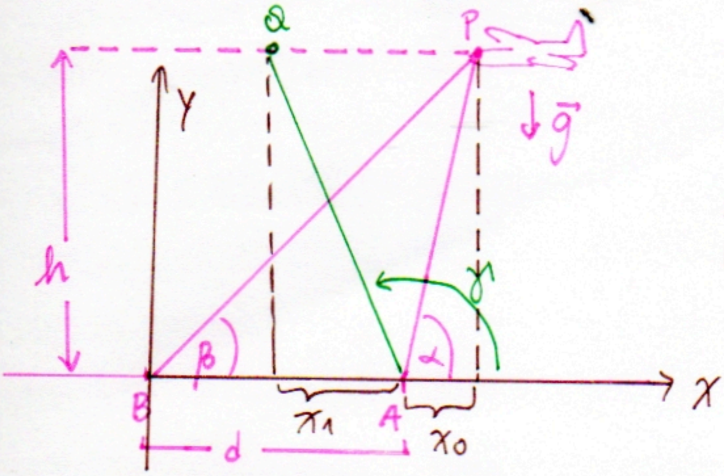
PAUTA P1 AUXILIAR #3

· Considerando la figura y lo indicado en el enunciado se determinará la altura de vuelo de la avioneta.



Tomando como sistema de referencia la zona B. se tiene que la ecuación itinerario para las cargas puede ser descompuesta en 2 sub-ecuaciones una asociada al movimiento horizontal y otra al movimiento vertical.

- Para determinar h se considera el movimiento vertical de la 1° entrega

$$Y_{1E}(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

como el tiempo de caída es t_1

$$0 = h - \frac{gt_1^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{gt_1^2}{2} = h} \Rightarrow$$ Notar que verticalmente el movimiento que lleva la carga no tiene velocidad inicial ya que la avioneta va a una altura constante.

- Calculemos ahora x_0.... (solo para practicar geometría).

$$\frac{\tan g(\alpha)}{h} = x_0^{-1} \quad ; \quad \tan g(\beta)\cdot(x_0+d) = h \Rightarrow (1)\ \frac{h}{\tan g(\alpha)} = x_0$$

$$(2)\ \frac{h}{\tan g(\beta)} - d = x_0$$

Calculemos entonces x_1

Como $\gamma > 90°$; $\gamma > \pi/2 \Rightarrow \tan g\,\gamma < 0$; ∴ para que sea consistente se multiplicará por menos.

$$-\tan g(\gamma) = \frac{h}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{-h}{\tan g(\gamma)}$$

. Entonces una vez que ha transcurrido un tiempo t_1 la avioneta se ha desplazado una distancia $x_0 + x_1$, y como se sabe que se mueve a velocidad constante se tiene que esta se encuentra dada por la forma.

$$|\vec{v}| = \frac{x_0 + x_1}{t_1} = \left(-\frac{h}{\tan(\gamma_1)} + \frac{h}{\tan(\beta)} - d\right)\cdot\frac{1}{t_1} \quad (\text{Usando } (2))$$

$$= \left(-\frac{g t_1^2}{2\tan\gamma} + \frac{g t_1^2}{2\tan\beta} - d\right)\cdot\frac{1}{t_1} \quad \text{usando } h = \frac{g t_1^2}{2}$$

$$= \left(-\frac{g t_1}{2\tan(\gamma_1)} + \frac{g t_1}{2\tan\beta} - \frac{d}{t_1}\right) = \left(\frac{g t_1}{2}\right)\left(\frac{1}{\tan(\beta)} - \frac{1}{\tan(\gamma_1)} - \frac{d\,2}{g t_1^2}\right)$$

• Como la velocidad va en contra del sistema de referencia se tiene que

$$-|\vec{v}| = \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{g t_1}{2}\left(\frac{2d}{g t_1^2} + \frac{1}{\tan(\gamma_1)} - \frac{1}{\tan(\beta)}\right)$$

▶ Como la distancia entre la zona A y la zona B es d, la diferencia temporal entre una entrega y la otra corresponde a lo que se demora el avioneta en recorrer dicha distancia.

Sea Δt el tiempo de diferencia entre la primera entrega y la 2°. Se tiene que

$$\frac{d}{\Delta t} = |\vec{v}| \Rightarrow \frac{d}{\Delta t} = \frac{g t_1}{2}\left(\frac{1}{\tan(\beta)} - \frac{1}{\tan(\gamma_1)} - \frac{2d}{t_1^2 g}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\,2}{g t_1\left(\frac{1}{\tan(\beta)} - \frac{1}{\tan(\gamma_1)} - \frac{2d}{t_1^2 g}\right)} = \Delta t}$$

▶ Notar que este problema puede ser resuelto usando únicamente consideraciones geométricas entre las partes y la definición de rapidez. Pero se ha optado por un desarrollo cinemático.

Pauta Auxiliar #3

6/Abril/2016

P1)

a) P.D.Q: $V_f^2 - V_0^2 = 2a(x_f - x_0)$

(1) $V_f = V_0 + a \cdot t$

(2) $x_f = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

De (1) $\Rightarrow \frac{V_f - V_0}{a} = t$

De (2) $\Rightarrow x_f - x_0 = \frac{1}{2a}(2a \cdot V_0 \cdot t + a^2 \cdot t^2)$

(1) en (2)

$$2a(x_f - x_0) = 2\cancel{a} \cdot V_0 \left(\frac{V_f - V_0}{\cancel{a}}\right) + \cancel{a^2}\left(\frac{V_f - V_0}{\cancel{a}}\right)^2$$

$$2a(x_f - x_0) = 2V_0V_f - 2V_0^2 + V_f^2 - 2V_fV_0 + V_0^2$$

* es necesario que exista $\vec{V_0}$ de lo contrario si $\vec{V_0} = 0 = \vec{x_0}$ no habría movimiento.

$$2a(x_f - x_0) = -2V_0^2 - V_f^2 + V_0^2$$

$$2a(x_f - x_0) = V_f^2 - V_0^2$$

b) P.D.Q: $y = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{V_0^2}(1 + \tan^2(\alpha))$

con $\vec{x_0} = \vec{0}$

(1) $\vec{V_0} = V_0 \cos(\alpha)\,\hat{x} + V_0 \sin(\alpha)\,\hat{y}$

(2) $x = V_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$ $[x_0 = 0]$

(3) $y = V_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ $[y_0 = 0]$

De (2) $\Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cdot \cos(\alpha)}$ (*)

(*) en (3)

$$y = \cancel{V_0} \cdot \sin(\alpha)\left(\frac{x}{\cancel{V_0} \cdot \cos(\alpha)}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 \cdot \cos(\alpha)}\right)^2$$

$$y = \underbrace{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}_{\tan(\alpha)} \cdot x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2}\left(\frac{1}{\cos^2(\alpha)}\right)$$

$$y = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2}\left(\frac{1}{\cos^2(\alpha)}\right)$$

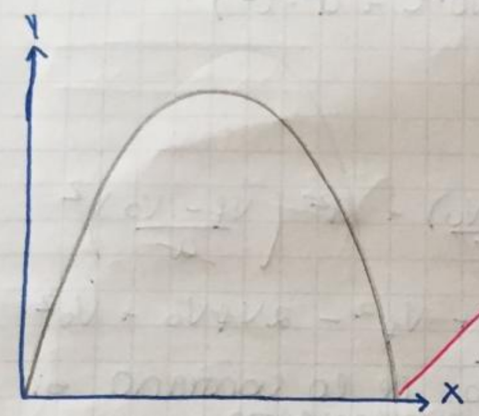
Recordar que: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad / \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \cancel{\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}^{\,1} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\Rightarrow y = x\tan(\alpha) - \frac{1}{2}\frac{g x^2}{V_0^2}(1 + \tan(\alpha)) \quad \blacksquare$$



$$x = \sin(2\alpha) \cdot \frac{V_0^2}{g}.$$

c) P.D.Q. ¿X vuelo? (también alcance máximo)

$$0 = y = x\left(\tan(\alpha) - \frac{1}{2}\frac{gx}{V_0^2}(1 + \tan^2(\alpha))\right)$$

i) $x_1 = 0$ **(posición inicial)**

ii) $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2}(1 + \tan^2(\alpha)) \cdot x$

$$\frac{2\tan(\alpha) \cdot V_0^2}{g(1 + \tan^2(\alpha))} = X\text{ vuelo}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot V_0^2}{g\,(1/\cos^2(\alpha))} = X\text{ vuelo}$$

$$2\frac{\sin(\alpha)}{\cancel{\cos(\alpha)}} \cdot \cos^{\cancel{2}}(\alpha) \cdot \frac{V_0^2}{g} = X\text{ vuelo}$$

Recordar

$sen\ \alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

$$2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{V_0^2}{g} = X\text{ vuelo}.$$

$$X\text{ vuelo} = \sin(2\alpha)\frac{V_0^2}{g}$$

$\blacksquare$

d) α? $\Rightarrow$ X_{vuelo} sea la máxima posible

$$x = \sin(2\alpha)\,\frac{V_0^2}{g}$$

$$\downarrow$$

$$-1 \leq \sin(2\alpha) \leq 1$$

$$\sin(2\alpha) = 1$$

$$\sin(\beta) = 1 \Rightarrow \beta = \pi/2$$

$$2\alpha = \pi/2$$

$$\alpha = \pi/4 \quad (45^\circ)$$

e) Altura máxima (para cualquier α)

$$X_{vuelo} = \sin(2\alpha)\,\frac{V_0^2}{g}$$

$$X_{max} = \frac{1}{2} X_{vuelo} \quad \text{(simetría parábola)}$$

$$X_{max} = \frac{(2\alpha)\cdot V_0^2}{2g} \quad \left[\frac{\cancel{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha)\,V_0^2}{\cancel{2}g}\right]$$

$$y = \tan(\alpha)\cdot x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2}\,(1 + \tan^2(\alpha))$$

$$y = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2}\cdot\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

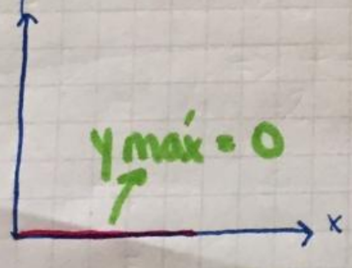
$$y = \frac{\sin(\alpha)}{\cancel{\cos(\alpha)}}\cdot\frac{\sin(\alpha)\cdot\cancel{\cos(\alpha)}\,V_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{\cancel{g}\cdot\sin^2(\alpha)\,\cancel{\cos^2(\alpha)}}{\cancel{V_0^2}\,\cancel{\cos^2(\alpha)}}\frac{V_0^{\cancel{4}\,2}}{g^{\cancel{2}}}$$

$$y = \frac{V_0^2}{g}\cdot\sin^2(\alpha) - \frac{1}{2}\frac{V_0^2\sin^2(\alpha)}{g}$$

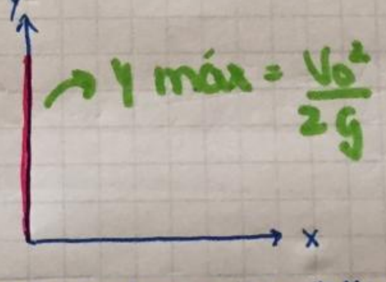
$$y_{max} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\sin^2(\alpha)$$

Casos típicos:

$\alpha = 0$

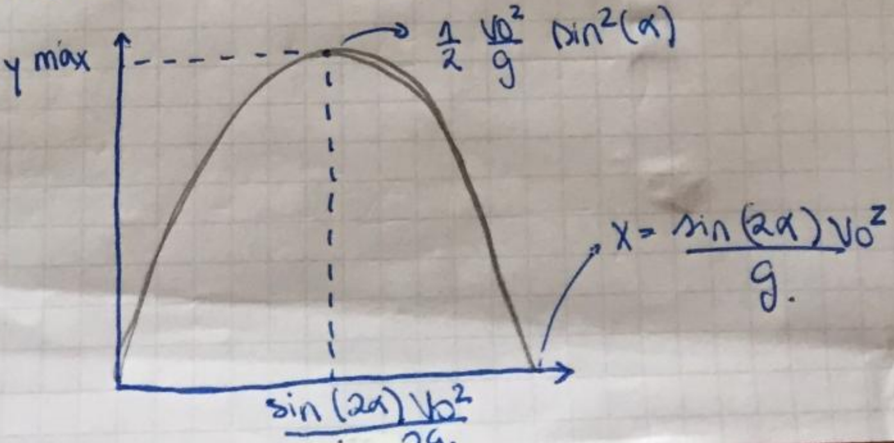


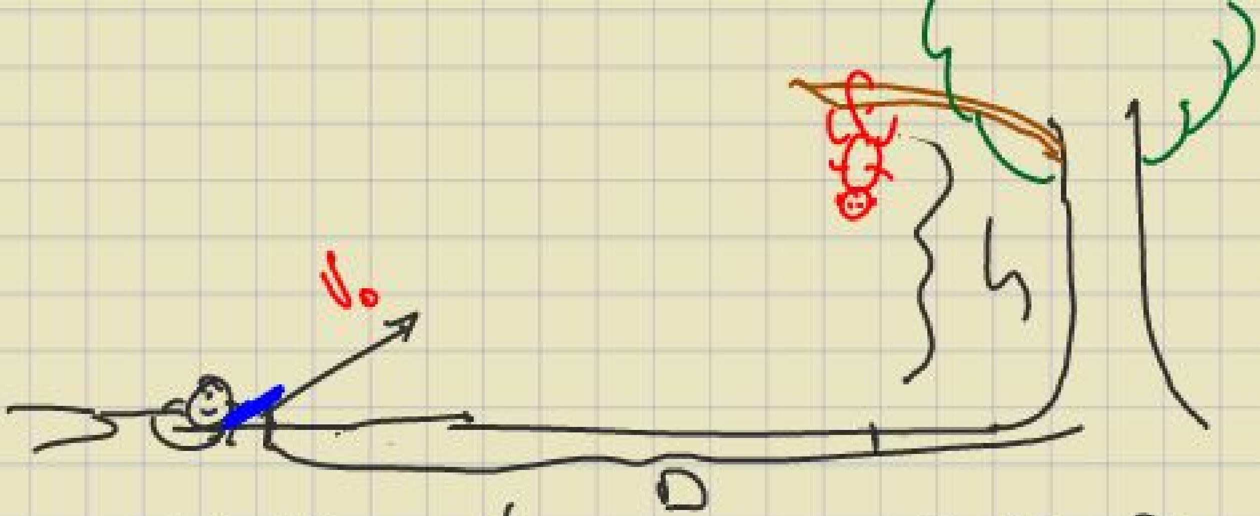
$\alpha = \pi/2$

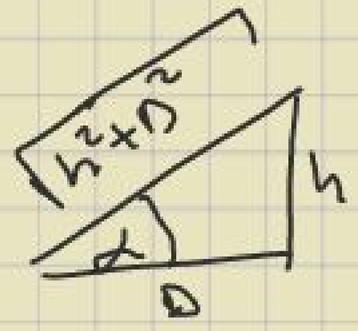


Porque sera movimiento horizontal

movimiento solo vertical







$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+D^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{h^2+D^2}}$$

$$x_p(t) = V_0 \cos\alpha\, t \qquad X_m(t) = D$$

$$y_p(t) = V_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{g}{2}t^2 \qquad y_m(t) = h - \frac{g}{2}t^2$$

En el momento de la colision, $x_m(t^*) = x_p(t^*)$ Para algun t^*
$y_m(t^*) = y_p(t^*)$

$$x_p(t^*) = x_m(t^*)$$

$$V_0 \cos\alpha\, t^* = h\cot g\alpha$$

$$\boxed{t^* = \frac{h}{V_0 \operatorname{sen}\alpha}}$$

$$y_m(t^*) = y_p(t^*)$$

$$h - \cancel{\frac{g}{2}t^{*2}} = V_0\cos\alpha\, t^* - \cancel{\frac{g}{2}t^{*2}}$$

$$\boxed{t^* = \frac{h}{V_0\cos\alpha}}$$

Notemos que **NO** aporta info adicional, esto lo veremos despues

Imponemos la colision cuando el mono llega al suelo.

$$y_m(t^*) = h - \frac{g}{2}\frac{h^2}{V_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha} \overset{!}{=} 0$$

$$h = \frac{2V_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{\frac{gh}{2}}\cdot\frac{\sqrt{D^2+h^2}}{h}$$

b) Si no existiera "suelo" y tanto mono como proyectil pueden seguir bajando indefinidamente se tendra que siempre el proyectil alcanza al monito