *neta* sobre A.

Como siempre, debemos comenzar con el diagrama de cuerpo libre de A. Reemplazo el piso por una fuerza que llamamos $\vec{R}$ (Reacción del piso). Debemos incluir el peso de la masa A. Como el bloque A se desliza sobre la mesa sin saltos, tenemos que la *velocidad* de A en la dirección *vertical* es nula. Como su velocidad vertical no cambia, su aceleración en esa dirección es nula.



Usando la segunda Ley de Newton obtenemos:

$$F_y = R - M_A g = 0 \Rightarrow R = M_A g.$$

La reacción del piso es igual al peso del cuerpo.

b) Para calcular la fuerza horizontal que actúa sobre A debemos aislarlo: sacar el bloque B. Para que las leyes de Newton se enteren de la existencia de B, debemos incluir una fuerza que lo reemplace: $\vec{F}_{BA}$ (acción de B sobre A, una fuerza de contacto). Como no existe fricción, los 3 bloques se desplazan hacia la derecha con una cierta aceleración a_0 (que *no* conocemos por el momento).

A partir de la segunda ley de Newton obtenemos:

$$\underbrace{F_0 - F_{BA}}_{\text{Fuerza neta sobre el bloque A}} = M_A \cdot a_0$$

- c) Aceleración del bloque C.

Como todos los bloques viajan juntos, la aceleración de C es la misma que la aceleración del conjunto. El sistema elegido para hacer el diagrama de cuerpo libre en este caso es el conjunto de los tres cuerpos, de modo que:

$$F_{ext} = F_0 \text{ (sólo consideramos la dirección } x \text{)}.$$

$$F_0 = [M_A + M_B + M_C] \cdot a_0.$$

Si todas las masas resultan ser iguales, tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{3} \left[\frac{F_0}{M} \right].$$

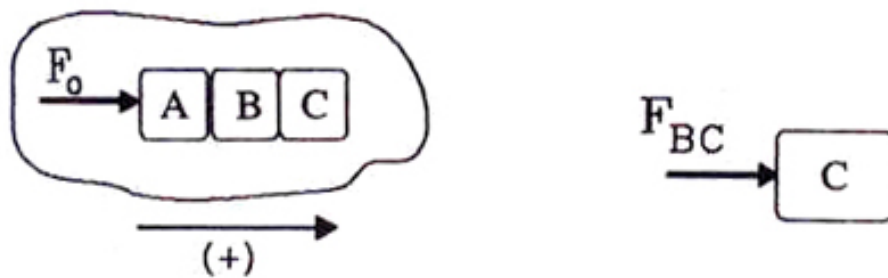


Figura VI.8:

d) Ahora estamos en condiciones de calcular el valor de F_{BA} . Usando el resultado de la parte b) tenemos:

$$F_0 - F_{BA} = M a_0 = M \left[\frac{1}{3} \frac{F_0}{M} \right],$$

despejando F_{BA} :

$$F_{BA} = \frac{2}{3} F_0,$$

y análogamente, la reacción de A sobre B es $F_{AB} = -F_{BA}$ de acuerdo al principio de acción y reacción, de modo que $F_{AB} = -\frac{2}{3} F_0$.

Para calcular la reacción de B sobre A, debemos hacer el diagrama de cuerpo libre de B y escribir la ecuación de fuerzas correspondiente:

$$F_{AB} - F_{CB} = M a_0,$$

como ya conocemos F_{AB} y a_0 , obtenemos F_{CB} y entonces la fuerza del bloque B sobre C es:

$$F_{BC} = \frac{1}{3} F_0.$$

Es interesante notar que la intensidad de la fuerza neta, horizontal, que actúa sobre cada una de las masas es la misma. Por ejemplo, la fuerza sobre C es $\frac{1}{3} F_0$, sobre B es $-\frac{1}{3} F_0 + \frac{2}{3} F_0 = \frac{1}{3} F_0$, y sobre A es $F_0 - F_{BA} = F_0 - \frac{2}{3} F_0 = \frac{1}{3} F_0$.

Este resultado es natural, puesto que si todas las masas son iguales y tienen la misma aceleración, de acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza neta actuando sobre cada una de ellas debe ser la misma.

También es posible ver que la masa A está más comprimida que el resto: como es fácil de intuir.

Ejemplo

La figura representa una polea ideal (sin roce) sobre la que cuelgan dos masas M_1 y M_2 , unidas por una cuerda sin masa e inextensible.

Encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema bajo la acción de la fuerza de gravedad.

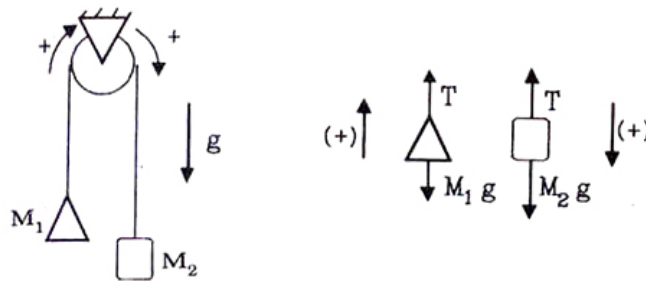


Figura VI.9:

De acuerdo a las suposiciones establecidas en el enunciado, la polea no gira y la cuerda se desliza sobre ella sin arrastrarla debido a la ausencia de roce.

Es claro que el sistema va a girar, salvo que las masas sean iguales. Una forma conveniente de resolver este caso es asignando, desde un comienzo, un valor positivo a una determinada rotación del sistema. Cuando se resuelve este problema a través de las ecuaciones de Newton, esta forma de asignar las coordenadas resulta simple y directa.

El diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas se indica en la Figura. *Note que mantenemos el sentido positivo a lo largo de la cuerda.*

Al cortar la cuerda la reemplazamos por una tensión que se transmite con igual magnitud al otro extremo puesto que la cuerda no tiene masa. La polea sólo cambia el sentido de la tensión. Las ecuaciones son:

$$T - M_1 g = M_1 a,$$

$$-T + M_2 g = M_2 a.$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas T y a , por lo tanto podemos resolver el problema. Al

sumar ambas ecuaciones la tensión T desaparece y obtenemos la aceleración a . Reemplazando el valor de la aceleración en cualquiera de las ecuaciones obtenemos T .

$$a = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} \cdot g, \quad T = \frac{2 M_2 M_1}{M_1 + M_2} \cdot g. \quad (\text{VI.6})$$

Vemos que si $M_2 = M_1$, la aceleración es nula como debe ser. Si $M_2 = 0$, la aceleración de M_1 es $-g$, de acuerdo a la convención de signos usada, y la tensión de la cuerda es nula, como era predecible.

Otro caso límite interesante es $M_2 \rightarrow \infty$. Demuestre que bajo estas condiciones la aceleración del sistema es g y la tensión alcanza el valor $T = 2 M_1 g$. Dé una razón física para justificar estos resultados.

Ejemplo

La masa M_3 en el sistema que se indica en la Figura [VI.10] representa la masa del tramo de la cuerda que se extiende entre las dos poleas ideales. Si despreciamos los trozos de cuerda que cuelgan de ambos lados, entonces podemos pensar en este problema como un intento de estudiar el efecto de la masa de la cuerda en el movimiento del sistema.

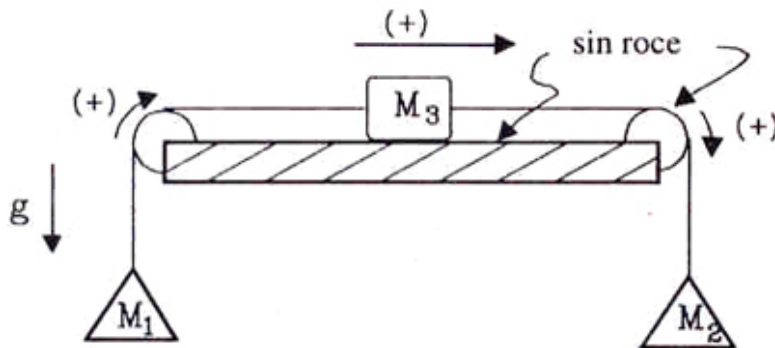


Figura VI.10: Este problema incorpora la masa de la cuerda –a través de M_3 – a la dinámica de las masas del ejemplo anterior. Hemos reemplazado la cuerda por una masa puntual para evitar el análisis de la variación de masa debido al movimiento de la cuerda en los costados.

Las siguientes son cantidades conocidas que intervienen en el problema: M_1 , M_2 , M_3 y g . A partir de estos datos y de la información de la Figura se pide encontrar:

- ¿Cuál es la fuerza neta sobre M_1 y M_2 ? Dé sus respuestas en función de M_1 , M_2 , g , T_1 y T_2 .
- Si se mantiene fija la masa M_3 mediante una fuerza horizontal externa, por ejemplo con la mano, ¿cuál sería, en este caso, el valor de T_1 ?

c) Ahora suponga que M_1 se mantiene fijo aplicando una fuerza vertical con la mano, ¿cuál sería el valor de T_1 ?

d) ¿Cuál es la aceleración del sistema si se deja mover libremente? Dé sus respuestas en función de las masas M_1 , M_2 , M_3 , y g .

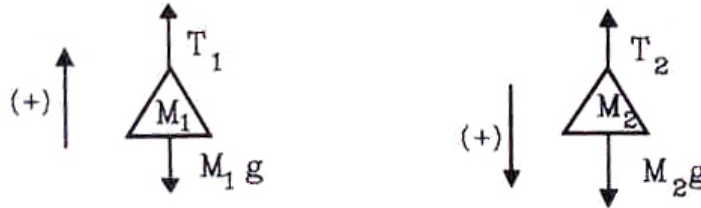


Figura VI.11:

La convención de signos para este ejemplo está indicada en la Figura.

a) Del diagrama de cuerpo libre de la masa M_1 se obtiene:

$$T_1 - M_1 g = M_1 a_1.$$

La fuerza neta sobre M_2 es:

$$-T_2 + M_2 g = M_2 a_2$$

Nota

Tomamos a_1 y a_2 como positivos. Si esto no resulta ser correcto, las ecuaciones nos lo indicarán.

Como la cuerda es inextensible, ambas aceleraciones deben ser iguales $a_1 \equiv a \equiv a_2$.

La fuerza neta sobre la masa M_3 es: $F_{ext}|_y = N_3 - M_3 g = 0$, (no existe aceleración en la dirección del eje y , puesto que el bloque no salta ni tampoco se hunde durante su desplazamiento sobre la mesa).

$$F_{ext}|_x = -T_3 + T_4.$$

b) Calculemos los valores de T_3 y T_4 .

Como la masa de la cuerda es nula $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_3|$, (Figura [VI.13]). La polea sólo cambia la dirección de la fuerza y no su *magnitud*. En cada punto de contacto de la cuerda con la polea se ejerce una fuerza (sobre la cuerda) perpendicular a la superficie de la polea. La suma de todas esas fuerzas da como resultado una fuerza neta R , que es ejercida por la mesa y que cancela exactamente la suma de las dos tensiones T_1 y T_3 .

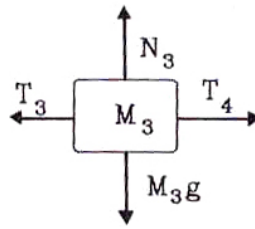


Figura VI.12: Diagrama de cuerpo libre de la masa que representa a la cuerda. Como no existe movimiento en la dirección vertical, la componente de la aceleración en esa dirección es nula.

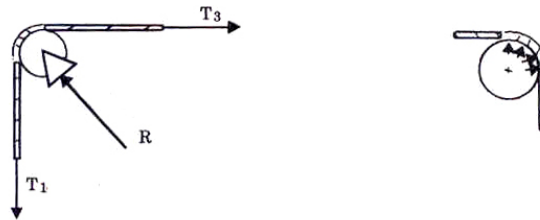


Figura VI.13:

La suma de todas las fuerzas actuando sobre la polea, incluyendo a las tensiones, se debe cancelar exactamente puesto que la polea no rota ni tampoco se acelera.

Los sentidos indicados para T_1 y T_3 son los correctos puesto que una cuerda sólo puede transmitir tensión, como es obvio.

El mismo razonamiento se aplica a la otra polea, de modo que $|\vec{T}_2| = |\vec{T}_4|$.

Reemplazando los valores de las tensiones, tenemos:

$$\text{Fuerza Neta sobre } M_3|_x = T_2 - T_1.$$

Ahora si M_3 se mantiene fija con la mano, la fuerza neta es $M_3 = T_2 - T_1 + F_{\text{mano}} = 0$, y todo el sistema permanece en reposo ($a = 0$). Reemplazando los valores $T_1 = M_1 g$ y $T_2 = M_2 g$ obtenidos en la parte a), tenemos que:

$$\text{Fuerza aplicada por la mano} = (M_1 - M_2) g.$$

c) Si sólo M_1 se mantiene fijo, entonces todo el sistema está en reposo. Resuelvo las ecuaciones de derecha a izquierda. Las ecuaciones de Newton aplicadas a la masa M_2 , dan como resultado: $T_2 = M_2 g$, puesto que M_2 no se mueve.

Como M_3 permanece en reposo, entonces:

$$T_1 - T_2 = 0 \implies T_1 = T_2.$$

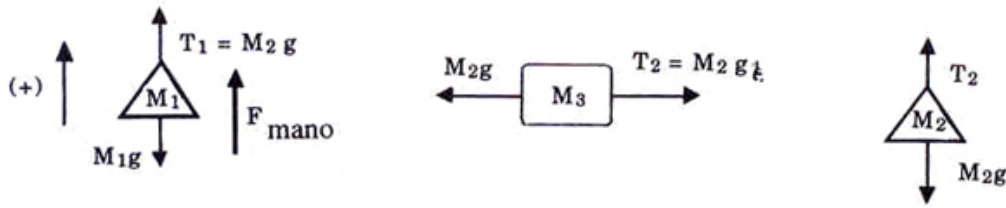


Figura VI.14: Diagrama de fuerzas correspondientes al caso c) para cada una de las masas.

Las fuerzas actuando sobre M_1 , cumplen la siguiente ecuación:

$$T_1 - M_1 g + F_{mano} = 0, \quad \text{pero} \quad T_2 = M_2 g = T_1,$$

entonces, reemplazando en la ecuación anterior, obtenemos el valor de la fuerza ejercida por la mano, que es el mismo resultado obtenido en la parte b), como era de esperar:

$$F_{mano} = -(M_2 - M_1)g.$$

Si $M_2 > M_1 \Rightarrow F_{mano} < 0 \Rightarrow$ Debo tirar la masa M_1 hacia abajo para mantenerla en posición.

d) Veamos ahora los valores que se obtienen si el sistema se mueve libremente. Suponemos que el sistema se desplaza hacia la *derecha* con aceleración a .

$$T_1 - M_1 g = M_1 a.$$

En este caso registramos sólo las ecuaciones en la dirección horizontal, puesto que en la dirección vertical no existe movimiento para M_3 :



Figura VI.15: Diagrama de cuerpo libre para el caso d). Si $M_2 > M_1$, entonces $a > 0$, y el sistema se acelera en el sentido indicado en la Figura. Si $M_2 < M_1$, $a < 0$ y el sistema se mueve en el sentido opuesto.

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= M_3 a, \\ -T_2 + M_2 g &= +M_2 a. \end{aligned}$$

Sumando las 3 ecuaciones obtenemos:

$$-M_1 g + M_2 g = (M_1 + M_2 + M_3) a \implies a = \frac{(M_2 - M_1) g}{M_1 + M_2 + M_3},$$

De la segunda ecuación, se llega a:

$$T_2 - T_1 = \frac{M_3(M_2 - M_1) g}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

Si $M_3 = 0$, entonces $T_2 = T_1 \equiv T$.

Análogamente, si $M_2 = M_1$ entonces $T_1 = T_2$ y además $a = 0$. El sistema permanece en reposo si lo estaba inicialmente. $\square$

Cabe notar que las reacciones denominadas por R que aparecen debido al cambio de dirección que sufre la tensión en las poleas, generan una fuerza neta sobre la mesa.

Ejemplo

¿Cuál es el valor de $\vec{F}_0$ para que M_1 (y por lo tanto M_2) permanezca en reposo con respecto a M ? No existe roce en ninguna superficie. La cuerda es inextensible y no tiene masa.

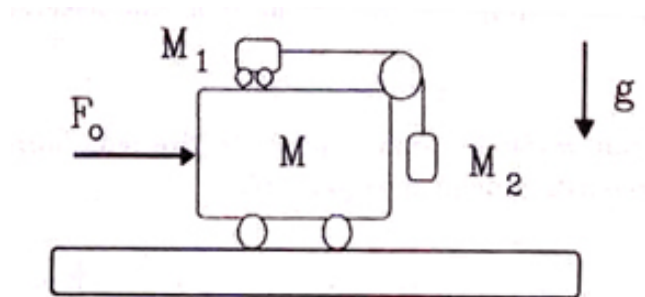


Figura VI.16: En este problema debemos encontrar el valor de la fuerza que le comunica al sistema una aceleración igual a la que experimenta la masa M_1 que va montada sobre el carro. La aceleración de ésta última se debe al peso de M_2 .

Como M_1 sostiene a M_2 , debe sufrir una aceleración generada a través de la tensión de la cuerda que los une. Para que M_1 permanezca en *reposo con respecto a M* el valor de su aceleración debe ser igual al que adquiere M debido a las fuerzas que actúan sobre ella. Estas fuerzas son: la reacción horizontal de M_2 sobre M , la reacción R que se ejerce sobre la polea y que proviene de la tensión de la cuerda y la fuerza externa $\vec{F}_0$.

No podemos ubicarnos en un sistema de referencia que se mueva con M puesto que *no* es un sistema inercial. (En realidad es posible, pero debemos incluir fuerzas no inerciales y no estamos preparados para hacerlo).

A continuación aplicamos las leyes de Newton para resolver el problema.

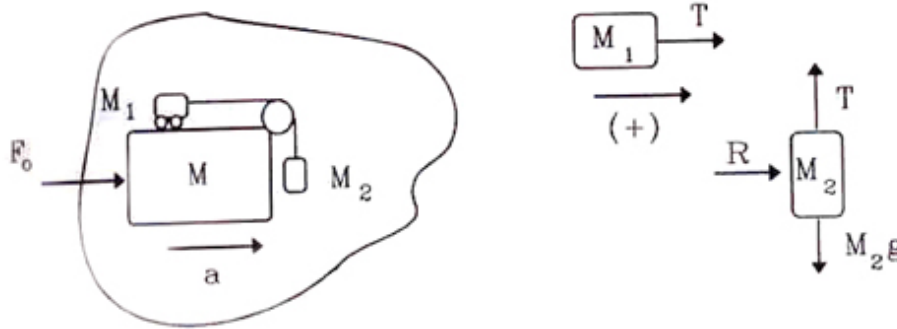


Figura VI.17: Se incluye a la izquierda el diagrama de cuerpo libre de *el sistema considerado como un todo*. A la derecha aparecen los diagramas de cuerpo libre de las masas M_1 y M_2 .

Supongamos que F_0 tiene el valor correcto y que, por tanto, la masa M_1 no se mueve *con respecto a* M . A partir del diagrama de cuerpo libre de M_1 [VI.17] obtenemos para las fuerzas horizontales:

$$M_1 a = T.$$

donde a es la aceleración que adquiere el sistema. De la misma Figura, las fuerzas *verticales* sobre M_2 dan la siguiente ecuación:

$$-T + M_2 g = 0,$$

puesto que M_2 *no cae*, conserva la misma altura con respecto al piso durante todo el movimiento del sistema.

$$\Rightarrow a = \frac{M_2}{M_1} g,$$

pero, debido a que el sistema se mueve como un todo, entonces:

$$F_0 = (M + M_1 + M_2) \cdot a \quad \Rightarrow$$

$$F_0 = (M + M_1 + M_2) \frac{M_2}{M_1} \cdot g.$$

Este resultado parece razonable puesto que si $M_2 = 0$ entonces la fuerza que es necesario aplicar es nula puesto que M_1 no se moverá por sí sola. Si M_2 es mucho mayor que M_1 , entonces para evitar que M_2 se mueva, la fuerza inercial de M_1 ($M_1 a$) debe ser igual a la fuerza que se ejerce sobre M_2 ($M_2 g$) y como M_1 es pequeña, entonces la aceleración a debe tomar un valor muy alto.

Si M_1 se hace igual a cero, no existe ninguna posibilidad de mantener M_2 en reposo con respecto a M puesto que la tensión T se hace cero y no hay forma de equilibrar el peso de M_2 . $\square$

Ejercicio

Encontrar esta misma solución (Figura [VI.17]), analizando el diagrama de cuerpo libre en cada una de las masas.

Indicación: Recuerde incluir la reacción de la polea sobre M . $\square$

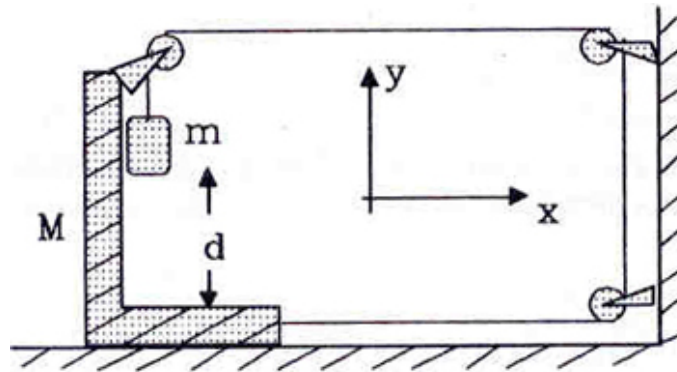


Figura VI.18:

Ejemplo

Las superficies que aparecen en la Figura [VI.18] no generan fuerzas de roce. Si en el instante $t = 0$ se suelta la masa m , calcule cuánto tiempo tarda en chocar con el piso. Los valores para cada una de las variables son: $m = 0,150 \text{ kg}$, $M = 1,650 \text{ kg}$, y la distancia $d = 1 \text{ m}$.

La tensión en el hilo es la misma en el tramo horizontal superior o inferior puesto que el hilo *no* tiene masa y las poleas no ofrecen resistencia al movimiento.

En la parte a) de la Figura [VI.19] se indica el diagrama de cuerpo libre del sistema M y m . Considerando sólo las fuerzas horizontales, deducimos que,

$$T_1 = T_2 \equiv T$$

A continuación obtenemos la ecuación de movimiento para el sistema M y m . Como se mueve en la dirección positiva del eje x , la masa m se desliza cayendo sobre M pero siempre pegada a M , tal como lo indica la Figura. De esta forma $a_x^m = a_x^M \equiv a_x$.

Con el diagrama de cuerpo libre de la parte a) de la Figura, considerando sólo las fuerzas en la dirección x , se obtiene:

$$2T = (M + m)a_x.$$

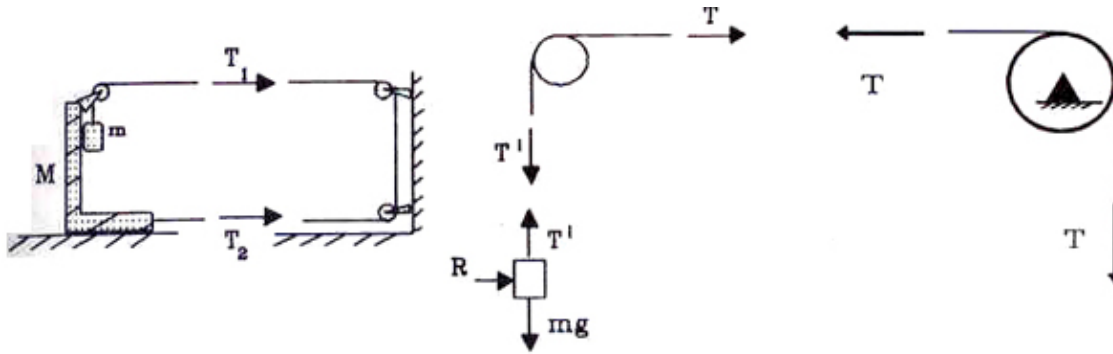


Figura VI.19: Aquí se incluye el sistema original y los diagramas de cuerpo libre de la masa M y m . La Figura muestra que si la masa M avanza, digamos 1 cm hacia la derecha, la distancia que recorre el hilo entre la masa M y la pared se acorta en 2 cm y, en consecuencia, la masa m baja 2 cm.

Tenemos una ecuación y dos incógnitas: a_x y T . Necesitamos más información.

Examinando el movimiento de la masa m en la dirección y , a partir del diagrama de cuerpo libre de la parte b) de la Figura [VI.19], obtenemos:

$$+T' - mg = ma_y. \quad (a_y^m \equiv a_y).$$

La aceleración de m es la única que tiene una componente adicional en la dirección y .

No hemos progresado mucho porque sumamos una ecuación a la anterior pero, aparecieron dos incógnitas: T' y a_y .

De la Figura se desprende que si en un intervalo Δt s, M avanza hacia la derecha Δx , metros, m cae, en el mismo intervalo, *dos veces esa cantidad* $2\Delta x$. Por lo tanto, *en cada instante, la componente vertical de la velocidad de m , es el doble de la componente horizontal de la velocidad de M , si la cuerda permanece en tensión.*

Concluimos que la aceleración de m debe ser el doble de la de M en todo instante. Para confirmar este resultado, basta examinar la definición de la aceleración:

$$a = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \quad a' = \frac{2v(t + \Delta t) - 2v(t)}{\Delta t} \implies a' = 2a.$$

En nuestro caso, este resultado se traduce en la siguiente ecuación:

$$a_y = 2a_x.$$

Con este resultado, tenemos tres ecuaciones y cuatro incógnitas. Aún nos falta una ecuación.

Relacionaremos T' con T . Por las mismas razones explicadas anteriormente (esencialmente el hecho que la cuerda no tenga masa y que las poleas no tengan roce),

$$T' = T.$$

Con esta ecuación tenemos cuatro incógnitas para cuatro ecuaciones y podemos resolver el problema. Como las ecuaciones no son complicadas no detallamos los pasos intermedios (**Ejercicio**). La respuesta es:

$$a_y = \frac{4 m g}{M + 5 m}.$$

A partir de esta ecuación podemos obtener el resto sin dificultades.

Para calcular cuánto demora en caer la masa m , se usa la fórmula de cinemática, válida para aceleraciones constantes, indicada a continuación:

$$y = y_o + v_o t + \frac{1}{2} a_y t^2.$$

Introduciendo los datos numéricos en la ecuación, obtenemos $t = 0,9 \text{ s}$. □

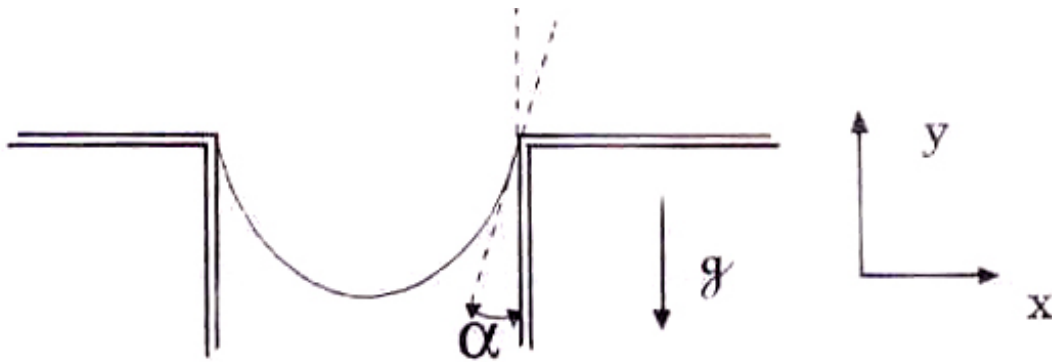


Figura VI.20: La cuerda está sostenida de sus extremos. Como es absolutamente flexible (se puede doblar sin ninguna dificultad), la forma que adopta depende de su longitud y del espacio que separa ambas paredes.

Ejemplo

La Figura [VI.20] muestra una cuerda de largo ℓ y de masa μ por unidad de largo, que cuelga entre dos paredes. La cuerda forma un ángulo α en el punto que toca a las paredes.

- Encuentre el valor de la fuerza que se debe ejercer sobre cada uno de sus extremos para sostenerla.
- Encuentre el valor de la tensión de la cuerda en su punto más bajo.

Por la simetría del problema, la fuerza necesaria para sostener la cuerda debe ser la misma en ambos extremos. Basta pensar que no hay forma de distinguir un extremo del otro.

Debido a su extrema flexibilidad, la cuerda transmite sólo tensiones en la dirección de su tangente en cada punto.

Estos dos puntos serán usados en la resolución de este ejemplo y son, además, de aplicación general.

a) Para encontrar la fuerza sobre los extremos usamos un diagrama de cuerpo libre que incluya a toda la cuerda y reemplazamos las paredes por las fuerzas necesarias para sostenerla.

El peso total de la cuerda es $W = -\mu \ell g$ y apunta en sentido negativo (ver Figura).

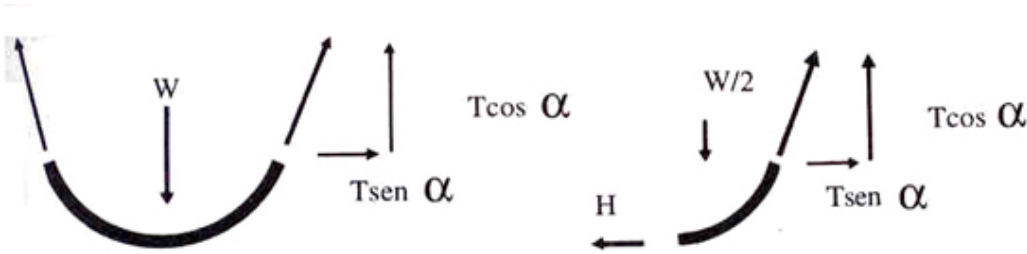


Figura VI.21:

Como la fuerza en el extremo superior se alinea con la dirección de la tangente a la cuerda, tiene una proyección vertical $T_y = T \cos \alpha$ y una componente horizontal $T_x = T \sin \alpha$.

Ya que el sistema permanece en reposo, no tiene velocidad ni aceleración, por lo tanto la suma de las fuerzas externas debe anularse, en cada una de las direcciones:

$$\text{En el eje x:} \quad T \sin \alpha - T \sin \alpha = 0,$$

$$\text{En el eje y:} \quad T \cos \alpha + T \cos \alpha - W = 0.$$

Sólo la última ecuación nos informa acerca del valor de la tensión en el extremo de la cuerda. La primera se cancela automáticamente debido a la simetría del problema.

Obtenemos para T , la siguiente expresión:

$$T = \frac{W}{2 \cos \alpha} = \frac{\mu \ell g}{2 \cos \alpha}.$$

Este resultado es razonable y coincide con lo esperado en casos particulares más simples: si $\alpha = 0$, las dos paredes están casi juntas y existen sólo componentes verticales. Cada extremo soporta la mitad del peso de la cuerda. Si $\alpha = \pi/2$, la fuerza necesaria para sostener la cuerda debido a su peso es infinita, sin importar el valor de su masa total. Este resultado nos señala que por pequeña que sea la fuerza aplicada sobre la cuerda (o, como en este caso, el efecto de su propio peso), para sostenerla, la cuerda debe deformarse.

b) Para calcular la tensión en el *punto más bajo* de la cuerda, debemos usar un diagrama de cuerpo libre que incluya explícitamente esa fuerza.

Tomemos la mitad derecha de la cuerda (ver Figura), y designemos la tensión en el punto más bajo como H (tangente a la cuerda). Ayudándonos de la geometría, podemos deducir que la fuerza en ese punto es horizontal: si no lo fuera uno de sus puntos vecinos estaría más bajo, contradiciendo la hipótesis inicial.

Aplicando nuevamente el equilibrio de fuerzas y recordando que debemos incluir el peso de la mitad de la cuerda: $W/2$, tenemos:

$$\text{En el eje } x: \quad -H + T \sen \alpha = 0, \implies H = T \sen \alpha,$$

$$\text{En el eje } y: \quad T \cos \alpha - W/2 = 0.$$

La segunda ecuación se cumple automáticamente al reemplazar los valores obtenidos anteriormente.

Introduciendo el valor de T en la primera ecuación, obtenemos el resultado buscado:

$$H = \frac{\mu \ell g}{2} \tan \alpha.$$

Al igual que en la parte a), si $\alpha \rightarrow \pi/2$, o sea, a medida que se intenta formar una línea recta con la cuerda, la tensión tiende a ∞ . Por otra parte, si las paredes se acercan, la tensión en el punto más bajo disminuye tendiendo a cero con $\alpha = 0$. $\square$

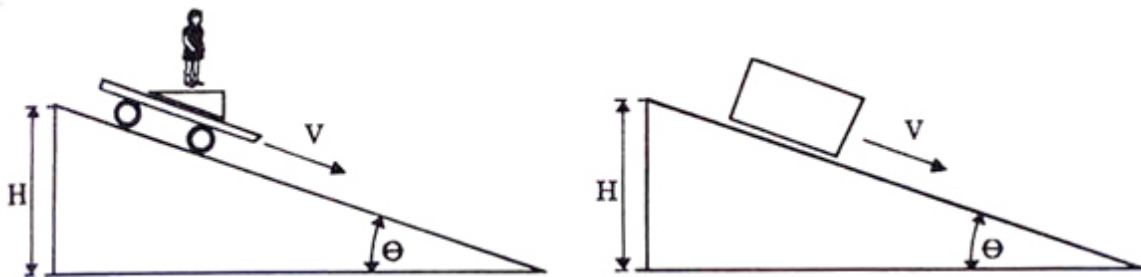


Figura VI.22: La niña se desliza por la pendiente. En la parte a) del problema podemos pensar en un bloque deslizándose. En el punto siguiente, lo imaginamos como dos bloques cayendo juntos y nos preocupamos de la fuerza de reacción del bloque inferior sobre el superior.

Ejemplo

Una niña se desliza por un plano inclinado sobre un carrito, tal como se observa en la Figura [VI.22]. Si el ángulo del plano inclinado con la horizontal es θ , y la niña, que tiene masa M , parte del reposo desde una altura h , calcule:

- a) Cuánto se demora en llegar al piso.

b) Suponga que en el carro va una balanza y la niña se desliza parada sobre ella, ¿cuál es la lectura de la balanza?

a) Para encontrar el tiempo que tarda la niña en llegar al piso, debemos calcular la componente de la fuerza que apunta en la dirección paralela al piso de la cuña, con el valor de esta fuerza podemos encontrar la aceleración a través de la segunda ley de Newton. A continuación, con las ecuaciones de la cinemática, calculamos el tiempo que tarda en llegar al piso.

El hecho de identificar uno de los cuerpos como una niña es simplemente para relacionarlo con una situación real. Las leyes de Newton consideran a todos los cuerpos como masas puntuales *sin dimensiones espaciales*. Por esta razón, cuando utilizamos la segunda ley de Newton, trasladamos todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a un sólo punto. Más tarde, al incorporar el torque a nuestro análisis, aparecen más ecuaciones –que se suman a las anteriores–, y en ellas debemos especificar el lugar donde actúan las fuerzas.

Para calcular la aceleración del bloque, lo incluyo dentro del diagrama de cuerpo libre. En este caso conviene proyectar las fuerzas sobre un sistema de referencia donde el eje- x se alinea con la dirección del plano inclinado y el eje- y , en la dirección perpendicular a él. Esta elección de ejes coordenados nos facilita los cálculos.

Al sacar la cuña, la reemplazamos por una fuerza de contacto R , que apunta en la dirección del eje- y . Esta reacción no presenta componentes en la dirección x , porque hemos supuesto que el roce entre el bloque y el piso es despreciable. El peso de la niña (o el bloque) debe proyectarse sobre estos ejes coordenados (Figura [VI.23]). El resultado es:

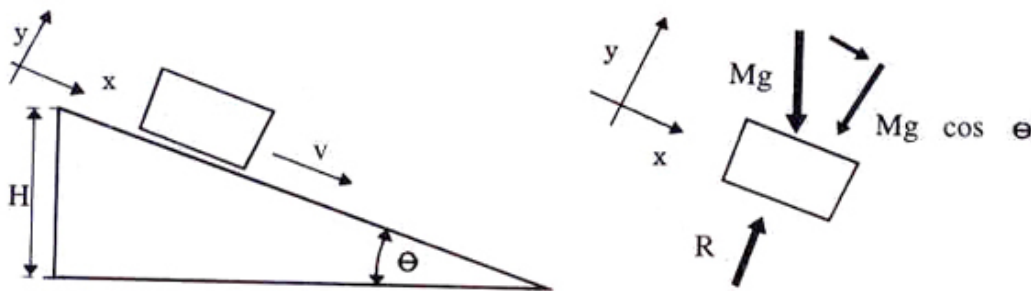


Figura VI.23:

$$\text{En el eje-}y \quad M g \cos \theta - R = 0, \quad a_y = 0,$$

$$\text{En el eje-}x \quad M g \sin \theta = M a_x.$$

El origen de cada una de estas ecuaciones es el siguiente: en la dirección y de la Figura, el bloque

no cambia de velocidad, por lo tanto la componente a_y de la aceleración es nula, y la ecuación se reduce a la suma de las fuerzas externas en esa dirección.

Para los cálculos en la dirección x no debemos olvidar que a_x no es nula y que la única fuerza que tiene proyección en esa dirección es Mg .

De la última ecuación obtenemos la aceleración:

$$a_x = g \sen \theta.$$

(Note que la aceleración es independiente de la masa del cuerpo que resbala. Todos caen con la misma aceleración si no existe roce.)

A partir de esta aceleración podemos encontrar el tiempo que tarda en alcanzar el borde inferior de la cuña:

$$\text{Como } x = \frac{1}{2} a_x t^2, \quad y \quad d = \frac{h}{\sen \theta}, \quad \text{pero, } d = \frac{1}{2} g \sen \theta T^2, \quad \text{obtenemos:}$$

$$T = \sqrt{\left[\frac{2h}{g \sen^2 \theta} \right]}.$$

La expresión a la derecha de T tiene dimensiones de tiempo, como debe ser. Por otra parte, de esta fórmula deducimos que si $\theta = \pi/2$, la aceleración $a_x = g$, conforme a lo que esperábamos, puesto que $\theta = 90^\circ$, corresponde al caso de caída libre.

Ahora si $\theta = 0^\circ$, el tiempo que demora es infinito debido a la ausencia de pendiente en la cuña.

b) Calculamos ahora el peso que marcaría una balanza puesta en la cuña que se ubica inmediatamente debajo de la niña (Figura [VI.22]). Precisemos también a qué cantidad física corresponde la lectura de la balanza: *lo que mide la balanza es la reacción del bloque inferior sobre la niña.*

Por el principio de acción y reacción, esta reacción es la misma fuerza (pero con sentido opuesto) con la cual la niña presiona al bloque inferior, es decir lo que denominamos el peso.

Para calcular esta fuerza tomamos un sistema de referencia con un eje vertical y el otro horizontal. Este cambio de sistema con respecto al punto anterior obedece a que necesitamos calcular una aceleración vertical, por tanto usamos un sistema de referencia en el cual uno de sus ejes coincida con esa dirección.

Escogemos como nuestro objeto de estudio la niña y construimos su diagrama de cuerpo libre (Figura [VI.24]). En este caso nos interesan únicamente las fuerzas verticales, puesto que en esa dirección actúa la reacción del bloque inferior:

$$R - Mg = -Ma,$$

la aceleración a que aparece en la ecuación, es la proyección de a_x , en la dirección vertical: la única aceleración distinta de cero obtenida en la pregunta anterior. Su proyección es $a_x \sen \theta$.

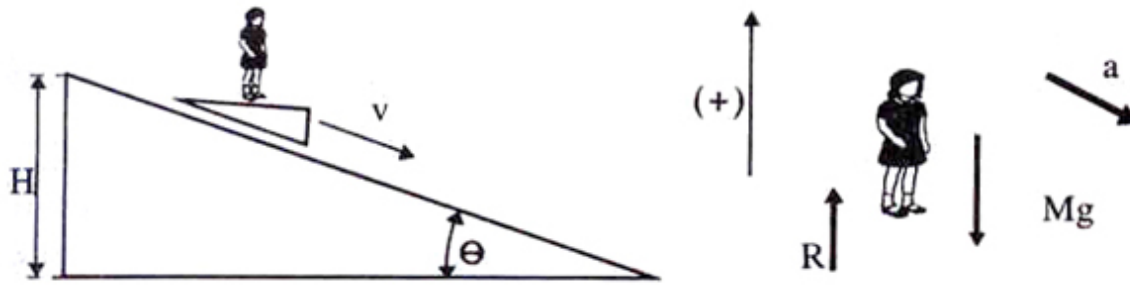


Figura VI.24:

Reemplazando a por este valor y despejando R , obtenemos:

$$R = M g [1 - \sin^2 \theta] = M g \cos^2 \theta.$$

Si $\theta = 0$, entonces $R = M g$, como era de esperar, puesto que la cuña se transforma en una placa paralela al piso.

Si $\theta = \pi/2$, entonces $R = 0$, debido a que ambos, el bloque y la niña están en caída libre y no hay reacción de uno sobre el otro. $\square$

VI.6. EJERCICIOS

1.- Un objeto se encuentra sobre un plano liso, sin roce y es sometido a una fuerza $\vec{F}$ que varía en función del tiempo de acuerdo al gráfico que se acompaña. Si la masa del objeto es m , obtenga:

- Aceleración del objeto en función del tiempo. (Graficar).
- Velocidad de esta masa, si parte inicialmente del reposo (Graficar).
- Posición del objeto en función del tiempo, si parte del origen.

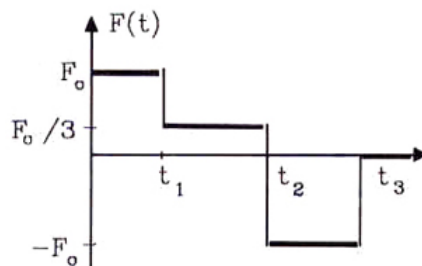
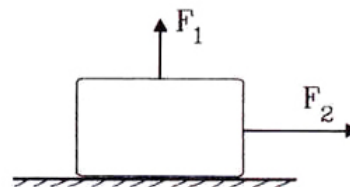


Figura VI.25: Problema # 1



Problema # 2

- 2.- Sobre un plano sin roce se encuentra un objeto de masa $m = 2 \text{ kg}$. Sobre él actúan dos fuerzas $F_1 = 3 \text{ N}$ y $F_2 = 6 \text{ N}$ como muestra la Figura. Encuentre:
- El vector aceleración del objeto.
 - Dirección, sentido y magnitud de su velocidad en función del tiempo, si parte del origen.
- 3.- Un bloque de masa m se suelta a partir del reposo sobre un plano inclinado sin roce.
- Encuentre la aceleración del objeto.
 - Analice todas las fuerzas que actúan sobre él, indicando su valor.
- 4.- Sobre una superficie lisa se pretende tirar el carrito de masa m que se muestra en la Figura, de modo que no se despegue del suelo.
- Para las dos situaciones señaladas en la Figura, obtenga el valor de las fuerzas que actúan sobre el carro y compare el resultado.

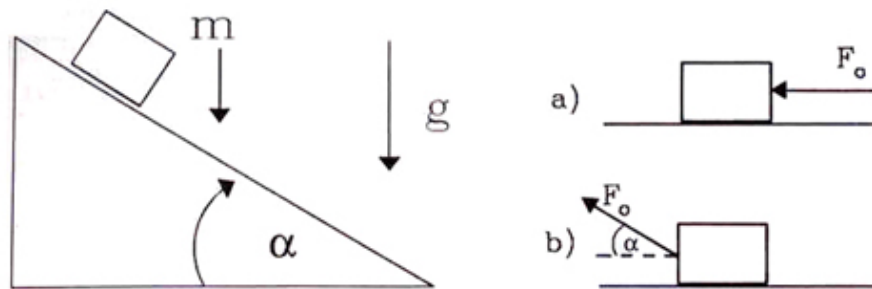


Figura VI.26:

- 5.- Una locomotora de masa M , que arrastra un carro de masa m y se autopropulsa con una fuerza F_o , avanza por un plano inclinado con pendiente α .
- Calcule:
- La aceleración del sistema.
 - Las fuerzas que actúan sobre la locomotora y el vagón.
 - La tensión de la barra que une ambos objetos.
- 6.- Un pintor que pesa 900 Newton trabaja en una silla colgante en un edificio de altura. Al terminar su turno debe volver al último piso para bajar a la calle. Para subir con la silla tira de la cuerda de tal forma que la fuerza que él ejerce sobre el asiento de la silla es de 500 Newton. La silla misma pesa 300 Newton.
- ¿Cuál es la aceleración del pintor y la silla?

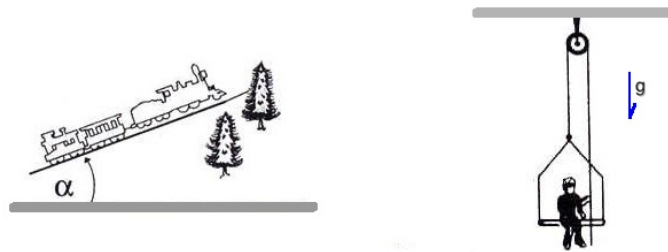
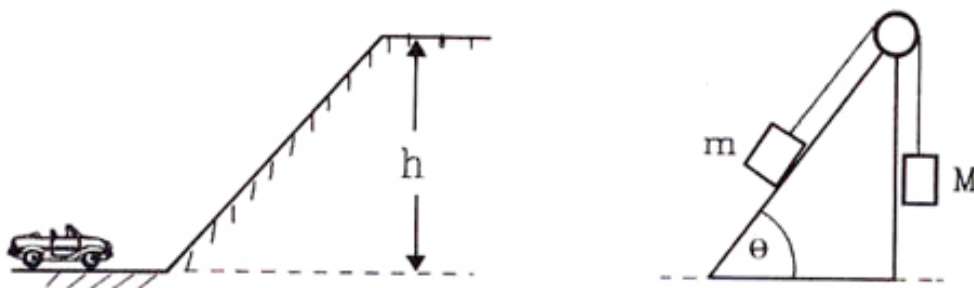


Figura VI.27:

- b.- ¿Cuál es la fuerza total sobre el soporte de la polea?
- 7.- Una pelota de 2 kg cae libremente y en un cierto instante tiene una rapidez de 6 [m/s]
- a.- ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5[m]?
- b.- ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5[s]?
- 8.- Suponga que N masas iguales de m (kg) cada una, cuelgan unidas mediante una cuerda. Determine la tensión de la cuerda ideal (sin masa) que une el cuerpo k -ésimo con el $(k - 1)$ -ésimo. Verifique su resultado para $N = 2$.
- 9.- Un auto se aproxima a una pendiente con una velocidad V_0 . Justo al comenzar la pendiente, el auto prosigue sólo con el impulso inicial. Suponiendo que el roce con el camino y el viento es despreciable, encuentre la altura máxima h que logrará alcanzar con esta velocidad.



- 10.- Dos bloques de masa m y M están unidos por una cuerda y una polea ideales. Cuando se colocan en la posición indicada en la Figura (m sobre el plano inclinado, liso y M colgando verticalmente), el cuerpo de masa m , sube con una aceleración cuya magnitud es $29/5$ [m/s²]. Si a continuación se invierten las posiciones: (M se coloca sobre el plano y m cuelga verticalmente) el cuerpo de masa M también sube pero esta vez con una aceleración cuya magnitud es $9/10$ [m/s²]. Determine:

- a.- El valor del ángulo θ .

b.- La razón entre las masas: m/M .

c.- Calcule el valor de las tensiones en cada uno de los dos casos y compárelos.

- 11.- Considere el sistema de dos bloques de la figura. Ambos tienen la misma masa M y el ángulo de inclinación de las caras en contacto es $\alpha < \pi/2$. El roce es despreciable en todas las superficies expuestas.

a.- Dibuje el diagrama de cuerpo libre de ambos bloques y el correspondiente a cada uno de ellos y escriba las ecuaciones de movimiento que se desprenden de estos diagramas.

b.- Calcule el máximo valor que puede adoptar la fuerza F_o que se aplica sobre el cubo de la derecha in que el cubo situado a su izquierda esté a punto de levantarse del piso.

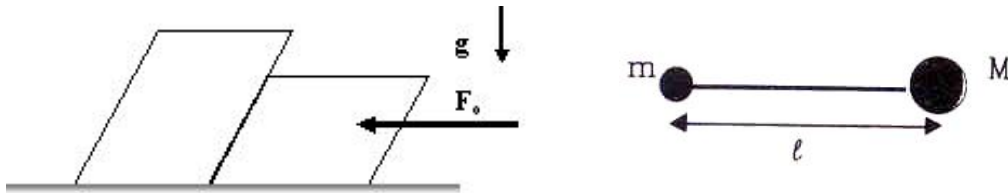


Figura VI.28:

- 12.- Dos masas m y M se encuentran unidas por una barra de masa despreciable y largo ℓ . En estas condiciones ambas realizan un movimiento circular uniforme, en torno a un eje perpendicular al plano de las masas, con frecuencia f . El eje se ubica en un punto que definimos como el centro de masa del sistema y es tal que se cumple $Mx = my$, donde x y y representan la distancia del eje a la masa M y m respectivamente.

Calcule la tensión en la barra que une ambas masas.

- 13.- VI.29 En el diagrama de la figura los bloques relevantes no tienen roce. La polea que une las masas M_1 y M_2 mediante un hilo, tiene masa despreciable. El eje de esta polea está conectado a la masa M mediante un hilo sin masa.

a.- Dibujar el diagrama de cuerpo libre asociado a M , la polea, la masa M_1 y M_2 .

b.- Encuentre la aceleración de M_2 , si $M_1 = \infty$ (o adquiere un valor muy alto).

c.- ¿Cuál es la aceleración de la masa M si $M_1 = M_2 = m$?

d.- Existe movimiento relativo entre estas dos masas si son iguales? ¿Cómo puede probarlo?

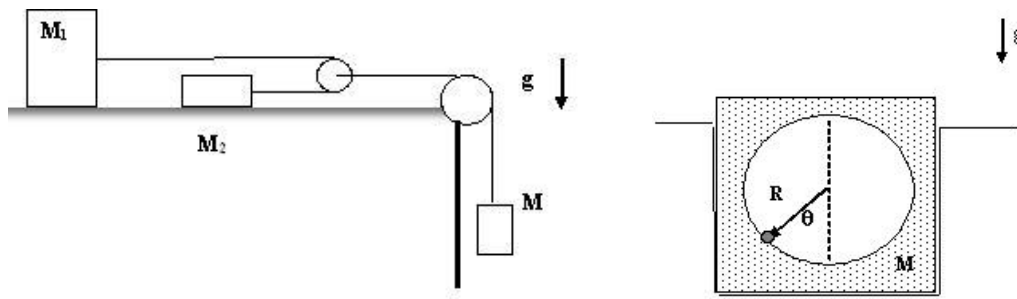
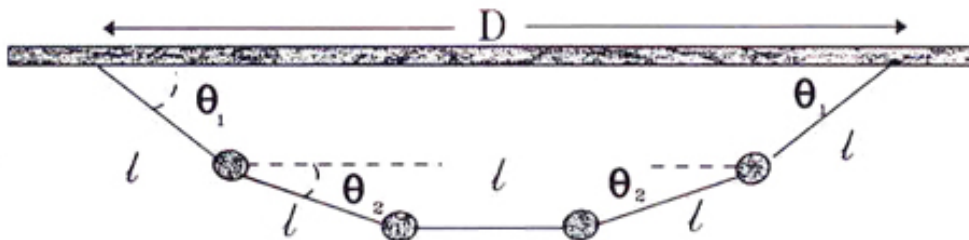
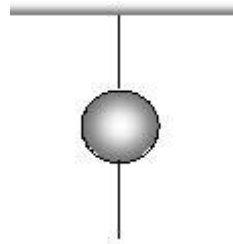
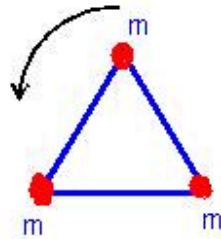


Figura VI.29: DCL para dos poleas y tres masas. La reacción sobre el piso debido al movimiento circular.

- 14.- Un cubo de masa M presenta una cavidad cilíndrica de radio R centrada en su interior. Alrededor del eje del cilindro gira una masa m con velocidad angular constante ω_0 .
- Encuentre la reacción del piso sobre el bloque en función del tiempo.
 - Suponga que el bloque M se encuentra sobre un piso plano (sin paredes que lo mantengan fijo). Encuentre el valor del coeficiente de roce estático μ_{est} para mantener el bloque M fijo.
- 15.- Una cuerda sin masa cuelga sostenida desde sus extremos separados por una distancia D . A esta cuerda se le añaden cuatro masas iguales m , a una distancia ℓ entre ellas. La cuerda forma un ángulo θ_1 en los extremos y, entre las dos masas centrales, permanece horizontal, formando un ángulo θ_2 con sus vecinos. Calcule la tensión en cada tramo de la cuerda, en función de θ_1 , m y g . Encuentre el valor del ángulo θ_2 .



- 16.- Considere tres cuerdas idénticas de largo L , inextensibles y de masa despreciable. A los extremos de estas cuerdas se unen tres masas (m) idénticas formando un circuito cerrado. El sistema se ubica sobre una superficie plana sin roce y, de alguna forma ingeniosa, se hacen girar sobre ella hasta alcanzar una velocidad angular constante ω_0 . Encuentre la tensión que se ejerce en cada uno de las cuerdas. Por simetría, la figura de las tres masas rotando debe ser la de un triángulo equilátero.



17.– Una bola pesada está suspendida por un hilo, como muestra la figura. Un tirón rápido en el hilo inferior cortará ese mismo hilo. Si se aumenta la tensión lenta y sostenidamente sobre el hilo inferior, se cortará el hilo superior. El primer resultado ocurre debido a :

a) La fuerza es muy pequeña para mover la bola. b) Acción y reacción. c) La bola tiene inercia. d) La fricción del aire mantiene la bola atrás. e) La bola tiene mucha energía.

18.– La aceleración apunta siempre en la dirección:

a.- Del desplazamiento. b.- De la velocidad inicial. c.- De la velocidad final. d.- De la fuerza neta. e.- Opuesta a la fuerza de fricción.

19.– En el juego de tirar la cuerda, dos hombres la tiran cada uno con una fuerza de 100 N en sentidos opuestos. La tensión en la cuerda es de :

a) 100 N. b) 200 N. c) Cero. d) 50 N. e) $100 * \sqrt{2}$ N



20.– Un actor de circo cuyo peso es W , camina a lo largo de un alambre en altura como muestra la figura. La tensión en el alambre es :

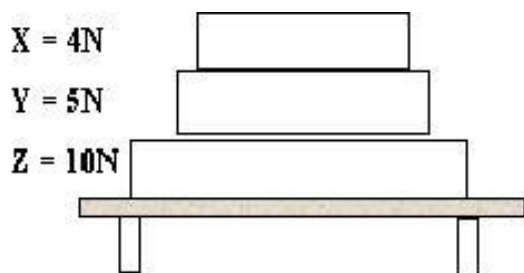
a) Aproximadamente W . b) Aproximadamente $W/2$. c) Mucho menos que W . d) Mucho más que W . e) Depende: si se sostiene en uno de sus pies o en ambos.

21.– Un ascensor de 700 Kg acelera hacia abajo a 3 m/s^2 . La fuerza ejercida por el cable sobre el ascensor es (Definimos $1kN = 1000 \text{ newton}$)

a) 2.1 kN , hacia arriba. b) $2,1\text{ kN}$, hacia abajo. c) $4,8\text{ kN}$, hacia arriba. d) $4,8\text{ kN}$, hacia abajo. e) 9 kN , hacia arriba.

22.– Un bloque de concreto de 5 Kg se baja con una aceleración de 2.8 m/s^2 por medio de una cuerda. La fuerza del bloque sobre la cuerda es:

a) 14 N , hacia arriba. b) 14 N , hacia abajo. c) 35 N , hacia arriba. d) 35 N , hacia abajo. e) 49 N , hacia arriba.



23.– Tres libros (X , Y y Z) descansan sobre una mesa. El peso de cada libro se indica en la figura. La fuerza del libro Z sobre el libro Y es :

a) 0 . b) 5 N . c) 9 N . d) 14 N . e) 19 N .

24.– Si sobre un cuerpo actúa una sola fuerza: ¿Podría tener aceleración nula? ¿Puede ser la velocidad nula en un cierto instante?

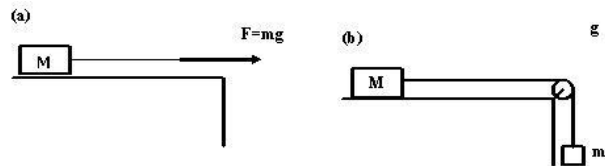
25.– ¿Por qué es preciso empujar con más fuerza el pedal de una bicicleta al comienzo del movimiento que en el instante que ya lo está y además con una rapidez constante?

26.– Un camión transporta pájaros vivos encerrados en un contenedor (con ventilación, agua y vista al mar, pero sin posibilidad de abandonar la caja!). Al llegar a un puente, el conductor se percató que lleva más carga de la que soporta el puente. Para cruzarlo y no caer a las frías y revueltas aguas que se aprecian bajo el puente, decide hacerlo utilizando cambios muy bruscos de velocidad (tirones) para así mantener los pájaros volando dentro del contenedor y disminuir el peso. ¿Cuál es, a su parecer, el destino de este camión: llega o no a salvo al otro extremo del puente?

27.– Un camión muy pesado y un auto pequeño chocan de frente. En cualquier instante durante el choque, cuando ambos están en contacto: ¿Cuál de ellos experimenta la mayor fuerza? ¿Y cuál de ellos la mayor aceleración?

28.– Se afirma que un objeto cayendo libremente en el aire, alcanza una velocidad terminal constante debido a la resistencia o viscosidad del aire.

Opina Ud. que una gota de lluvia tiene menor velocidad en la azotea de un edificio de 10 pisos que al llegar a la calle. En otras palabras que a 10 pisos de altura ya alcanzó su velocidad terminal. Explique si está de acuerdo o no con esta afirmación y esgrima un argumento basado en principios físicos en su defensa.



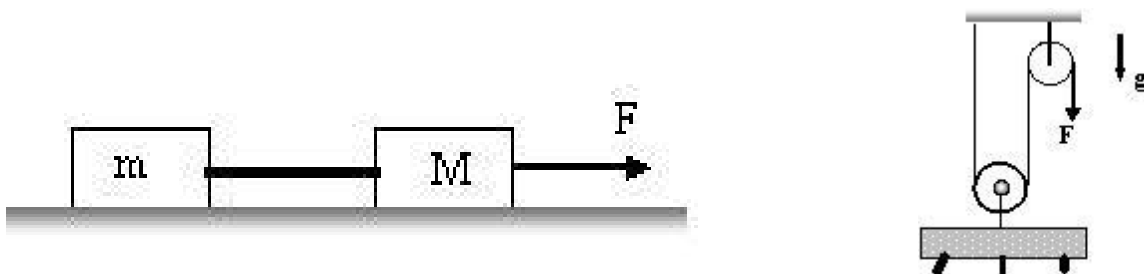
29.– Dos bloques idénticos de masa M se colocan sobre una superficie horizontal pulida. Uno de ellos es tirado horizontalmente mediante una cuerda en cuyo extremo libre se aplica una fuerza de magnitud $\vec{F} = m g$ (Figura a). El otro bloque también se tira horizontalmente mediante una cuerda, pero en su extremo libre cuelga una esfera de masa m (Figura b). Determine la aceleración de cada bloque y compárelos.

30.– Sobre un carro de masa M , se aplica una fuerza $\vec{F}$. Se le une, a través de una barra muy liviana, un carro de masa m . Si el conjunto se mueve sobre un plano con roce despreciable, determine:

a.- La aceleración del sistema debido a la fuerza $\vec{F}$.

b.- Las fuerzas que actúan sobre las masas M y m y la tensión de la barra que las une.

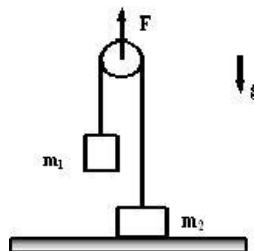
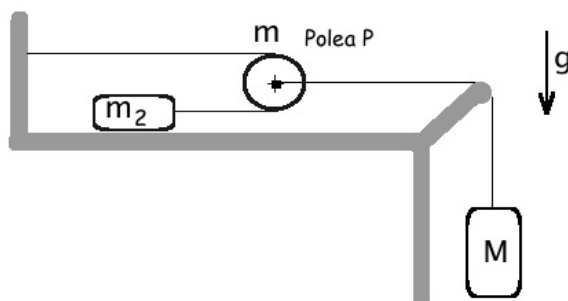
c.- Suponga ahora que la fuerza se aplica al carro de masa m , ¿Cuál es el valor de la tensión de la barra en este caso? ¿Hay una diferencia de signo con el caso anterior?



31.– Una persona está subiendo lentamente un piano desde la calle hasta el tercer piso de un edificio de departamentos. Con este objeto usa un sistema de dos poleas y una cuerda que se grafica en la figura. Si el peso del piano es de W , ¿Cuál es la fuerza que debe ejercer para subirlo?

32.- En el diagrama de la figura se pide:

- Dibuje el diagrama de cuerpo libre asociado a: la masa M , la polea P y la masa m_2
- ¿Cuál es la relación entre la aceleración de la masa m_2 y la masa M ?
- Encuentre la aceleración de M .
- Encuentre la tensión en las cuerdas.



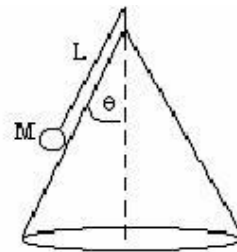
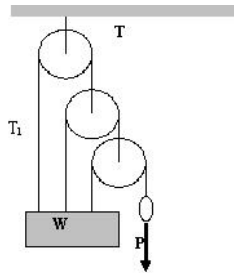
33.- Una fuerza $\vec{F}$ se ejerce directamente hacia arriba sobre el eje de una polea de masa despreciable al igual que el cable que une las masas. Dos objetos, de masas $m_1 = 1,2 \text{ kg}$ y $m_2 = 1,9 \text{ kg}$, están unidos a los dos extremos del cable que pasa sobre la polea. El objeto m_2 está en contacto con el piso.

- ¿Cuál es el máximo valor que puede adquirir la fuerza $\vec{F}$, de modo que m_2 permanezca en reposo sobre el piso?
- ¿Cuál es la tensión en el cable cuando la fuerza $\vec{F}$ hacia arriba sea de 110 N ? ¿Cuál es la aceleración de m_1 ?

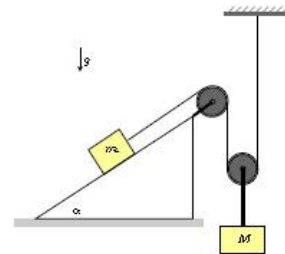
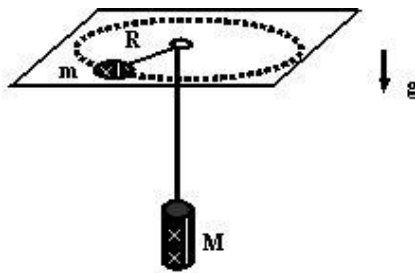
34.- Un bloque, de masa m , se desliza hacia abajo en un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo α con el piso de un ascensor. Determine su aceleración con relación al plano en los casos siguientes.

- El elevador desciende a velocidad constante V .
- El elevador asciende a velocidad constante V .
- El elevador desciende con una aceleración a_0 .
- El elevador asciende con una aceleración a_0 .
- El cable del elevador se rompe!

35.- En el sistema de poleas de la figura, se pide determinar la tensión de la cuerda que sostiene el conjunto que denominamos T . El peso del bloque es W , y se aplica una fuerza $\vec{P}$ en el extremo de la cuerda más corta para mantener el sistema en equilibrio. Las poleas no tienen masa. Encuentre el valor de la tensión en cada una de las cuerdas.

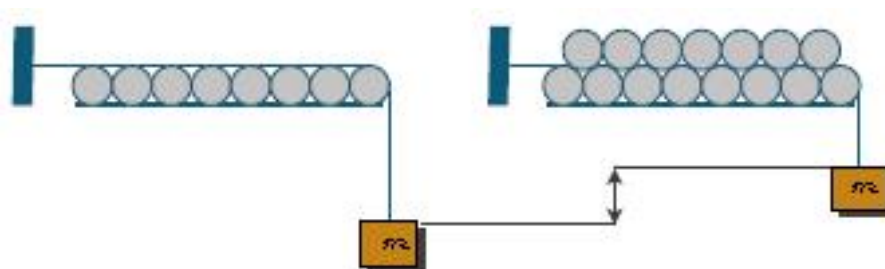


- 36.- Una esfera de masa M gira sobre la superficie de un cono sin roce con velocidad angular $\omega = \omega_o = \text{cte}$. Esta esfera está unida al vértice del cono a través de una cuerda de largo L .
- Calcular la tensión T de la cuerda y la reacción N del cono sobre la esfera.
 - Calcular el valor máximo de la velocidad angular ω_o para que la esferita no se despegue del manto del cono.
- 37.- Considere un disco de masa m sobre una mesa, atado a un cilindro de masa M que cuelga del otro extremo por medio de una cuerda que pasa por un orificio (sin roce) de la mesa. Encuentre la velocidad con que debe moverse el disco en un círculo de radio R para que el cilindro permanezca en reposo.



- 38.- Un bloque de masa M está sostenido por una cuerda ideal que cuelga del eje de una polea de masa despreciable. Al bajar, este bloque arrastra el bloque de masa m , el cual sube por un plano inclinado fijo al piso. Este plano no tiene roce.
- Encuentre el valor crítico que debe tener M para que el sistema permanezca en equilibrio (no exista aceleración).
 - Suponga que $M > M_{\text{crítico}}$, el valor calculado en la sección previa. Encuentre la aceleración de ambos bloques y la tensión de la cuerda para este caso. ¿Qué sucede si $\alpha = \pi/2$? ¿Y

si $\alpha = 0$?



39.– Considere una cuerda que pasa sobre un conjunto de N cilindros ubicados paralelamente uno al otro. La cuerda los atraviesa por encima de ellos y en dirección perpendicular al eje. Desde el extremo de esta cuerda cuelga una masa M .

¿Cuál debe ser el valor mínimo de la masa del cilindro que se deposita sobre los anteriores, para que su peso logre levantar la masa M el máximo posible?

Problema Resuelto

Dos bloques de masa m y M están unidos por una cuerda y una polea ideales. Cuando se colocan en la posición indicada en la Figura (m sobre el plano inclinado, liso y M colgando verticalmente), el cuerpo de masa m , sube con una aceleración cuya magnitud es $29/5 \text{ [m/s}^2\text{]}$.

Si a continuación se invierten las posiciones: (M se coloca sobre el plano y m cuelga verticalmente) el cuerpo de masa M también sube pero esta vez con una aceleración cuya magnitud es $9/10 \text{ [m/s}^2\text{]}$. Determine:

- El valor del ángulo θ .
- La razón entre las masas: m/M .
- Calcule el valor de las tensiones en cada uno de los dos casos y compárelos.

Este es un problema propuesto en la guía y lo resolveremos porque es diferente a lo que usualmente se pregunta en los problemas relacionados con poleas.

Solución

DATOS: Conocemos dos aceleraciones a_1 , a_2 y la aceleración de gravedad g .

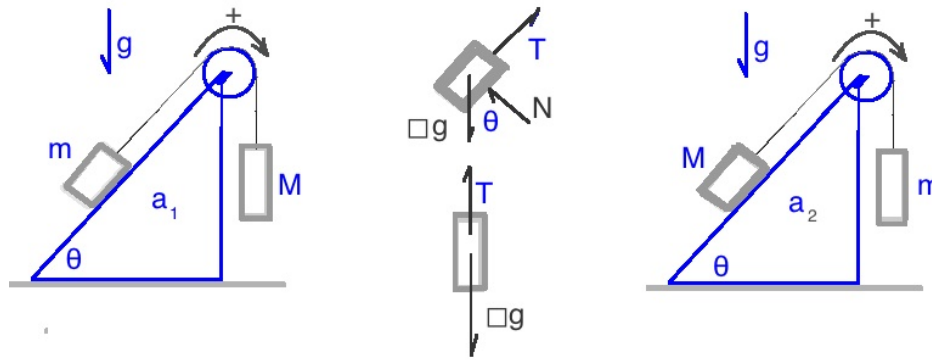


Figura VI.30: Se muestran las dos configuraciones definidas y los diagramas de cuerpo libre de las masas $\mathbf{m}$ y $\mathbf{M}$. En los cuadrados incluidos al lado de g , se debe incluir la masa relevante al caso 1 o al caso 2.

Debemos calcular el ángulo θ y la razón entre las masas $\frac{m}{M} \equiv \lambda$

Para cada una de las aceleraciones a_1 y a_2 , dibujamos los DCL de $\mathbf{m}$ y $\mathbf{M}$ (ver figura) y los denominamos **Caso 1** y **Caso 2**. Obtenemos un par de ecuaciones de Newton para cada caso.

Caso 1: El sistema de masas se desplaza con una aceleración a_1 .

$$-m g \sin \theta + T_1 = m a_1$$

$$M g - T_1 = M a_1$$

Caso 2: Al intercambiar las posiciones de las masa $\mathbf{m}$ y $\mathbf{M}$ y hacer el DCL, obtenemos

$$-M g \sin \theta + T = M a_2,$$

$$m g - T = m a_2.$$

Sumando, en ambas columnas, las dos ecuaciones obtenidas, logramos eliminar la tensión $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$, que despejaremos al final. Al sumar tenemos dos ecuaciones, una por cada configuración y a partir de estas ecuaciones obtenemos la expresión para λ y el ángulo θ . Las dos ecuaciones son

$$\frac{a_1}{g} = \frac{M - m \sin \theta}{M + m} = \frac{1 - \lambda \sin \theta}{1 + \lambda}.$$

$$\frac{a_2}{g} = \frac{\lambda - \sin \theta}{1 + \lambda}.$$

Multiplicando la última ecuación por λ y restándola de la anterior,

$$\frac{a_1}{g} - \lambda \frac{a_2}{g} = \frac{1 - \lambda \sin \theta - \lambda^2 + \lambda \sin \theta}{(1 + \lambda)}.$$

$$\left[\frac{a_1}{g} - \lambda \frac{a_2}{g} \right] = \frac{1 - \lambda^2}{(1 + \lambda)} = (1 - \lambda)$$

Despejando λ tenemos

$$\lambda \left[\frac{a_2}{g} - 1 \right] = \frac{a_1}{g} - 1 \Rightarrow \lambda = \frac{g - a_1}{g - a_2}.$$

Note el cambio de signo, debido a que $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$ y a_1 ó a_2 son menores de 10. Por la naturaleza del problema **No** pueden ser mayores! (Nada cae libremente con una aceleración mayor que g .)

λ es menor que la unidad como se espera, puesto que cuando **M** cuelga, la aceleración es aproximadamente seis veces mayor que cuando **m** está en esa posición.

Conocido λ , lo introducimos en la ecuación obtenida para a_2/g y obtenemos

$$\frac{a_2}{g} = \frac{\lambda - \text{sen}\theta}{1 + \lambda} \Rightarrow \lambda - \text{sen}\theta = \frac{a_2}{g}(1 + \lambda) \Rightarrow \text{sen}\theta = \lambda - \frac{a_2}{g}(1 + \lambda) = \frac{g - a_1}{g - a_2} - \frac{a_2}{g} - \frac{a_2}{g} \left(\frac{g - a_1}{g - a_2} \right).$$

Simplificando,

$$\text{sen}\theta = \left[\frac{g - a_1}{g - a_2} \right] \left[1 - \frac{a_2}{g} \right] - \frac{a_2}{g} = \frac{g - a_1}{g} - \frac{a_2}{g}.$$

Finalmente

$$\text{sen}\theta = 1 - \left[\frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g} \right] < 1$$

Podemos calcular la tensión de la cuerda en cada uno de los casos. Esto se puede ver directamente en la ecuación proveniente del DCL de la masa que cuelga libremente en cada uno de los casos.

Caso 1 : de la segunda ecuación del DCL obtenemos directamente

$$\frac{T_1}{Mg} = 1 - \frac{a_1}{g}.$$

Análogamente en el **Caso 2**, a partir del DCL de la masa que cuelga, se obtiene

$$\frac{T_2}{mg} = 1 - \frac{a_2}{g}$$

A simple vista no podemos decir si son o no iguales. Si tomamos la razón entre ambas e incorporemos el valor obtenido para λ obtenemos

$$\frac{\frac{T_1}{Mg}}{\frac{T_2}{mg}} = \frac{1 - \frac{a_1}{g}}{1 - \frac{a_2}{g}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{g - a_1}{g - a_2} \cdot \frac{1}{\lambda},$$

Finalmente, obtenemos

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{g - a_1}{g - a_2} \cdot \frac{g - a_2}{g - a_1} = 1.$$

Concluimos que las dos tensiones tienen el mismo valor. $\square$

Bibliografía

- [1] **Spreadsheet Physics**, C. W. Misner Chabay y P. J. Cooney, Addison Wesley Publishig Company.
- [2] **Física Universitaria**, Harris Benson, Compañía Editora Continental, S. A DE C., México, Primera reimpresión, 1996.
- [3] **Lectures on Physycs** R. P. Feynman, Vol I, Addison Wesley,1967. Ver los capítulos 9, 10 y 12, donde se discuten las leyes de Newton.
- [4] **Five easy Lessons: Strategies for Successful Physics Teaching**, Randall D. Knight, Addison Wesley, SanFrancisco 2004..
- [5] **Peer Instruction: A User manual**, Eric Mazur, Prentice Hall, New Jersey 1997.