INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 6 de junio de 2016

Índice general

Capítulo IX

TRABAJO Y ENERGÍA

IX.1. INTRODUCCIÓN

El concepto de energía es abstracto. También es múltiple, existe energía gravitacional, eléctrica, nuclear... El calor es también una forma de energía. La más cercana a nosotros es la energía cinética, aquella asociada al movimiento de una partícula, es proporcional al cuadrado de la velocidad y se ubica en la partícula por tanto es más concreta.

Una fuerza representa la interacción entre dos cuerpos, ya sea uno distante (acción a distancia) o por contacto. Cuando hacemos el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo (DCL), reemplazamos cada cuerpo externo por una fuerza bien definida. Si usamos la segunda ley de Newton y sumamos todas las fuerzas externas (interacciones), podemos describir el movimiento de este objeto.

Este protocolo es una representación estática: dibujamos las fuerzas como si todo estuviera en reposo. Sin embargo está en movimiento y ese movimiento lo producen las fuerzas que representan el medio que rodea al cuerpo y que identificamos en el DCL.

A continuación consideramos la segunda ley de Newton en este contexto.

Si la fuerza produce un desplazamiento, podemos multiplicar (adecuadamente) la fuerza por el desplazamiento y denominar este producto de vectores como el trabajo. Este trabajo representa la transferencia de aquello que llamamos energía desde el medio al cuerpo. El agente es en este caso, la fuerza.

En el otro lado de la ecuación asociada a la segunda ley de Newton, aparece la aceleración, que al multiplicarla por el desplazamiento, adquiere dimensiones de velocidad al cuadrado ($\{[L]/[T^2]\}[L] = [L^2][T^2]$). Esta es la energía cinética que adquiere el cuerpo.

DEFINICIÓN DE TRABAJO

De acuerdo a esta imagen debemos sumar el producto de la fuerza con su respectivo desplazamiento, punto a punto a lo largo de la trayectoria. Esto nos dará el trabajo realizado sobre el cuerpo durante dicha trayectoria.

La definición del trabajo realizado por una fuerza es el **producto escalar** entre el vector desplazamiento infinitesimal de un punto y la fuerza que actúa sobre dicho punto. Sus dimensiones son las mismas de la energía.

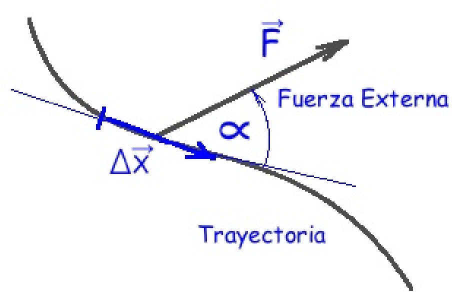
La suma del producto de estos pequeños desplazamientos por su respectiva fuerza a lo largo de la trayectoria, nos da el trabajo realizado por las fuerzas consideradas entre el punto de partida y el final.

$$W\,\Big|_{x}^{x+\Delta x} \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trabajo}}}{\Delta W} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fuerza}}}{\vec{F}(x)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desplazamiento}}}{\Delta\vec{x}} = |\vec{F}(x)||\Delta\vec{x}|\,\cos\Phi.$$

Unidad: [W] = newton $\times$ m $\equiv$ **Joule**.

La notación en Δ**W** indica el trabajo para ir de $\vec{x}$ a $(\vec{x} + \Delta\,\vec{x})$.

El esfuerzo requerido para arrastrar un objeto -lentamente-, sobre una superficie rugosa nos da una idea intuitiva de lo que es el trabajo **W**.



El cálculo de esta expresión es el primer paso antes de obtener la expresión final de la energía. El siguiente consiste en calcular el producto de la aceleración local por el desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria.

Como la ley de Newton establece $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\,\tilde{\mathbf{a}}$, si multiplico la fuerza por el desplazamiento, para mantener la igualdad lo mismo debo sobre el término de la derecha y así obtendremos una igualdad a partir de la segunda ley de Newton. Si realizamos la suma a lo largo de la trayectoria tendremos el trabajo a la izquierda de la ecuación y la energía cinética (por definición) a mano derecha. Veremos esto más adelante.

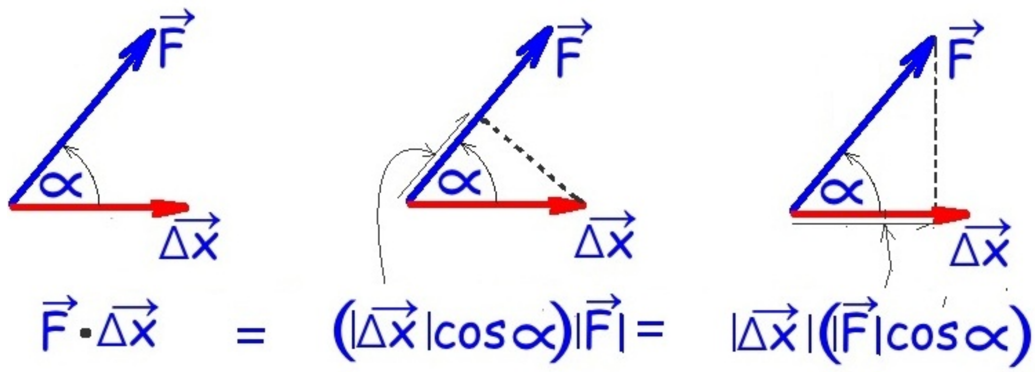


Figura IX.1: *Como el producto escalar es una proyección de un vector sobre y una multiplicación de sus magnitudes, es indiferente cuál vector se proyecta sobre cuál. Uno elige la modalidad que es más fácil y directa de interpretar físicamente.*

A continuación usaremos la definición de trabajo en un par de casos de interés para ilustrar cómo funciona.

IX.2. TRABAJO Y FUERZAS CONSTANTES

Obtendremos la expresión para el trabajo realizado por una fuerza constante actuando sobre un objeto que se traslada entre los puntos espaciales **A** y **B**.

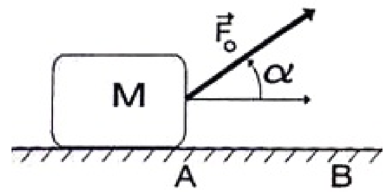
El esfuerzo para arrastrar un objeto entre dos puntos distantes depende de las fuerzas que actúan sobre el objeto. En general, existen varias fuerzas actuando sobre el mismo objeto simultáneamente. Cuando calculamos el trabajo debemos entonces referirnos a la fuerza que estamos considerando, y en ese caso, el trabajo es el realizado por una de ellas o por un par de ellas o todas. Así, el trabajo tiene un nombre asociado a la fuerza que lo genera. Este es la parte local del trabajo, lo que ocurre en un punto cualquiera: $\Delta\,\mathbf{W}$. El otro elemento que interviene es la trayectoria. Lo que señalamos con el subíndice**A** y el superíndice**B** : Sumar este efecto local a lo largo del trayecto. Eso nos da el trabajo de dicha fuerza (o fuerzas) para trasladar un objeto.

Con respecto a la trayectoria, ocurre algo interesante: en casos de interés, el trabajo total NO depende de la trayectoria seguida, sólo de los puntos final e inicial, desde donde salió y hasta donde llegó. Como no depende del trayecto, esto debe ser consecuencia de propiedades de las fuerzas que participan en estos casos. para distinguirlas de aquellas en que esto no ocurre -como es el caso de la fuerza del roce-, se denominan fuerzas conservativas. Veremos unos ejemplos de estos casos en las secciones posteriores.

Ejemplo

Encontrar el trabajo realizado para trasladar un bloque desde **A** hasta **B**, aplicando una fuerza constante F_0, en la forma como se indica en la Figura.
El trabajo realizado para trasladar el objeto hasta **B** es por definición:

$$W|_A^B = \vec{F}_0 \cdot \Delta\vec{x} = \vec{F}_0 \cdot (\vec{x}_B - \vec{x}_A).$$



Trabajo realizado por una fuerza externa sobre un bloque arrastrado sobre un piso sin roce.

$W|_A^B$ es el trabajo realizado por el agente que aplica la fuerza $\vec{F}_0$ sobre el objeto. Recordemos que $\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\,\alpha$:

$$W|_A^B = |\vec{F}_0| \cdot |(\vec{x}_B - \vec{x}_A)| \cdot \cos\alpha \;=\; |\vec{F}_o|\, d\, \cos\alpha.$$

donde **d** es la longitud del camino recorrido. □

Ejemplo

Considere un bloque que desliza sobre un plano inclinado arrastrado por una cuerda que actúa a través de una polea. El plano tiene roce despreciable.

a.- Calcule el trabajo realizado por la persona si el bloque desliza una distancia **L** sobre el piso. ¿Cuál debe ser el mínimo valor de esta fuerza para que pueda subir el bloque?

b.- Calcule el trabajo de la fuerza de gravedad en el caso anterior.

c.- Considere el efecto del roce. Suponga que la persona usa el mínimo de fuerza para deslizar el bloque: apenas un poco más de lo necesario para mantener el equilibrio. En este caso calcule el trabajo de cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque.

Solución

a.- Del DCL, obtenemos que la masa asciende sólo si **T** $>$ **Mg** $\operatorname{sen}\theta$. Supongamos que esta condición se cumple. Si nos piden el trabajo realizado por la persona que tira la cuerda con una fuerza **T**, esto es directo

$$W^T_{dist-L} \;=\; T\,L.$$

Si **T** es menor que **Mg** $\operatorname{sen}\theta$, no puede levantar la masa y ésta comienza a deslizar hacia el vértice. El trabajo de la fuerza **T** en ese caso será negativo: el desplazamiento apunta en la dirección opuesta a la fuerza ejercida. El ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es de 180^o. Podríamos usar ese trabajo para elevar una masa adecuada instalada en el extremo de la cuerda.

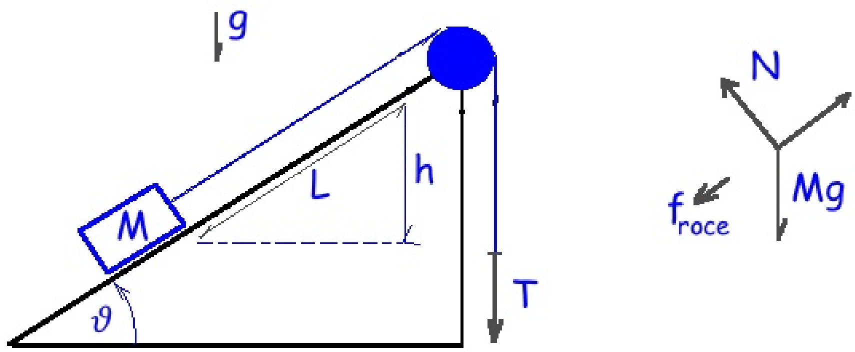


Figura IX.2: *Calcularemos el trabajo que realiza la fuerza* **T** *al desplazar el bloque* **M** *una distancia* **L**. *Incluiremos el trabajo de la fuerza gravitacional* **Mg** *y finalmente el roce, que no apareció en los dos casos anteriores. Mostraremos que el trabajo de la fuerza de gravedad depende sólo de la altura* **h**.

b.- En el caso de la fuerza de gravedad, de acuerdo a la definición de trabajo, tenemos

$$W^{Mg}_{dist-L} = \sum_{j=0}^{j=N} |Mg|\,|\Delta\, x_j|\, \cos(90^o + \theta) = |Mg|\,|L|(-\,\mathrm{sen}\,\theta) = -\,M g\, h.$$

Usamos acá que $\sum_{j=0}^{j=N} \Delta\, x_j = L$. Como las otras cantidades son constantes salen fuera de la sumatoria.

El trabajo es negativo y proporcional a la altura. El sentido común indica que debe ser así. Para levantar una masa se necesita efectuar un trabajo. Y ese trabajo debe depender de la altura a la cual uno desea levantar un objeto.

Podemos conectar este resultado con lo propuesto en la Figura IX.1: como la fuerza es constante, proyectamos el desplazamiento **L** sobre la dirección de la fuerza y obtenemos la altura **h** alcanzada. Veremos que este es un resultado general para las fuerzas constantes.

c.- Debemos calcular el trabajo de la fuerza neta sobre la masa **M**. De acuerdo al DCL, las fuerzas normales al plano inclinado no realizan trabajo puesto que son perpendiculares al desplazamiento. Esto es independiente al hecho que ambos se cancelan: $N - M\, g\, \cos\theta = 0$.

Lo relevante es que son perpendiculares al desplazamiento.

De modo que en la suma de las fuerzas actuando sobre cuerpo, éstas no figuran.

Con respecto a las fuerzas alineadas a lo largo del desplazamiento, el trabajo de todas las fuerzas es

$$\begin{aligned} W^{neta}_{dist-L} &= W^{f-roce}_{dist-L} + W^{\text{gravitación}}_{dist-L} + W^{\text{Tensión}}_{dist-L} && \text{(IX.1)} \\ W^{neta}_{dist-L} &= \sum_{j=0}^{j=N} \left([\,-f_{roce} + M\,g\,\cos(90^o + \theta) + T]\,\Delta\,x_j \right). && \text{(IX.2)} \end{aligned}$$

Como hemos supuesto que el agente externo utiliza el mínimo de fuerza, el sistema, a orden cero, está en equilibrio, hay solo un pequeño exceso en la fuerza impulsora **T** que mueve, muy lentamente, la masa **M** sobre el plano. Podemos suponer que el sistema está en equilibrio.

$$\mathbf{T} - M\,g\,\operatorname{sen}\theta - \mu_{cin}\,M\,g\,\cos\theta = 0. \qquad \text{(IX.3)}$$

Con esta ecuación de equilibrio, se obtiene que

$$\begin{aligned} W^{f-roce}_{dist-L} &= \sum_{j=0}^{j=N} \left(-f_{roce}\,\Delta\,x_j \right) = -\mu_{cin}\,M\,g\,\cos\theta\,L && \text{(IX.4)} \\ W^{neta}_{dist-L} &= 0, \quad \text{de esta forma} && \text{(IX.5)} \\ W^{f-roce}_{dist-L} &= -W^{\text{gravitación}}_{dist-L} - W^{\text{Tensión}}_{dist-L}. && \text{(IX.6)} \end{aligned}$$

□

El siguiente ejemplo se refiere a una máquina. Una máquina es un artefacto que en esencia realiza un trabajo específico. Un ejemplo es la palanca, el agente externo disminuye la fuerza aplicada pero debe aumentar el desplazamiento donde se aplica. En el punto donde actúa, el desplazamiento es pequeño pero multiplicada por una fuerza de mayor magnitud.

Otro ejemplo es la caja de cambios en un auto. Al partir debe vencer la inercia, utiliza la primera marcha en la cual el motor da muchas vueltas y avanza más lentamente.

Ejemplo

En el sistema de poleas de la Figura, calcule el trabajo realizado al desplazar el extremo **A** una distancia ℓ. El peso de la polea **C** es **P**, y no existe roce entre ninguno de los elementos del sistema.

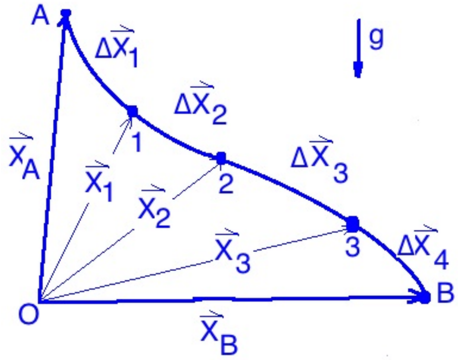


Figura IX.3: *El trabajo realizado en el trayecto de* **A** *hasta* **B** *por una fuerza constante resulta igual a la proyección del trayecto sobre la línea definida por la dirección de la fuerza constante. En el caso de la atracción gravitacional: $m\vec{g}$, esta línea es la vertical. Para cuantificar el trabajo sin recurrir al cálculo infinitesimal, rectificamos el trayecto transformando los arcos de la curva en cuerdas. Los trayectos , por ejemplo $\Delta\,\vec{x}_3$, corresponden a unir el punto $\vec{x}_2$ con el punto $\vec{x}_3$ mediante una cuerda.*

En este mecanismo existe una *conservación del trabajo* que nos conducirá al descubrimiento de la conservación de la energía más adelante. La energía tiene las mismas dimensiones que el trabajo y puede adquirir distintas formas, como energía cinética (asociada al movimiento), energía potencial (asociada a la posición), calor y otras.

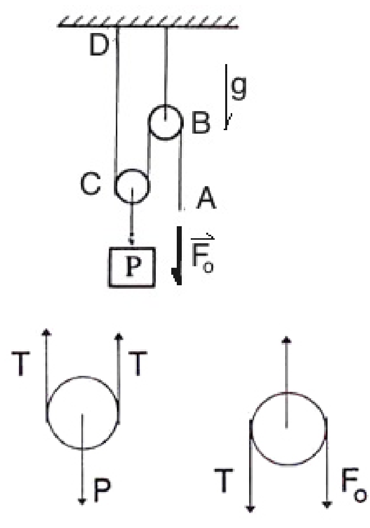
Estudiemos la estática del sistema de poleas más simple: incluye sólo dos de ellas.

En esta configuración no existe roce en las poleas. La polea **B** está fija al techo, mientras que **C** puede subir o bajar.
Analicemos el equilibrio de este sistema haciendo los diagramas de cuerpo libre relevantes:

$$2\,T = P, \qquad T = \frac{1}{2}\,P$$

$$F_0 = T = \tfrac{1}{2}\,P$$

$$F_0 = \frac{1}{2}\,P \tag{IX.7}$$



En resumen, para soportar el peso P *sólo se necesita aplicar una fuerza* $F_0 = P/2$. Para disminuir aún más la fuerza, basta multiplicar el número de vueltas de la cuerda sobre las poleas. La regla para encontrar el valor de la fuerza requerida en este caso es:

$$F_0 = \frac{P}{n},$$

donde n es el número de cuerdas que resisten el peso, sin contar la cuerda donde F_0 actúa directamente. El caso estudiado corresponde a n=2. En resumen, un niño puede levantar un peso tan grande como quiera, usando el número adecuado de poleas, o el número correcto de vueltas de la cuerda sobre un par de poleas.

Estudiemos este mismo problema desde el punto de vista del trabajo. Volvamos al sistema más simple de poleas. Si están en equilibrio, un pequeño empujón desplazará el punto A hacia abajo (por elegir una dirección).

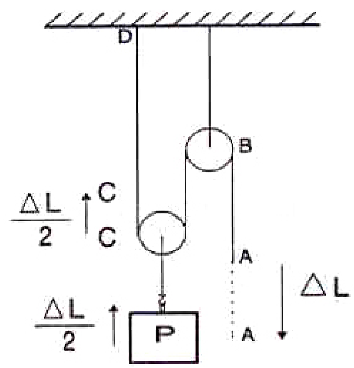
$$W_A = F_0 \cdot \Delta x_A = \tfrac{1}{2}\, F_o\, \Delta x_A \qquad \text{(Trabajo efectuado en A)}$$

$$W_C = P \cdot \Delta x_C = \quad ? \qquad \text{(Trabajo efectuado en C)}$$

¿Cómo se relaciona $\Delta\, x_C$ con $\Delta\, x_A$?

Se puede ver que si A baja una distancia $\Delta\ell$, C sube $(\Delta\ell/2)$, puesto que C se ubica justo en el punto medio de cada una de sus ramas $\overline{CD}$ y $\overline{CB}$ y el largo de la cuerda $\widehat{BCD}$ se ha acortado en $\Delta\ell$.

$$W_C = P\,\frac{1}{2}\,\Delta x_A = W_A \;\Rightarrow\; W_C = W_A \qquad \text{(IX.8)}$$



El trabajo efectuado sobre el punto A y aquél sobre el punto C, es el *mismo*. Como el desplazamiento en A es el doble, la fuerza necesaria es la mitad del peso P.

Este es un fenómeno similar a la multiplicación de fuerzas que se verifica con las *palancas*. Estudiaremos este caso al introducir el torque, más adelante.

IX.2.1. Trabajo Realizado por un Resorte

En el caso de un resorte la fuerza no es constante, depende de la compresión o alargue que experimente. Mostraremos que es posible resolver este problema con herramientas matemáticas ya conocidas.

Ejemplo

¿ Cuál es el trabajo necesario para alargar un resorte? Suponga que el resorte descansa sobre una mesa sin roce, de manera que sólo actúa su fuerza de restitución.

La ley de fuerza es **F(x) = - k x,** donde **x** indica la variación de la longitud del resorte medida a partir de su largo natural.

Suponemos que al alargar el resorte lo hacemos en la misma dirección de su longitud y por lo tanto el problema es unidimensional y no necesitamos usar explícitamente vectores.

Lo novedoso en este problema radica en la dependencia de la fuerza en la posición y, por lo tanto, para calcular el trabajo es necesario sumar pequeños desplazamientos y en cada uno de ellos usar un valor *constante* de la fuerza, que represente su valor promedio en dicho intervalo.

De esta forma, el trabajo necesario para dar un pequeño desplazamiento al resorte es:

$$\begin{aligned} \Delta W \quad &= F(x)\,\Delta x, \\ &\uparrow \\ F(x) &= +k\,x. \end{aligned}$$

El signo $(+)$ de la segunda línea de la última ecuación, se debe a que estamos calculando el trabajo que realiza el *agente externo*, que estira el resorte y que a cada instante debe aplicar una fuerza *contraria* a la fuerza con que el resorte se resiste a ser alargado.

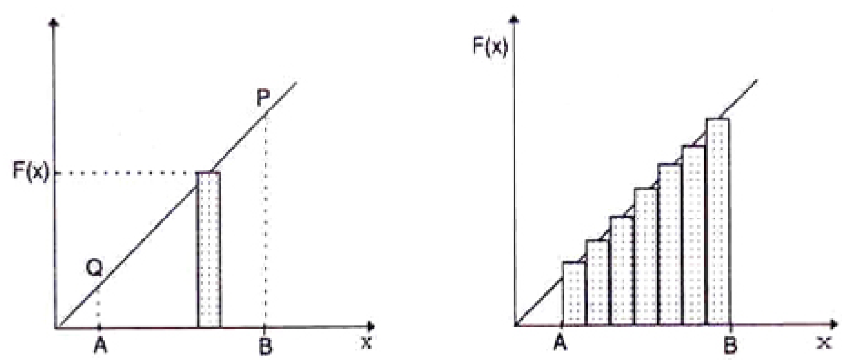


Figura IX.4: *El trabajo realizado es igual al área encerrada bajo la curva de F(x) por* $\Delta\, x$ *alrededor del punto x. El valor medio de F(x) asociado a cada uno de los intervalos* $\Delta\, x$ *lo representamos, en este caso, por el valor de F(x) evaluado en el punto medio del intervalo.*

Si estiramos *(lentamente)* el resorte desde A hasta B el trabajo total será:

$$
\begin{aligned}
\Delta\, W\,|_A^B &= \textstyle\sum_{x_A}^{x_B}\,\Delta\, x_i\, F(x_i) = \text{Area bajo el trapecio ABPQ,} \\
&= \quad (AB)\cdot\{k\, x_A + \frac{1}{2}\, k(x_B - x_A)\}, \\
& \qquad\quad \downarrow \qquad \downarrow \\
\Delta W|_A^B &= (x_B - x_A)\cdot \frac{k}{2}\,(x_A + x_B) = \frac{1}{2}\, kx_B^2 - \frac{1}{2}\, kx_A^2.
\end{aligned}
$$

$$\Delta W|_A^B = \frac{1}{2}\, k(x_B^2 - x_A^2). \qquad \text{(IX.9)}$$

Este resultado se puede obtener sumando cada uno de los trapecios desde A hasta B. Es un proceso más largo, sin embargo es de utilidad porque es una forma de enfrentar los casos donde la función $f(x)$ no es una línea recta.

Sumemos cada uno de estos términos:

$$W|_A^B = \sum_A^B\,(k\, x_i)\cdot \Delta\, x_i = k \sum_{n=1}^{N} [x_A + \left(n - \frac{1}{2}\right)\,\Delta]\,\Delta,$$

donde el significado de cada uno de los signos se detalla a continuación:

$$
\begin{aligned}
\Delta x_n &\equiv x_{n+1} - x_n = \Delta, \qquad \text{constante,} \\
x_n &= x_A + (n - \tfrac{1}{2})\,\Delta, \\
x_{n+1} &= x_A + (n + 1 - \tfrac{1}{2})\,\Delta.
\end{aligned}
$$

en el gráfico, $k\, x_i$ representa la altura del rectángulo cuya base es Δ. De paso mencionamos que conviene usar el valor $x_n = x_A + \left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta$ para la altura, puesto que de esta forma el resultado obtenido para el área será el valor exacto, sin aproximaciones.

$$
\begin{aligned}
W|_A^B &= k\,[\textstyle\sum_{n=1}^{N}\, x_A\,]\Delta + \Delta^2\,[\sum_{n=1}^{N}\, n] - \Delta^2[\sum_{n=1}^{N}\,(\frac{1}{2})], \\
&= k\left\{N\,\Delta\, x_A\, + \Delta^2\,(N+1)\frac{N}{2} - \Delta^2\,\frac{N}{2}\right\},
\end{aligned}
$$

pero $\Delta\cdot N \equiv [x_B - x_A]$, y tomando el límite $\Delta \to 0$ simultáneamente con $N \to \infty$, de forma que el producto de ambas cantidades permanezca constante e igual al valor ya indicado, se tiene:

$$W|_A^B \equiv W_A^B = k\,\{x_A(x_B - x_A) + \frac{1}{2}\,(x_B - x_A)^2 + 0 - 0\}.$$

$$W|_A^B = k\, x_A\,(x_B - x_A) + \frac{k}{2}\,(x_B^2 - 2\,x_B + x_A^2),$$

y finalmente reobtenemos el mismo valor de la ecuación [IX.9],

$$W_A^B = \frac{1}{2}\,k\,(x_B^2 - x_A^2). \tag{IX.10}$$

Esta expresión representa el trabajo realizado para estirar lentamente un resorte desde x_A hasta x_B. El trabajo puede ser positivo (el agente externo debe realizar el trabajo) o negativo (si el resorte arrastra lentamente al agente externo). El signo depende del valor relativo de x_A y x_B.

IX.3. ENERGIA

Estirar un resorte lentamente *no* es, sin duda, un proceso natural. Es sólo un truco que nos ha servido para tratar un problema por partes, comenzando por la más simple. Veamos ahora que sucede si estiramos un resorte y luego lo soltamos, de modo que el sistema oscile libremente. En este caso, la segunda ley de Newton $F = m\,a$ debe cumplirse en cada instante y, *suponemos*, que la expresión $F = -k\,x$, sigue siendo válida aun cuando fue descubierta al estirar el resorte *lentamente*. Si los resultados teóricos obtenidos con esta suposición coinciden con lo que se observa al realizar el experimento bajo estas otras condiciones, ésta aproximación es considerada aceptable. Dentro del error experimental, las observaciones *coinciden* con los resultados teóricos obtenidos a partir de esta suposición.

De esta forma, la segunda ley de Newton se escribe:

$$\begin{aligned} m\,a &= -k\,x \\ m\frac{\Delta v}{\Delta t} &= -k\,x. \end{aligned}$$

Esta ecuación nos dice que la aceleración de la masa en cada punto de la trayectoria depende de la coordenada x de dicho punto, $a = a(x)$.

Para resolver este problema, continuamos con el mismo procedimiento empleado al calcular el trabajo necesario para estirar un resorte *lentamente*. Multiplicamos ambos lados de la última ecuación por el desplazamiento $\Delta\,x$ que ocurre en el punto x y sumamos esta expresión a lo largo de la trayectoria. Escribimos la aceleración como $a\ \equiv \Delta\,v/\Delta t$.

La suma se lleva a cabo entre dos puntos arbitrarios de la trayectoria: x_B y x_A:

$$m\sum_{x_B}^{x_A} \frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot\Delta x = (-1)\,k\,\left(\sum_{x_B}^{x_A} x\cdot\Delta x\right), \tag{IX.11}$$

como todo estos intervalos $\Delta t, \Delta x$, son muy pequeños pero finitos, podemos intercambiar el orden,

$$m \cdot \left[\sum_{x_B}^{x_A} \Delta v \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] = -k \sum_{x_B}^{x_A} x \cdot \Delta\, x,$$

usando $v = \frac{\Delta\, x}{\Delta\, t}$, y asociándolo con la velocidad en el punto medio del intervalo v_n y v_{n-1},

$$m \cdot \left[\sum_{x_B}^{x_A} \Delta\, v \cdot v \right] = -k \sum_{x_B}^{x_A} x \cdot \Delta\, x.$$

Los resultados de esta sumatoria no pueden depender del nombre asignado a las variables. Por lo tanto, la sumatoria de los términos $v \cdot \Delta v$, debe dar el mismo resultado que el obtenido en la sumatoria [IX.9], donde aparece $x \cdot \Delta x$. En ambos casos se calcula el área bajo una línea recta (ver Figura).

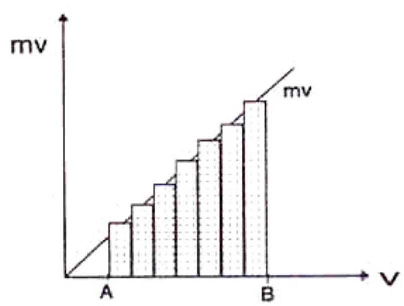


Figura IX.5: *En este caso, $m \cdot v$, corresponde al eje vertical (ordenada) y la velocidad v, cuyos valores se marcan en el eje horizontal (abcisa). El área bajo la recta es claramente el área del trapecio sombreado de la Figura.*

La operación donde se reemplazó la aceleración por $\Delta v/\Delta t$, tenía precisamente este objetivo: transformar una sumatoria cuyo valor no conocíamos, en otra que nos era familiar. El resultado es:

$$\sum_{x_B}^{x_A} \Delta v \cdot v = \frac{1}{2}(v_A^2 - v_B^2). \tag{IX.12}$$

Reemplazando a la izquierda de la igualdad esta última expresión y a la derecha de la igualdad el resultado de la ecuación [IX.9], tenemos:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_A^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 = -\frac{1}{2}\, k\, x_A^2 + \frac{1}{2}\, k\, x_B^2.$$

Agrupando los términos con el mismo subíndice a cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_A^2 + \frac{1}{2}\, k\, x_A^2 = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 + \frac{1}{2}\, k\, x_B^2 \tag{IX.13}$$

A la izquierda de la ecuación tenemos una cantidad evaluada en el punto x_A, y a la derecha, tenemos *la misma expresión* pero ahora evaluada en el punto B. El signo igual nos señala que la suma de los dos términos ubicados a la izquierda de la igualdad tienen el mismo valor, donde quiera que esta suma se evalúe, puesto que el punto A y el punto B son arbitrarios.

La expresión que se repite en ambos lados de la igualdad se denomina ENERGIA. Al evaluar esta expresión en cualquier punto de la trayectoria se obtiene el mismo número: es una cantidad conservada, no cambia su valor:

$$E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2, \tag{IX.14}$$

El primer término se denomina energía cinética y el segundo, energía potencial del resorte. La suma de ambos permanece constante durante el movimiento.

Existe entonces una componente de la energía proveniente del movimiento, la energía cinética y una energía debida al estiramiento del resorte, la energía potencial.

Ambas pueden ser transformadas en trabajo. Por ejemplo, al martillar un clavo estamos transformando la energía cinética del martillo en el trabajo que se requiere para hundir el clavo en la madera. De igual forma, se puede comprimir un resorte para que al liberarlo imprima una cierta velocidad a una masa. Eventualmente esta energía puede transformarse en trabajo en la forma indicada.

Si son equivalentes entonces la *Energía* debe tener las dimensiones de *Trabajo*, es decir:

$$[\text{Energía}] \quad \equiv \quad [fuerza] \times [distancia] \quad \equiv \quad [\text{newton} - m].$$

Con la letra **T** $\equiv m\, v^2/2$ designamos a la energía cinética y la letra **V(x)** $\equiv \dfrac{1}{2}\, k\, x^2$ señala la energía potencial. La conservación de la energía se escribe como:

$$E = T + V.$$

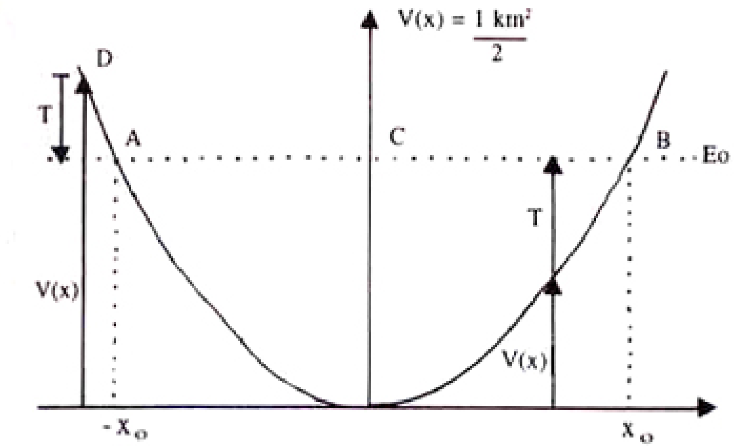


Figura IX.6: *Por convención la flecha de la energía cinética siempre debe apuntar en el sentido positivo de la ordenada V(x). La energía potencial puede ser positiva o negativa.*

IX.3.1. Gráfico de la energía de un oscilador armónico

En muchos modelos físicos se supone que el potencial depende exclusivamente de las coordenadas espaciales. Si este es el caso, entonces podemos graficar el potencial en función de estas coordenadas y de esta forma, obtener directamente algunas propiedades del movimiento sin necesidad de resolver las ecuaciones.

Para un oscilador armónico, la ecuación de la energía es:

$$E_0 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2,$$

$$E_0 = V(x) + T, \qquad \text{donde:}$$

V ≡ Energía Potencial,
T ≡ Energía Cinética.

Como la energía E_0 es constante, la diferencia $[E_0 - V(x)]$ nos da el valor de T, la energía cinética del sistema. En los puntos donde T se hace cero, sabemos que el cuerpo está momentáneamente en reposo. En el caso del oscilador armónico, este punto marca el cambio de sentido en la dirección de su movimiento.

Donde $V(x)$ es un mínimo, T es un máximo y allí el cuerpo adquiere su máxima velocidad.

En los puntos A y B del gráfico $V(+x_0) = V(-x_0) = E_0$, la energía cinética se anula y el cuerpo permanece momentáneamente en reposo. En este caso A y B corresponden a los puntos de máxima elongación y compresión del resorte.

$$V(x_0) = V(-x_0) = E_0 \quad \Rightarrow T = 0 \begin{cases} v_A & = 0 \\ \\ v_B & = 0 \end{cases}$$

En el punto C, $V(0) = 0 \Rightarrow E_0 = T \Rightarrow v_C = v_{\mathbf{max}}$.

La partícula *no* puede alcanzar el punto D porque allí la energía cinética es negativa. Al dibujar las flechas correspondientes en ese punto, vemos que la única posibilidad de cumplir la ecuación de la energía $E = T + V$ es que T sea negativo, lo que está prohibido en este contexto, puesto que implicaría una velocidad imaginaria.

$$T < 0, \qquad T = \frac{1}{2}\, m v_D^2 < 0,$$

como $m > 0 \Rightarrow v_D^2 < 0$, lo que constituye una contradicción puesto que la velocidad en cada punto debe ser un número real.

IX.4. TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE ROCE

Estudiaremos el efecto de las fuerzas de roce sobre el movimiento de la partícula.

Incluyendo la fuerza de roce en la ecuación [IX.11], se tiene:

$$m \sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} \frac{\Delta\, v}{\Delta\, t} \cdot \Delta\, x = (-1)\, k \left(\sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} x \cdot \Delta\, x \right) - \sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} f_{\text{roce}} \cdot \Delta\, x, \tag{IX.15}$$

realizando la suma de la misma forma que se hizo anteriormente y definiendo:

$$W_{\text{i}}^{\text{f}} \equiv \sum_{x_{\text{i}}}^{x_{\text{f}}} f_{\text{roce}} \cdot \Delta\, x, \quad \text{se tiene:}$$

$$T_{\text{f}} - T_{\text{i}} = -[V_{\text{f}} - V_{\text{i}}] - W_{\text{i}}^{\text{f}}, \qquad \text{y ordenando los términos:}$$

$$W_{\text{i}}^{\text{f}} = E_{\text{i}} - E_{\text{f}}. \tag{IX.16}$$

La energía *no* es una constante de movimiento bajo estas circunstancias. La diferencia en el valor de la energía inicial y final es igual al trabajo realizado por la fuerza de roce. Este trabajo se transforma en calor y no es posible reincorporarlo a los cuerpos en la forma de energía cinética o potencial.

En estos casos, el roce permanentemente degrada la energía mecánica, transformándola en calor. Este es un proceso irreversible, el calor no se puede transformar directamente en energía mecánica. En consecuencia, la energía final –la suma de la energía cinética y potencial–, será menor que la energía total inicial.

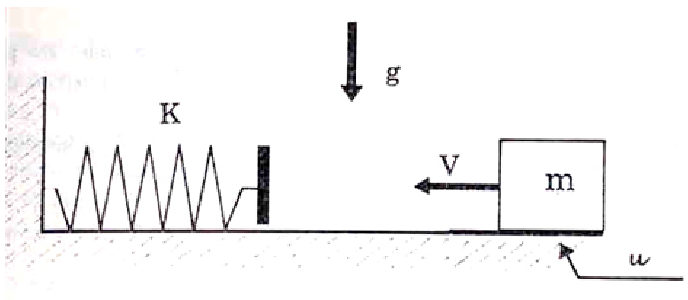


Figura IX.7: *El resorte está inicialmente con su largo natural y la masa m se acerca con velocidad V. La energía no se conserva debido a la existencia de roce entre el piso y la masa. La energía disipada es igual al trabajo que realiza la fuerza de roce.*

Ejemplo

Una masa m se encuentra a una distancia D del extremo de un resorte de constante k que, por simplicidad, suponemos que tiene masa nula. La masa m se desliza por un piso horizontal cuyo coeficiente de roce cinético es μ_c y el de roce estático es μ_e.

a) Suponga que la masa m tiene una velocidad V cuando se encuentra a la distancia D del extremo del resorte. Calcule el acortamiento del resorte, suponiendo que la velocidad V es suficiente para alcanzar a comprimirlo.

b) ¿Qué valor debe tener la velocidad V para que debido a la fuerza de roce, m se detenga justo al tocar el resorte?

c) Calcule el valor de V para que la masa m se detenga justo en el momento que el resorte alcanza su máxima compresión.

a) La energía del resorte en el momento de su máxima compresión es:

$$E_{\text{compresión}} = \tfrac{1}{2}\, k\, x^2,$$

y la energía inicial de la partícula m: $E_{\text{inicial}} = \tfrac{1}{2}\, m\, V^2.$

La diferencia entre estas energías corresponde al trabajo realizado por la fuerza de roce que transforma la energía mecánica en energía calórica. Este trabajo es el siguiente:

$$\sum_A^B (-f_{\text{roce}} \cdot \Delta\, x) = E_f - E_i,$$

ordenando los términos y definiendo:

$$W_{\text{fricción}} \equiv \sum_A^B (f_{\text{roce}} \cdot \Delta\, x)\,, \quad \text{llegamos a:}$$

$$W_{\text{fricción}} = [\mu_c\, m\, g][x + D] = E_{\text{inicial de m}} - E_{\text{compresión}}\,.$$

Si reemplazamos las expresiones correspondientes a cada una de las energías se llega a una ecuación de segundo grado para la incógnita x:

$$x^2 + \frac{2\,\mu_c\, m\, g}{k}\, x - \frac{2}{k}\,[\frac{1}{2}\, m\, V^2 - \mu_c\, m\, g\, D] = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$x = \frac{\mu_c\, m\, g}{k} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{k}{(\mu_c)^2\, m\, g^2}\, \left(V^2 - 2\,\mu_c\, g\, D\right)}\right].$$

De acuerdo a la convención de signos usada (ver Figura), x debe ser positivo para representar al resorte comprimiéndose, por lo tanto sólo el signo positivo del paréntesis cuadrado tiene sentido físico y es la respuesta buscada.

b) Si queremos usar el resultado anterior entonces debemos imponer que una de las raíces de la ecuación cuadrática en x sea nula. Esto se logra si:

$$\left(V^2 - 2\,\mu_c\, g\, D\right) = 0.$$

La explicación física de este resultado es la siguiente: toda la energía cinética de la masa m se disipó al recorrer la distancia D que la separa del extremo del resorte. Esto se puede verificar directamente escribiendo la ecuación correspondiente y comprobando que se obtiene el mismo resultado:

$$W_{\text{fricción}} \equiv [\mu_c\, m\, g]\ \cdot\ [x + D] = E_{\text{inicial de m}} \equiv \frac{1}{2}\, m\, V^2.$$

Si ponemos x=0, obtenemos V.

c) En este caso, el resorte comenzó a comprimirse desacelerando la masa m. Logró detenerla comprimiéndose una distancia tal, que la fuerza de restitución del resorte en esa posición, es menor que la fuerza de roce estático necesaria para poner en movimiento, nuevamente, a la masa m. En el caso crítico, se comprime lo suficiente como para igualar el máximo valor de la fuerza de roce estático.

La ecuación extra que debemos imponer es, entonces, la correspondiente al equilibrio estático:

$$k\, x_{\text{crítico}} = \mu_e\, m\, g,$$

reemplazando este valor en la expresión de x, obtenemos la velocidad V:

$$V^2 = \mu_c\, g\, D\, \left[2 + \frac{m\, g\, \mu_e}{k\, D}\left(2 + \frac{\mu_e}{\mu_c}\right)\right].\Box$$

Este valor de la velocidad corresponde al que produce un máximo de compresión del resorte. Es claro que el resorte pudo haberse detenido antes con el mismo resultado: quedarse estático en dicha posición debido a que la fuerza de restitución del resorte es menor que el máximo de la fuerza de fricción del piso.

Este resultado se puede leer en la última ecuación: allí el término $2\, \mu_c\, g\, D$ corresponde al valor de la velocidad para la cual el resorte no alcanza a comprimirse. El término extra representa el máximo valor *adicional* que puede tener V^2 antes de comprimir el resorte más allá de lo que puede resistir el roce estático.

Cualquier valor de V^2 entre ambos límites produce el mismo efecto: el resorte se detiene después de comprimirse,

$$2\, \mu_c\, g\, D < V^2 < 2\, \mu_c\, g\, D + \frac{m\, g^2\, \mu_e\, \mu_c}{k}\left(2 + \frac{\mu_e}{\mu_c}\right).\Box$$

En este último ejemplo no hemos analizado lo que sucede al ponerse en contacto la masa m con el extremo del resorte. Como la masa trae una cierta velocidad y el resorte está en reposo, lo que ocurre es un *choque* entre estos dos objetos. Como se estableció que la masa del resorte era despreciable, bajo esas circunstancias no hay nada que analizar. Sin embargo, una masa finita para la placa ubicada al final del resorte, cambia el problema y, en ese esquema, debemos analizar más cuidadosamente el problema. Este tipo de fenómenos, que incluyen choques, lo estudiaremos en una sección posterior.

IX.5. OSCILADOR EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

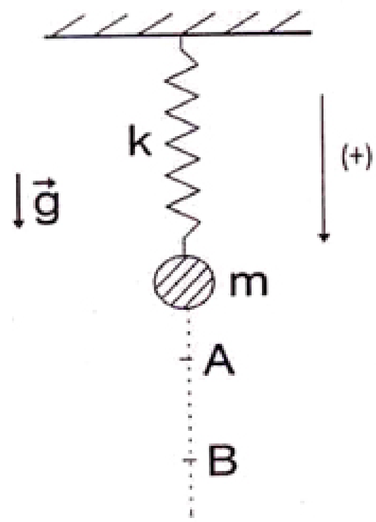
Estudiemos ahora el caso de un sistema masa-resorte que oscila verticalmente incorporando además la fuerza gravitacional que actúa sobre la masa m. La ecuación de movimiento es,

$$\sum F = m\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Tomando como positivo el sentido que apunta hacia el centro de la Tierra, tenemos:

$$+m\,g - k\,x = m\,\frac{\Delta v}{\Delta t}.\ \ (+)\downarrow \qquad \text{(IX.17)}$$

Repitiendo el mismo proceso usado anteriormente: multiplicar cada uno de los miembros de esta ecuación por Δx_i y posteriormente sumar estas expresiones a lo largo de la trayectoria, (es decir, integrar las ecuaciones de movimiento), obtenemos:



$$\sum_A^B (+m\,g\,\Delta x_i - k\,x_i\,\Delta x_i) =$$

$$= \sum_A^B m\frac{\Delta v_i}{\Delta t}\,\Delta x_i$$

En esta última ecuación, el primer término establece el trabajo que realizan las fuerzas externas sobre la masa. A la derecha de la igualdad aparece la energía cinética de la masa m. Para ponerla en la forma usual, [IX.14], necesitamos trabajar un poco.

Reescribiendo la sumatoria y usando los resultados obtenidos en [IX.14] tenemos:

$$+m\,g\sum_A^B \Delta x_i - \frac{1}{2}k\,x_B^2 + \frac{1}{2}k\,x_A^2 = \frac{1}{2}m\,v_B^2 - m\,v_A^2, \qquad \text{(IX.18)}$$

La sumatoria del primer término es fácil de evaluar, la suma de los Δx_i es el camino total recorrido: $(x_B - x_A)$. Incorporando este resultado, se tiene:

$$+m\,g\,x_B - m\,g\,x_A - \frac{1}{2}\,k\,x_B^2 + \frac{1}{2}\,k\,x_A^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_A^2.$$

Reordenando en la forma usual, es decir, todos los términos con el mismo índice en el mismo lado de la ecuación, llegamos a:

$$-mg\,x_A \quad + \quad \frac{1}{2}\,k\,x_A^2 \quad + \quad \frac{1}{2}\,m\,v_A^2 \quad = \quad -mg\,x_B + \frac{1}{2}\,k\,x_B^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_B^2$$

Energía Potencial Gravitacional	Energía Potencial Resorte	Energía Cinética

Vemos que la suma de la energía potencial del campo gravitacional, la energía potencial del resorte más la energía cinética de la masa m toma el mismo valor en cualquier punto de la trayectoria. Ya sabemos que esta propiedad es precisamente una ley de conservación. Indica que hay una cantidad E_0, que no varía a lo largo de la trayectoria:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \text{ constante}. \tag{IX.19}$$

Hemos derivado la expresión que toma la conservación de la energía para el caso de un resorte oscilando en un campo gravitacional uniforme. Esta fórmula se obtuvo tomando el eje vertical como positivo cuando apunta hacia el centro de la Tierra. Al definir el sentido opuesto como positivo, sólo debe cambiar el signo frente al término $m\,g\,x$.

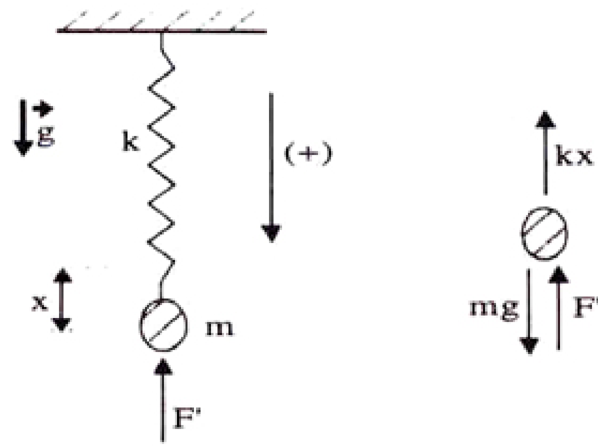
Ejemplo

Mencionamos la diferencia que existe entre soltar súbitamente una masa que cuelga de un resorte y depositarla suavemente de forma que no quede oscilando. En este último caso es fácil encontrar la elongación máxima del resorte, se trata de aplicar una fuerza F' (por parte de la persona que coloca la masa) de forma que mantenga un pequeño desequilibrio del sistema en cada punto.

A continuación calculamos la elongación máxima en las dos situaciones usando el método de la energía.

a) Caso en que la masa se deposita **lentamente** en el resorte.

El resorte tiene inicialmente su largo natural y depositamos la masa m aplicando una fuerza F' que sea un poco menor que el peso de la masa m. Con esto el resorte se estira un poco para aportar la fuerza que falta, enseguida, se disminuye la fuerza F' aplicada, de esta forma el resorte necesita alargarse un poco más para soportar la masa y así el proceso se vuelve a repetir hasta que la fuerza que aporta el resorte cancela exactamente el peso del objeto que se ha colgado.



En ese instante el sistema está en equilibrio, y se cumple:

$$m\,g - k\,x_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}. \tag{IX.20}$$

Esta es la elongación máxima alcanzada si la masa se deposita suavemente.

b) Veamos cuál es la elongación máxima del resorte si, estando inicialmente en reposo con su largo natural, unimos la masa m a su extremo y la soltamos súbitamente.

Designamos como origen de coordenadas al punto extremo del resorte en el instante que éste adopta su largo natural.

En el instante $t = 0$, justo cuando *soltamos* la masa, su *velocidad es nula* y también su coordenada x, $x(t = 0) = 0$, puesto que el resorte aún no comienza a alargarse. (Si le hubiésemos dado un impulso inicial, su velocidad sería distinta de cero en ese instante). Su aceleración no es nula y por lo tanto en un instante posterior comenzará a moverse.

Al soltar la masa m el sistema comienza a oscilar y no hay disipación de energía por efecto del roce, por lo tanto E_0 se conserva en la forma que aparece en la ecuación [IX.19].

$$E_0 = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx, \tag{IX.21}$$

Al evaluar E_0 en $t = 0$, obtenemos:

$$E_0 = 0 + 0 - 0 = 0,$$

de forma que en cualquier otro instante:

$$E_0 = 0 = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,kx^2 - mgx. \tag{IX.22}$$

Nos interesa el punto de elongación máxima, porque allí se *detiene* momentáneamente el resorte, y entonces $v(x = x_{\text{máximo}}) = 0.$

$$
\begin{array}{lcll}
0 & = & \frac{1}{2}k\bar{x}_0^2 - mg\bar{x}_0 & \bar{x}_0 \equiv \text{elongaciones extremas del resorte,} \\
0 & = & \bar{x}_0(\bar{x}_0 - 2\frac{m\,g}{k}), & \rightarrow \text{Se obtienen dos soluciones.} \\
\Rightarrow & & \bar{x}_0 = 2\frac{mg}{k} & \rightarrow \text{Máxima elongación del resorte} \\
 & & & \quad\ \text{al soltar súbitamente la masa } m. \\
\Rightarrow & & \bar{x}_0 = 0 & \rightarrow \text{Máxima altura que alcanza} \\
 & & & \quad\ \text{la masa } m \text{ en su rebote.}
\end{array}
$$

Ambas soluciones tienen una interpretación física: $\bar{x}_0$=0 corresponde a la máxima altura que puede alcanzar esta masa al oscilar alrededor del punto de equilibrio $m\,g/k$.

La elongación asociada a la otra solución es el *doble* de la obtenida al depositar lentamente la masa m. Si nuestro objetivo es alcanzar el punto de rotura del resorte (o la cuerda!), podemos forzar aún más el alargamiento del resorte si inicialmente le imprimimos una cierta velocidad v_0 a la masa m.

Se deja propuesto como ejercicio calcular el valor de la máxima amplitud, $\bar{x}_0$ en este caso. □

Usando la misma ecuación de energía podemos recuperar algunos resultados ya conocidos. Usando esta ley de conservación y eliminando el resorte, es decir haciendo $k = 0$ en las ecuaciones, podemos reobtener una fórmula de cinemática.

$$E_0 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - m\,g\,x, \quad \text{con k = 0.}$$

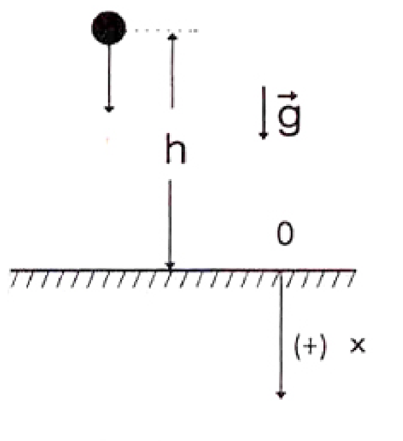
En su forma original, esta ecuación es:

$$\frac{1}{2}m\,v_f^2 - m\,g\,x_f = \frac{1}{2}\,m\,v_i^2 - m\,g\,x_i.$$

Reescribiéndola, se obtiene:

$$v_f^2 - v_i^2 = +2\,g\,(x_f - x_i), \quad \text{(IX.23)}$$

Esta es la misma expresión encontrada en el Capítulo II.
Veamos un ejemplo de este tipo. Con las siguientes condiciones iniciales en $t = 0$: $v = 0$ y $x = -h$, la constante E_0 toma el valor $E_0 = m\,g\,h$.



Al tocar el suelo, $x = 0$. De aquí tenemos:

$$E = m\,g\,h = m\,g\,0 + \frac{1}{2}\,m\,v^2, \qquad \text{entonces,} \qquad v^2 = 2\,g\,h.$$

Esta expresión corresponde a la conservación de la energía para el caso de una *fuerza constante* actuando sobre la masa m. (Note la definición del sentido positivo del eje x usada en este ejemplo).

IX.6. PÉNDULO EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

Anteriormente demostramos que para oscilaciones pequeñas la ecuación de movimiento de un péndulo en un campo gravitacional podía ser resuelta y su solución correspondía a la de un oscilador armónico.

Resolver las ecuaciones de movimiento significa encontrar $\theta = \theta(t)$.

Haciendo uso de la definición de trabajo podemos encontrar una relación entre la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la posición θ del péndulo para una oscilación de amplitud arbitraria, no sólo de oscilaciones pequeñas como se hizo anteriormente.

Calculemos el trabajo necesario para desplazar el péndulo entre los puntos A y B, arbitrarios. Definimos $\Delta\,x$ como un pequeño desplazamiento que experimenta la masa que cuelga en el extremo de la cuerda:

$$W_A^B = \sum_A^B [-m\,\vec{g}\cdot\Delta\,\vec{x}] + \sum_A^B \vec{T}\cdot\Delta\,\vec{x} = \sum_A^B m\,\vec{v}\cdot\Delta\,\vec{v},$$

como la tensión es perpendicular al desplazamiento $\Delta\,\vec{x}$ de la masa m del péndulo en cualquier punto de la trayectoria, entonces:

$$\vec{T}\cdot\Delta\,x = 0, \quad \text{en todo instante,}$$

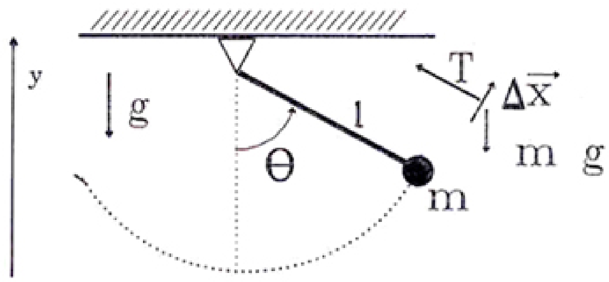


Figura IX.8: En el movimiento del péndulo la tensión no realiza trabajo. Sólo la componente vertical del desplazamiento lo hace debido a la fuerza gravitacional.

de esta forma, sólo permanece un término en la expresión del trabajo y, a mano derecha aparece la energía cinética, como es habitual en todos estos casos:

$$W|_A^B = \sum_A^B m\,\vec{g}\cdot\Delta\,\vec{x} = \frac{1}{2}\,\left(m\,\vec{v}_B^2 - m\,\vec{v}_A^2\right).$$

Como se puede apreciar de la Figura [IX.8], $\vec{g}\cdot\Delta\,\vec{x} = -g\,\Delta y$, el trabajo realizado para llevar el péndulo de A a B es proporcional a la diferencia de altura $y_B - y_A$, entre las dos posiciones. De esta forma, el valor de la energía entre ambos puntos es:

$$-m\,g\,y_B + m\,g\,y_A = \frac{1}{2}\,\left(m\,\vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2\right).$$

Ordenando en la forma usual, obtenemos la conservación de la energía para el caso de un péndulo moviéndose en un campo gravitacional constante:

$$E_o = m\,g\,y + \frac{1}{2}m\,\left(\ell\,\dot{\theta}\right)^2, \qquad \text{(IX.24)}$$

donde hemos definido la velocidad tangencial como $\ell\,\dot{\theta}$.

IX.7. EJERCICIOS

1.– Un cuerpo de masa m se lanza desde la base de un plano inclinado con velocidad V_o. Si el coeficiente de roce entre el cuerpo y el plano es μ . Calcular:

a) La distancia recorrida hasta que m alcanza su altura máxima.

b) La velocidad con que vuelve al punto de partida.

2.– Una partícula de masa m parte del reposo y se desliza sobre la superficie de una esfera sólida de radio R . Midiendo el ángulo φ desde la vertical, y suponiendo que no existe fricción:

a) Determine la energía cinética de la partícula en función de φ.

b) Las aceleraciones radial y tangencial de la partícula en función de φ.

c) Determine el valor del ángulo φ, para el cual la partícula pierde contacto con la superficie de la esfera.

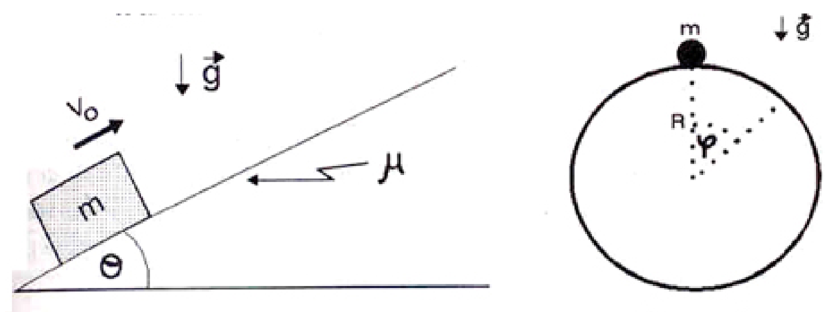


Figura IX.9: **Problema # 1** **Problema # 2**

3.– Una partícula de masa m está unida al extremo de una cuerda ideal de largo L, cuyo otro extremo está fijo en C. La partícula parte del reposo, desde la posición ϕ = 0. Si la máxima tensión que puede soportar la cuerda sin cortarse es $(3\,m\,g)/2$, determine el valor de ϕ para el cual se corta la cuerda.

4.– Un bloque de masa **M** se ubica sobre una superficie horizontal con coeficiente de roce estático μ_{est}. Otro bloque de masa **m** se encuentra atado al anterior mediante una cuerda ideal de largo **L**. Inicialmente este último bloque se instala a la misma altura de **M** y a una distancia **d** de la polea indicada en la Figura. La cuerda se encuentra extendida pero sin tensión. En un cierto instante se libera y la masa **m** cae permaneciendo atada a la cuerda. Si **M** y μ_{est} son conocidos, encuentre una expresión para el valor del ángulo ϕ para el cual el bloque sobre la superficie horizontal está a punto de comenzar a deslizar.

5.– En el sistema de la Figura, la masa m_1 está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural L_o y una cuerda ideal, que desliza sin roce por una polea. Entre el suelo y el bloque de masa m_1 existe un coeficiente de roce dinámico μ.

Si en t=0 el resorte tiene su largo natural y la masa m_2 tiene una velocidad V_o, determine la velocidad de la masa m_2 en el instante en que ha descendido una altura h con respecto a su posición inicial.

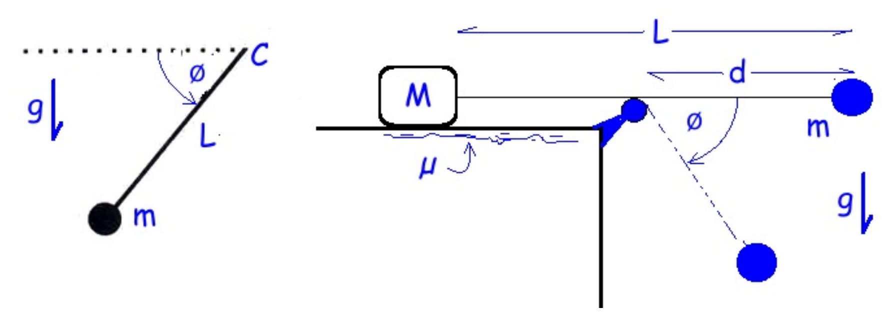


Figura IX.10: **Problema # 3** **Problema # 4**

6.– Considere un bloque de masa M colocado sobre un resorte vertical (fijo a él) de constante k y largo natural L_o. Sobre el bloque se coloca una partícula de masa m. Suponga que inicialmente se comprime el resorte en una distancia d con respecto a la posición de equilibrio del sistema. Calcule la altura máxima (sobre el suelo) que alcanza la masa m una vez que se libera el resorte.

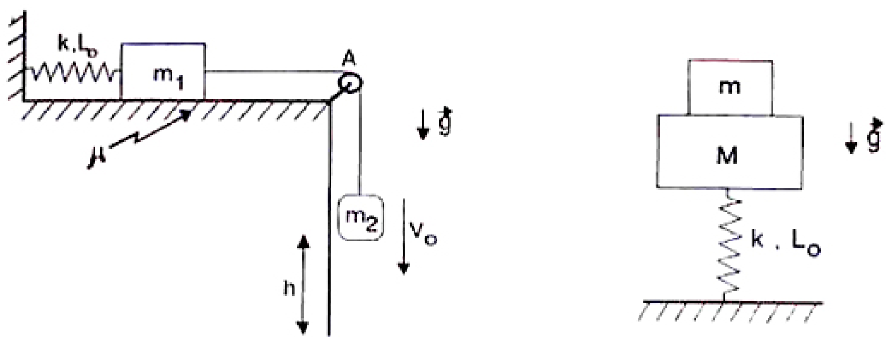


Figura IX.11: **Problema # 5** **Problema # 6**

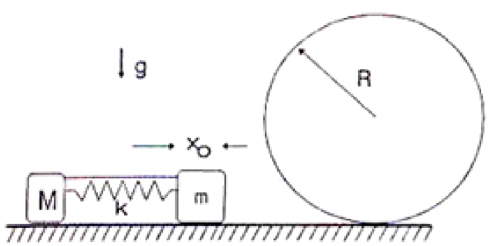
7.– Un resorte, de constante k, se encuentra inicialmente comprimido una distancia x_o, por medio de un hilo. En los extremos del resorte se han *apoyado* dos masas M y m, que se mantienen inmóviles por estar unidas por el hilo.

En cierto instante se corta el hilo y el resorte se expande. La partícula m sale disparada hacia la derecha y se desliza sin roce sobre una pista, que más adelante forma un círculo vertical de radio R. Conocidos M, k, x_o y R encuentre el máximo valor que puede tener m para que esta partícula no deje la pista. Analice el límite M $\to \infty$.

8.– En la Figura se muestra un riel fijo, vertical, pulido y que termina en un arco de circunferencia BC y de radio R. Una partícula de masa m se abandona en reposo en el punto A, y desliza hasta pasar por el extremo del arco C. Con estos datos, calcule:

a) La altura máxima –medida desde el punto C–, que alcanza la partícula.

b) Si al caer, la partícula pasa por el punto D, calcule el valor de CD. (El punto C está a la misma altura que el punto D).



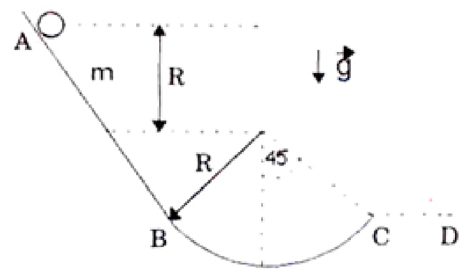


Figura IX.12: **Problema # 7** **Problema # 8**

9.– Una partícula de masa m que se desliza sin roce sobre un anillo de radio R, se libera en el punto A. El anillo está unido a un resorte de constante k, cuyo otro extremo está fijo al punto P, a una distancia d del centro del anillo. Para simplificar los cálculos, suponga que el largo natural del resorte es despreciable comparado con los otros largos. Si la partícula parte desde A, con velocidad inicial nula, y al pasar por el punto B no ejerce ninguna fuerza sobre el aro. Calcule el valor de la distancia d. ¿Puede alcanzar d un valor nulo o negativo? Explique.

Bibliografía

[1] **Matter and Interactions I, Modern mechanics**, R. W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley and Sons,2007.

[2] **Understanding Physics**, K. Cummings, P. Laws, E. Redish, P. Cooney, John Wiley & Sons, Inc. 2004.

[3] **Física Universitaria**, Harris Benson, Compañía Editora Continental, S. A. de C., México, Primera reimpresión, 1996.

[4] **Newton Rules Biology**, C. J. Pennycuik, Oxford University Press, Oxford,1995.

[5] **Five easy Lessons**, Randall D. Knight, Addison Wesley, **2004**