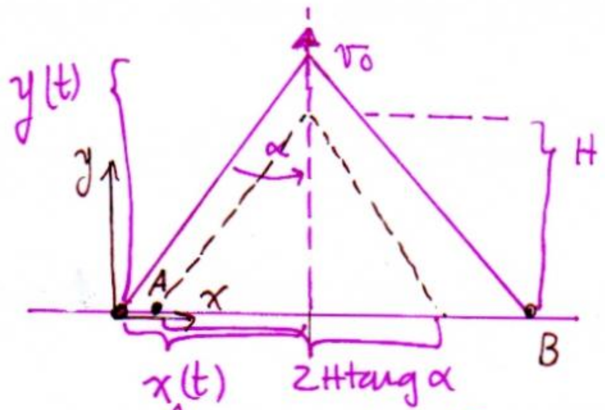
PAUTA P1 AUXILIAR #2

Como nos interesa notar cómo afecta el movimiento vertical de la ampolleta con su pantalla sobre la tortuga, vamos a descomponerla y consideraremos únicamente su componente horizontal, notando que el ángulo α indica la apertura de la pantalla hacia un lado.



Ecuación Itinerario Ampolleta

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t + \cancel{\tfrac{1}{2} a \cdot t^2}^{\,0}$$

$$= H + v_0 \cdot t$$

* Como nos interesa la componente horizontal aplicamos tang. α.

$$\tan g\,\alpha = \frac{x_A(t)}{y(t)} \Rightarrow y(t) \cdot \tan\alpha = x_A(t)$$

$$\Rightarrow x_A(t) = \tan g(\alpha) \cdot [H + v_0 \cdot t] \rightarrow \text{Indica apertura lateral.}$$

- se sabe que en el instante $t=0$ la tortuga y el comienzo de la pantalla de luz se encuentran en la misma posición A, por lo que la distancia que separa a la tortuga del eje por el cual sube la ampolleta es de $H \cdot \tan g(\alpha)$. Si consideramos que el otro extremo de luz es una partícula podemos encontrar el tiempo donde se encuentre con la tortuga, intersectando ambas ecuaciones itinerario

Ecuación Extremo B luz: $\boxed{x_B(t) = 2H \tan g(\alpha) + \tan g\,\alpha\,[H + v_0 t] \quad (1)}$

Ecuación tortuga: $\boxed{T(t) = u_0 \cdot t. \quad (2)}$

¿Cuánto se demora en salir de la zona iluminada?

t^* = corresponde al instante cuando el extremo B de la pantalla se encuentra con la tortuga.

Igualando (1) y (2)

$$u_0 t^* = 2H\tan(\alpha) + \tan\alpha\,[H + v_0 t^*]$$

$$u_0 t^* = \tan(\alpha)\,[2H + H + v_0 t^*]$$

$$u_0 t^* = \tan(\alpha)\cdot 3H + \tan(\alpha)\cdot v_0 t^*$$

$$t^*\,[-v_0\cdot\tan(\alpha) + u_0] = \tan(\alpha)\cdot 3H$$

$$\Rightarrow \boxed{t^* = \frac{3H\cdot\tan(\alpha)}{[u_0 - v_0\tan(\alpha)]}}$$ = tiempo que demora en salir de la zona iluminada.

¿Existe la posibilidad que quede atrapada?

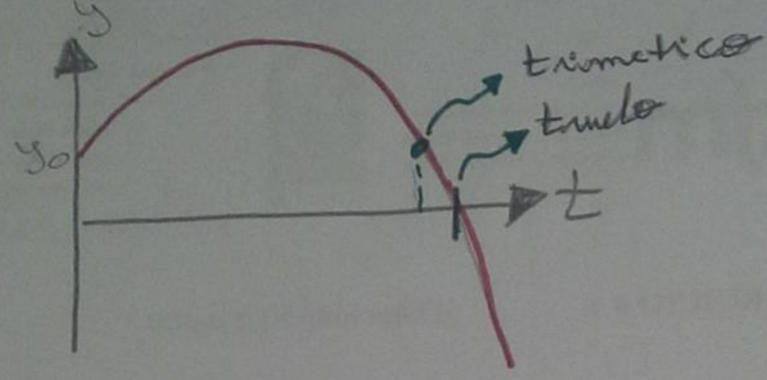
→ Notar de la respuesta anterior que dicho resultado se puede indeterminar si su denominador es 0, lo cual en un sentido físico significa que tarda infinito tiempo en salir de la zona iluminada, lo que en la práctica significa que no sale.

$$u_0 - v_0\tan(\alpha) = 0$$ [Condición para no salir de zona iluminada]

$$u_0 = v_0\tan(\alpha)$$

$$\boxed{\frac{u_0}{v_0} = \tan(\alpha)}$$ → si la razón entre las rapideces es igual a la tang (α) la tortuga queda atrapada.

(a) Bosqueje el gráfico y vs t. ①



I.- Separe el movimiento en el trayecto hacia arriba y hacia abajo.

(a) ¿Altura MAXIMA? (y_{MAX}) [Subida]

$V_f = 0$ } Condición de borde

En altura maxima se cumple

$$V_f = V_0 - gt \Rightarrow 0 = V_0 - gt$$

$$t_{MAX} = \frac{V_0}{g}$$

$$y_f = y_0 + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_{MAX} = y_0 + V_0\left(\frac{V_0}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0}{g}\right)^2$$

Evaluo en t_{MAX} para obtener altura maxima y_{MAX}

$$y_{MAX} = y_0 + \frac{V_0^2}{2g}$$

(b) Calcule el tiempo t para la siguiente altura: [subida] ②

$$y^* = y_0 + \frac{V_0^2}{g}$$

Interprete.

$$y_f = y_0 + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\cancel{y_0} + \frac{V_0^2}{g} = \cancel{y_0} + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = t^2 - \frac{2V_0 t}{g} + \frac{2V_0^2}{g^2}$$

$$t_f = \frac{-\left(\frac{-2V_0}{g}\right) \pm \sqrt{\frac{4V_0^2}{g^2} - 4(1)(2)\frac{V_0^2}{g^2}}}{2}$$

$$t_f = \frac{V_0}{g} \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{g^2} - \frac{2V_0^2}{g^2}}$$

$$\left.t_f = \frac{V_0}{g} \pm \sqrt{-\frac{V_0^2}{g^2}}\right\} \# \not{C}$$

$y^* > y_{MAX} \Rightarrow \nexists$ solución real al problema

$\blacksquare$

(C) Velocidad final en el suelo usando

(i) $y_f = y_i + V_i t + \frac{1}{2} a t^2$

(ii) $V_f^2 = V_i^2 + 2a(y_f - y_i)$

Notemos que $t_i = \frac{V_0}{g} \wedge t = t_f - t_i$ · Porque ya transcurrió un tiempo (el de subida) y ahora calculamos desde ese tiempo hasta el suelo

$\wedge V_i = 0$

$\wedge y_i = y_0 + \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}$ } Se calcula desde la altura máxima

(i) Condición de estar en el suelo $\Rightarrow y_f = 0$

$$y_f = y_i + \cancel{V_i t}^{\,0} - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = \left(y_0 + \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(t_s - \frac{V_0}{g}\right)^2$$

$$\left(y_0 + \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\right)\frac{2}{g} = \left(t_s - \frac{V_0}{g}\right)^2$$

$$\frac{2y_0}{g} + \frac{V_0^2}{g^2} = \left(t_s - \frac{V_0}{g}\right)^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{2y_0}{g} + \frac{V_0^2}{g^2}} = t_s - \frac{V_0}{g}$$

(1)

¿cuál usar ±? (4)

$$t_s = \frac{V_0}{g} \pm \sqrt{\frac{2y_0}{g} + \frac{V_0^2}{g^2}}$$

$$t_s = \frac{V_0}{g} \pm \frac{V_0}{g}\sqrt{1 + \frac{2y_0 g}{V_0^2}}$$

$$t_s = \frac{V_0}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2y_0 g}{V_0^2}}\right)$$

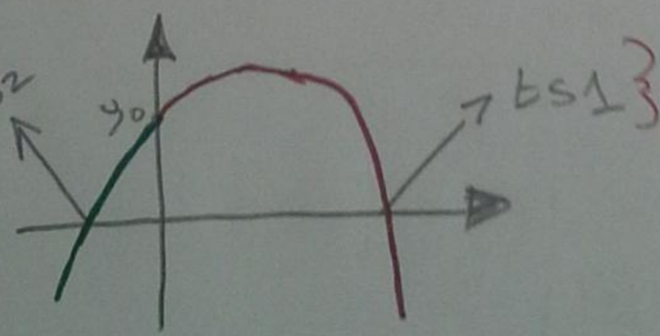
$$t_{s_1} = \frac{V_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2y_0 g}{V_0^2}}\right) > 0$$

$$t_{s_2} = \frac{V_0}{g}\left(1 - \underbrace{\sqrt{1 + \frac{2y_0 g}{V_0^2}}}_{\text{es mayor a } 1}\right)$$

$$\Rightarrow t_{s_2} < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{s_1} = \frac{V_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2y_0 g}{V_0^2}}\right)}$$

negativo el cual no pertenece al movimiento



positivo y corresponde al que buscábamos

interpretar !!

Ahora la Velocidad final

$$v_f = v_i - g(t_f - t_i)$$

Recordar

$t_i = \frac{v_0}{g}$

$v_i = 0$

$$v_f = 0 - g\left(\frac{v_0}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2y_0 g}{v_0^2}}\right) - \frac{v_0}{g}\right)$$

$$v_f = -g\left(\cancel{\frac{v_0}{g}} + \frac{v_0}{g}\sqrt{1+\frac{2y_0 g}{v_0^2}} - \cancel{\frac{v_0}{g}}\right)$$

$$v_f = -v_0\sqrt{1+\frac{2y_0 g}{v_0^2}}$$

$$\boxed{v_s = -\sqrt{v_0^2+2y_0 g}}$$

(ii) $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$

Recordar

$x_i = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$

$$v_s^2 = 0^2 - 2g\left(0 - y_0 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\right)$$

$$v_s^2 = (2gy_0 + v_0^2)$$

$$v_s = \pm\sqrt{v_0^2 + 2y_0 g}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_s = -\sqrt{v_0^2+2y_0 g}}$$

se elige negativo porque es velocidad en descenso !!

...alizar el Movimiento sin separar y corroborar que los resultados son consistente la parte I

(a) tiempo en el suelo

Recordar

$$y_f = y_i + v_i t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Bigg| \quad \left.\begin{matrix} y_i = y_0 \\ v_i = V_0 \\ t_i = 0 \end{matrix}\right\} \text{Dado por el problema}$$

$$0 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = t^2 - \frac{2V_0}{g} t - \frac{2y_0}{g}$$

Usando cuadrático y ordenando

$$t_f = \frac{V_0}{g} \pm \frac{V_0}{g} \sqrt{1 + \frac{2g y_0}{V_0^2}}$$

$$t_s = \frac{V_0}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2g y_0}{V_0^2}} \right)$$ ☑

igual a la parte I (más fácil)

(b) Velocidad en el suelo con:

(1) $V_f = V_i + a t$

(2) $V_s^2 - V_1^2 = 2a(x_f - x_i)$

(1) $$V_s = V_0 - \cancel{g} \left(\frac{V_0}{\cancel{g}} \right) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2g y_0}{V_0^2}} \right)$$

$$V_s = \cancel{V_0} - \cancel{V_0} - V_0 \sqrt{1 + 2\frac{g y_0}{V_0^2}}$$

$$V_S = -V_0\sqrt{1+\frac{2gy_0}{V_0^2}} = -\sqrt{V_0^2+2gy_0} \quad \blacksquare$$

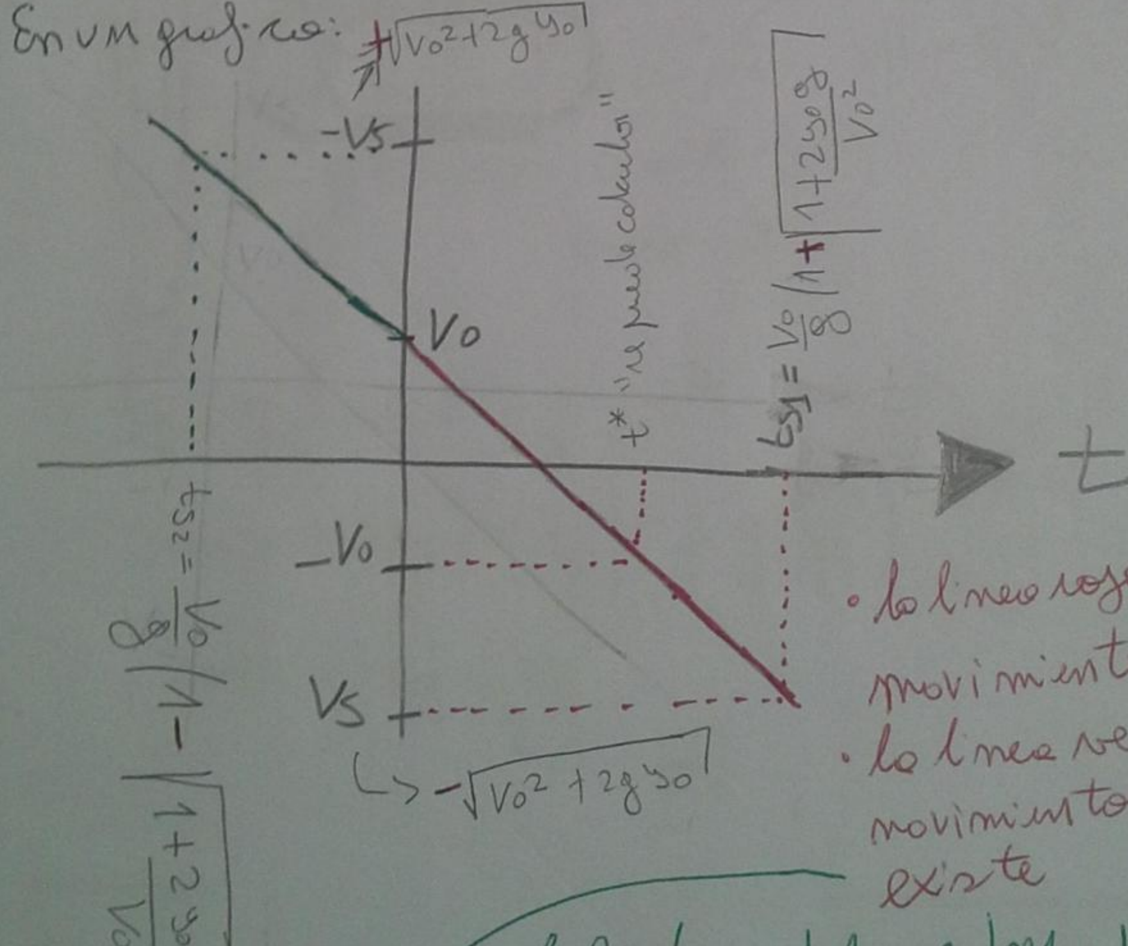
(ii) $V_f^2 = V_i^2 + 2a(x_f - x_i)$ | $x_i = y_0$

$V_S^2 = V_0^2 - 2g(0 - y_0)$ | $x_f = 0 \rightsquigarrow$ nivel del suelo

$V_S^2 = V_0^2 + 2gy_0 \Rightarrow \underbrace{V_S = \pm\sqrt{V_0^2+2gy_0}}_{\text{Se elige el negativo por estar cayendo}}$

$$V_S = -\sqrt{V_0^2+2gy_0}$$

En un gráfico:

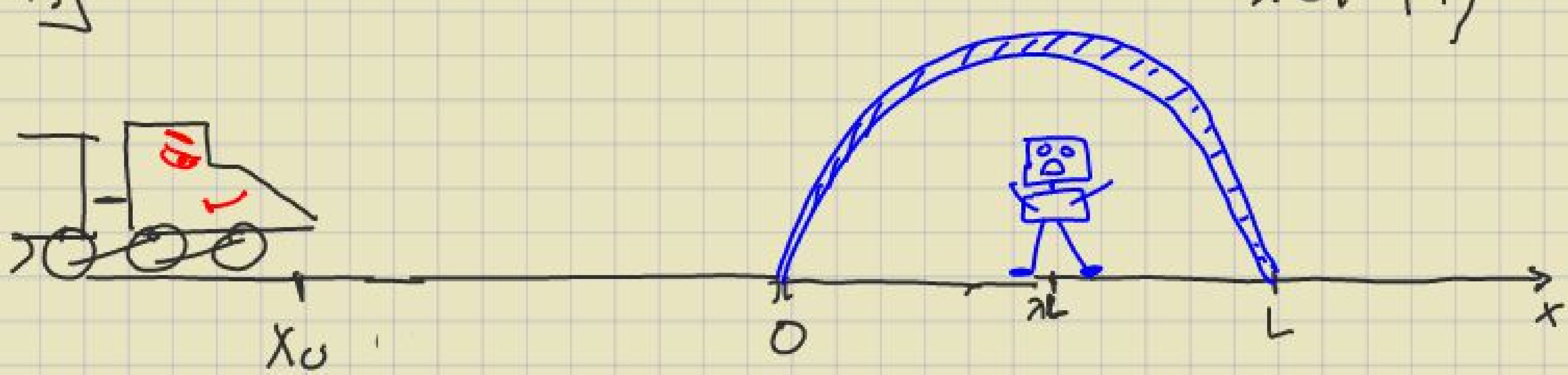


- la línea roja es el movimiento real
- la línea verde es el movimiento que no existe

$\hookrightarrow$ lo fundamental es saber interpretar!!

P3)

$\lambda \in (0,1)$



Observación: "X_0" no es conocido!!

Estrategia:

Dividiremos el problema en 2 partes
① el robot decide huir hacia la izquierda
- Escribimos las Ecs. de Movimiento del tren y el robot.
- Imponemos el encuentro en un instante t^* como $X_T(t^*) = X_r(t^*) = 0$ despejamos X_0 (que no era dato) en función de V_0 y datos conocidos.

② el robot decide huir hacia la derecha
- Escribimos las ecs. de movimiento $X_T(t)$ y $X_r(t)$
- Imponemos el encuentro en $x=L$ en un instante $\bar{t}$ como $X_T(\bar{t}) = X_r(\bar{t}) = L$ usamos el valor obtenido de X_0, y despejamos V_0.

Desarrollo:

① huye hacia la izquierda

$X_T(t) = X_0 + V_0 t$ (tren)
$X_r(t) = \lambda L - \frac{a}{2} t^2$ (robot)

colisión en t^* en $x = 0$

$X_T(t^*) = 0$
$X_0 + V_0 t^* = 0$
$t^* = -\frac{X_0}{V_0}$

Ojo!! como $X_0 < 0$ el tiempo es positivo.

$$X_r(t^*) = \lambda L - \frac{a}{2}\left(-\frac{X_0}{V_0}\right)^2 = 0$$

$$\lambda L = \frac{a}{2}\frac{X_0^2}{V_0^2}$$

$$X_0^2 = \frac{2\lambda L V_0^2}{a} \Rightarrow X_0 = \pm\sqrt{\frac{2\lambda L V_0^2}{a}}$$

$$\boxed{X_0 = -\sqrt{\frac{2\lambda L}{a}}\, V_0}$$

(Nos quedamos con la solución negativa puesto que sabemos que el tren parte a la izquierda del puente)

② huye a la derecha:

$X_T(t) = X_0 + V_0 t$
$X_r(t) = \lambda L + \frac{a}{2} t^2$

Imponemos la colisión en un $\bar{t}$, en $x=L$.

$$X_T(\bar{t}) = X_0 + V_0 \bar{t} = L$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \frac{L - X_0}{V_0}$$

$$x_r(\bar{t}) = \lambda L + \frac{a}{2}\left(\frac{L-x_0}{v_0}\right)^2 = L$$

Sabíamos que $\underline{\underline{x_0 = -\sqrt{\frac{2\lambda L}{a}}\, v_0}}$

$$\frac{a}{2v_0^2}(L-x_0)^2 = L - \lambda L$$

$$L^2 - 2Lx_0 + x_0^2 = \frac{2v_0^2 L(1-\lambda)}{a}$$

$$L^2 + 2L\sqrt{\frac{2\lambda L}{a}}\, v_0 + \frac{2\lambda L}{a} v_0^2 = \frac{2v_0^2 L}{a}(1-\lambda)$$

Agrupamos términos según v_0^2; v_0 y el resto

$$v_0^2 \cdot \left(\frac{2L}{a}(1-\lambda) - \frac{2L}{a}\lambda\right) - v_0 \cdot \left(2L\sqrt{\frac{2\lambda L}{a}}\right) - L^2 = 0$$

$$v_0^2 \cdot \frac{2L}{a}(1-2\lambda) - 2L\sqrt{\frac{2\lambda L}{a}} \cdot v_0 - L^2 = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{L}$$

$$v_0^2 \cdot \underbrace{\frac{2}{a}(1-2\lambda)}_{A} - \underbrace{2\sqrt{\frac{2\lambda L}{a}}}_{B}\, v_0 \underbrace{- L}_{C} = 0 \Longrightarrow v_0 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Debe ser!! ≥ 0

$$B^2 - 4AC = \frac{8\lambda L}{a} + \frac{4 \cdot 2}{a}(1-2\lambda) \cdot L = \frac{8L}{a}\left[\lambda + (1-2\lambda)\right] = \frac{8L}{a}(1-\lambda)$$

Luego el problema solo tiene solución si $1-\lambda \geq 0$

$\underline{\underline{\boxed{\lambda < 1}}}$ Condición para λ.

Así

$$v_0 = \frac{2\sqrt{\frac{2\lambda L}{a}} \pm \sqrt{\frac{8L}{a}(1-\lambda)}}{2 \cdot \frac{2(1-2\lambda)}{a}} = \frac{2\left[\sqrt{\frac{2L\lambda}{a}} \pm \sqrt{\frac{2L}{a}(1-\lambda)}\right]}{2 \cdot \frac{2(1-2\lambda)}{a}}$$

$$v_0 = \frac{a\sqrt{\frac{2L}{a}}\left(\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{1-\lambda}\right)}{2(1-2\lambda)}$$

$\underline{\underline{\text{Caso 1}}}$: $\frac{\sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} > 1$

$$\frac{1}{\lambda} > 2$$

$$\boxed{\lambda < \frac{1}{2}}$$

Luego el denominador

$1 - 2\lambda > 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$ Denominador positivo ; y como $\sqrt{\lambda} < \sqrt{1-\lambda}$ debemos quedarnos con la solución $(+)$ para que $\underline{\underline{v_0 > 0}}$

Así el caso 1 será:

$$0 < \lambda < \frac{1}{2} \Rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{2La}\left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{1-\lambda}\right)}{2(1-2\lambda)}$$

Caso 2: $\frac{1}{2} < \lambda \Rightarrow \sqrt{\lambda} > \sqrt{1-\lambda}$

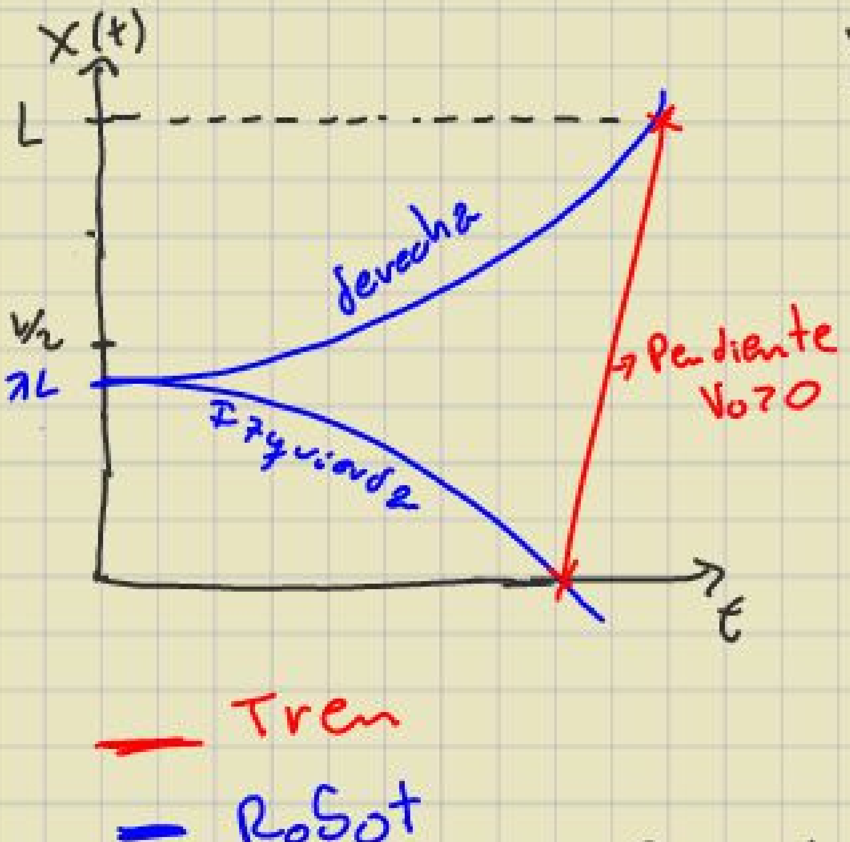
y el denominador: $1-2\lambda < 0$

luego V_0 sería siempre negativo así que se descarta la solución

Finalmente tenemos $V_0 = \sqrt{\frac{aL}{2}}\left[\frac{\sqrt{\lambda}+\sqrt{1-\lambda}}{1-2\lambda}\right]$

y λ queda acotado por ambos lados:

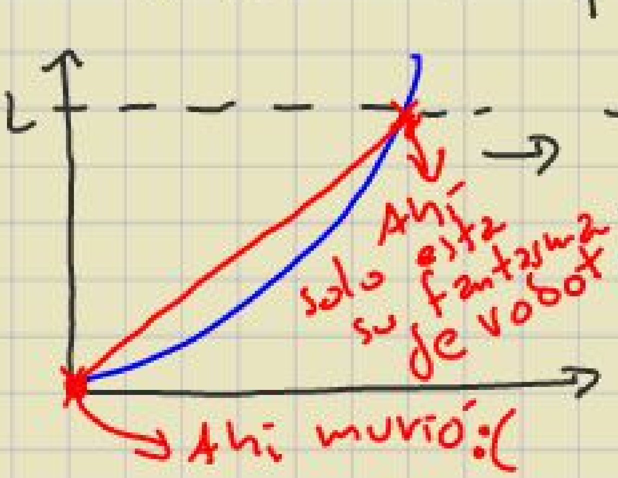
$$0 < \lambda < \frac{1}{2}$$



observaciones si $\lambda = \frac{1}{2}$, el tren debería tener velocidad "infinita" para alcanzar el robot en 0 y L. (recta roja vertical)

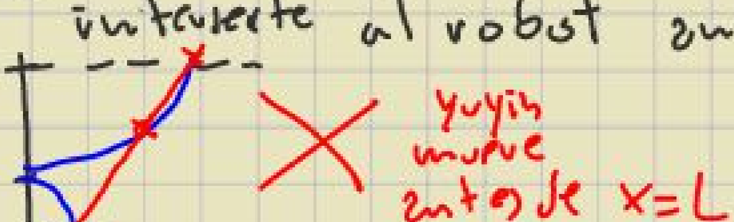
¿Que sucede con la cota inferior de λ?

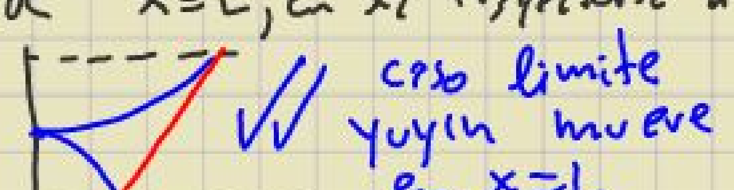
observemos que sucede si $\lambda = 0$



→ Tecnicamente yuyin murio antes de empezar a correr, es "la proyección" de su trayectoria la que se intersecta con el tren en $x=L$

¿Como lo solucionamos? Debemos evitar que el tren intersecte al robot antes de $x=L$, en la trayectoria a la derecha





¿Como expresamos esto físicamente?
Notemos que en el caso límite el tren llega con la misma velocidad que yuyin al puerto $x=L$

*** Si yuyin es más rápido en $x=L$, quiere decir que el tren lo "interceptó" (Mató) antes!!

Condición límite $V_o(\bar{t}) = V_r(\bar{t})$ con $\bar{t}$ el instante en que se cruzan en $x=L$

$$\sqrt{\frac{aL}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\sqrt{1-\lambda}}{1-2\lambda}\right) = a\cdot\bar{t} \rightarrow V_R(t) = at$$

del trayecto (2) tenimos $\bar{t} = \frac{L-x_o}{V_o}$ con $x_o = -V_o\sqrt{\frac{2\lambda L}{a}}$

$$\bar{t} = \frac{L+V_o\sqrt{\frac{2\lambda L}{a}}}{V_o} = \frac{L}{V_o} + \sqrt{\frac{2\lambda L}{a}}$$

$$\sqrt{\frac{aL}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\sqrt{1-\lambda}}{1-2\lambda}\right) = \left(\frac{L}{V_o}+\sqrt{\frac{2\lambda L}{a}}\right)a$$ → Ecuación para el λ_{min} con eso basta!!

$$\frac{\sqrt{\lambda}+\sqrt{1-\lambda}}{1-2\lambda} = \sqrt{\frac{2}{aL}}\frac{La}{V_o} + \sqrt{\frac{2}{a\cancel{L}}\cdot\frac{2\lambda \cancel{L}}{a}}\, a$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}+\sqrt{1-\lambda}}{1-2\lambda} = \frac{\sqrt{2La}}{V_o} + \frac{2}{\cancel{a}}\sqrt{\lambda}\cdot\cancel{a}$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}+\sqrt{1-\lambda}-2\sqrt{\lambda}(1-2\lambda)}{1-2\lambda} = \frac{\sqrt{2aL}}{V_o}$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}-2\sqrt{\lambda}+4\lambda\sqrt{\lambda}+\sqrt{1-\lambda}}{1-2\lambda} = \frac{\sqrt{2aL}}{V_o}$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}(4\lambda-1)+\sqrt{1-\lambda}}{1-2\lambda} = \frac{\sqrt{2aL}}{V_o} \quad /\ (\ )^2$$

$$\frac{\lambda(4\lambda-1)^2+2\lambda\sqrt{1-\lambda}+1-\lambda}{1-4\lambda+4\lambda^2} = \frac{2aL}{V_o^2}$$

Matraca innecesaria que no llegó a puerto.

¿Y aquí se despeja (??)