P1 TRUCOS MATEMATICOS

(a) Demostrar que (1) y (2) son equivalentes

(1) $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

(2) $x = D\sin(\omega t + \phi)$

Solución:

$x = D\sin(\omega t + \phi)$

$x = D[\sin(\omega t)\cos(\phi) + \sin(\phi)\cos(\omega t)]$

$x = D\cos(\phi)\sin(\omega t) + D\sin(\phi)\cos(\omega t)$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A \equiv D\sin(\phi) \\ B \equiv D\cos(\phi) \end{matrix}} \Big\}$ Definiendo esta relación se deduce que son equivalentes.

(b) x_0, V_0 son respectivamente la posición y velocidad inicial. Determine D y ϕ.

(1) $x = D\sin(\omega t + \phi)$

(2) $V = D\omega\cos(\omega t + \phi)$

$x(t=0) = D\sin(\phi) = x_0$

$V(t=0) = D\omega\cos(\phi) = V_0$

(i) $\Rightarrow \dfrac{x_0}{V_0} = \dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}\dfrac{1}{\omega} \Rightarrow \dfrac{\omega x_0}{V_0} = \dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \tan(\phi)$

$\Rightarrow \boxed{\arctan\left(\dfrac{\omega x_0}{V_0}\right) = \phi}$

(ii) $\left.\begin{matrix} x_0^2 = D^2\sin^2(\phi) \\ \left(\dfrac{V_0}{\omega}\right)^2 = D^2\cos^2(\phi) \end{matrix}\right\}$ $x_0^2 + \left(\dfrac{V_0}{\omega}\right)^2 = D^2\underbrace{[\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)]}_{=1}$

$\Rightarrow \boxed{D = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{V_0}{\omega}\right)^2}}$

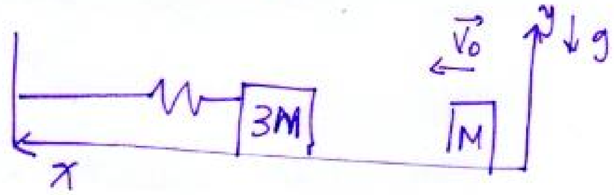
$\Rightarrow \boxed{x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{V_0}{\omega}\right)^2}\sin\left(\omega t + \arctan\left(\dfrac{\omega x_0}{V_0}\right)\right)}$

Auxiliar #8.

Problema 2.

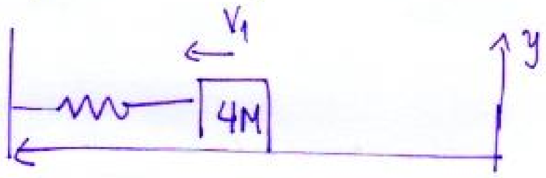
Como se trata de un choque inelástico (las masas quedan unidas después del choque) contamos únicamente con la conservación del momentum antes y despues del choque.

Antes del choque.



Momentum inicial.
$3M\cdot 0 + M\cdot v_0$

Después del choque.



Momentum final.
$4M\cdot v_1$

$$\Rightarrow \cancel{3 \cdot M \cdot 0} + \cancel{M} v_0 = 4 \cancel{M} v_1$$

$$\boxed{\frac{v_0}{4} = v_1}$$

Inmediatamente después del choque podemos fijar una Energía Cinética inicial y finalmente obtener solo Energía Potencial Elástica. , es importante notar que a medida que se comprime se disipa energía producto del Trabajo del roce.

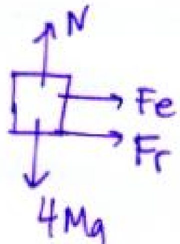
Inicialmente después del Choque

$E_M = E_{\text{cinética}}$

$= \frac{1}{2}(4M)\cdot v_1^2$

$= 2M\cdot \frac{v_0^2}{4^2} = \frac{Mv_0^2}{8}$

DCL



$\Rightarrow 4Mg = N.$

$F_r = \mu \cdot 4Mg.$

Compresión Total.

$E_M = E_{\text{elástica}} + W_{\text{Roce}}$ ⟶ Trabajo del Roce.

$W_{\text{Roce}} = \vec{F}\cdot\vec{d}.$ → notar que la dirección del desplazamiento es opuesta al sentido de la fuerza.

$= -4Mg\mu\cdot\Delta x.$

$\Rightarrow E_M = \frac{1}{2}K\Delta x^2 - 4Mg\mu\Delta x.$

$\Rightarrow \frac{1}{2}K\Delta x^2 - 4Mg\mu\Delta x = \frac{Mv_0^2}{8}.$

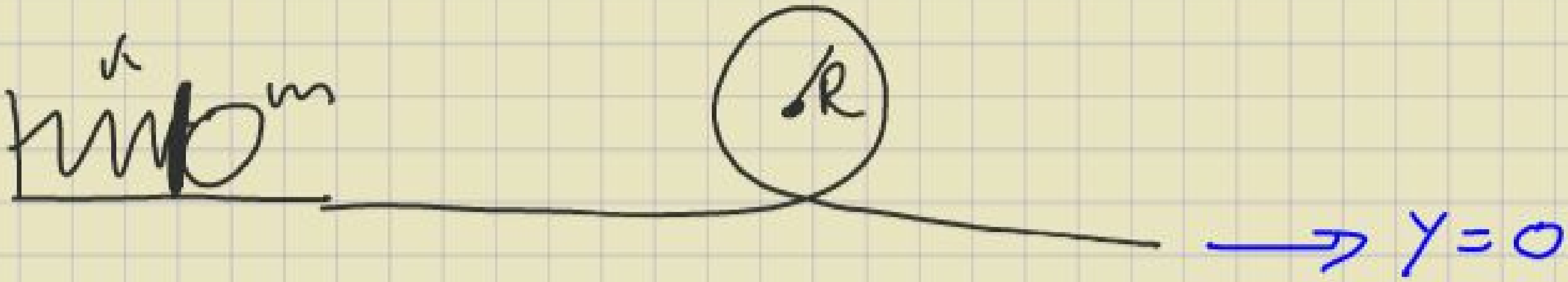
$\frac{1}{2}K\Delta x^2 - 4Mg\mu\Delta x - \frac{Mv_0^2}{8} = 0.$

$$\Delta x = \frac{4Mg\mu \pm \sqrt{16M^2\mu^2 + \frac{KMv_0^2}{4}}}{K}.$$

Máxima compresión (+)

$$\Delta x = \frac{4Mg\mu + \sqrt{16M^2\mu^2 + K\frac{Mv_0^2}{4}}}{K}.$$

//



La estrategia de resolución consistirá en aplicar conservacion de la energia en los instantes inicial y final.

Recordemos que $E = U + K$

y en este caso debemos considerar la energia potencial gravitatoria, y la energia potencial elastica.

Instante inicial $\longrightarrow$ $\begin{cases} U_{g_0} = 0 & \left[\begin{array}{l}\text{Fijemos } y=0 \\ \text{en el suelo}\end{array}\right] \\ K_0 = 0 & \left(\begin{array}{l}\text{parte en} \\ \text{reposo}\end{array}\right) \\ U_k = \frac{1}{2} k \Delta x^2 & \end{cases}$

Luego $\boxed{E_0 = \frac{1}{2} k \Delta x^2}$

Instante final

Un error muy común, es pensar que en el instante final (parte más alta del loop) la pelota llega con velocidad cero. Esto es Incorrecto!!. Si la pelota describe un movimiento circunferencial, entonces hay una aceleracion centripeta, y por ende una velocidad.

Hacemos un Dcl de m

$$-N - mg = -m a_c$$

Como analizamos el caso crítico tenemos que la fuerza centripeta debe tener un módulo minimo de $|F_c| = m \cdot a_c = mg$ en el caso de $N=0$.

En este caso crítico tendremos

$$a_c = g$$

$$\frac{v^2}{R} = g \Rightarrow \boxed{V_{min} = \sqrt{gR}}$$

Velocidad minima con la que se puede llegar al punto más alto.

Sigamos calculando las energías

$$U_f = U_{g_f} = mgh_2 = 2mgR$$

$$K_f = \frac{1}{2} m V_{min}^2 = \frac{1}{2} mgR$$

$$E_f = U_f + K_f = 2mgR + \frac{1}{2} mgR = \frac{5}{2} mgR$$

Aplicamos conservacion de la energia

$$E_0 = E_f$$

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{5}{2} mgR$$

$$\Delta x^2 = \frac{5mgR}{k} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{5mgR}{k}}}$$

Compresión minima del resorte