INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 19 de marzo de 2016

Índice general

Capítulo I

COMPLEMENTO MATEMATICO: Series y Aproximaciones.

I.1. SERIES

En esta sección estudiaremos algunas series que usaremos más adelante. La incluimos porque probablemente no es un material conocido para todos los alumnos.

I.1.1. Sucesiones

(**Ref.: Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica**, G. Thomas, Cap. XVI).

Una *sucesión* es un conjunto de símbolos

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...$$

que están en correspondencia biunívoca (es decir 1$\leftrightarrow$ 1) con la sucesión ordenada de los números naturales. Los símbolos $a_1, a_2, ...$ se denominan términos de la sucesión, de forma que el término *enésimo* es a_n, y se designa con la notación $\{a_n\}$.

Ejemplo

El término genérico $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, designa la sucesión

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1/2,\ a_3 = 1/3,\ ...\ 1/4, ...\ \{1/n\}\ ...$$

El término genérico $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$, designa la sucesión

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1/2,\ ...\ 1/4,\ \ 1/8, ...\ \{1/2^{n-1}\}\ , ...\square$$

¿Qué sucede si n crece indefinidamente? ¿Cuál es el valor de a_n en dicho caso?

Si es posible asociar a la sucesión $\{a_n\}$ un número L, tal que la diferencia $|L - a_n|$ sea tan pequeña como se quiera, para todos los valores de n suficientemente grande, diremos que el *límite* de la sucesión $\{a_n\}$ es L, y lo escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{I.1}$$

Mediante la frase:$|L - a_n|$ *es arbitrariamente pequeño para valores grandes de* n, se indica que para cualquier número positivo ϵ, corresponde un subíndice N tal que:

$$|L - a_n| < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad n > N. \tag{I.2}$$

O sea, todos lo términos que siguen al N–ésimo, están comprendidos entre $(L - \epsilon)$ y $(L + \epsilon)$.

Si tal límite no existe, entonces diremos que la sucesión es *divergente*.

I.1.2. Ejemplos de Series

Hagamos contacto con nuestra definición de sucesión, para definir formalmente las series.

Si $a_1,\ a_2,\ a_3, ...a_n, ...$ es una *sucesión* cualquiera de números o funciones, entonces mediante el símbolo

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

representaremos una sucesión deducida a partir de la primera y que llamaremos *serie*. (Sólo se diferencia de la definición utilizada en los primeros ejemplos en el número de elementos de la suma. Era finito en el primer caso y ahora es más general, puede ser infinito.)

Definimos S_n como las sumas parciales la sucesión hasta el término enésimo.

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n. \end{aligned}$$

El término enésimo de la sucesión S_n es la suma de los n primeros términos de la serie $\{a_n\}$.

Si esta sucesión posee un límite cuando n crece indefinidamente –de acuerdo a la definición dada anteriormente [I.1]–, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{I.3}$$

S es el valor de la secuencia S_n cuando $n \to \infty$. También podemos decir que la serie $\{S_n\}$ *converge* a S.

Si por el contrario la serie $\{S_n\}$ diverge, es decir, cada uno de las sumas parciales aumenta su valor continuamenten a medida que n crece, entonces definimos la serie $\{S_n\}$ como una serie divergente.

En este libro sólo nos interesan las series convergentes, puesto que son las únicas a las cuales les podemos asignar un significado concreto (un número).

Incluiremos al final del capítulos, sólo como una ilustración, un caso especial que se utiliza en física.

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de series, tanto finitas como infinitas.

Ejemplos:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{3}(2^n) \equiv 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14,$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{3}(1) \equiv 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n}(a^k) \equiv a^1 + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n,$$

$$\textstyle\sum_{k=4}^{6}(a^k) \equiv a^4 + a^5 + a^6, \qquad \text{donde a es un número arbitrario.}$$

Definición:

sigma $\equiv \sum$ indica que el sumando ($[a^k]$ en el último ejemplo) toma cada uno de los valores que recorre **k**, partiendo desde el límite inferior hasta el superior, a través de los enteros.

El límite superior en los dos primeros ejemplos es 3 y en el tercero no se deja explícito, n puede tomar cualquier valor entero. k lleva la contabilidad de los términos incluidos en la suma (va desde $k = 1$ hasta $k = n$, con n un número entero).

Es fácil demostrar la siguiente propiedad de las sumatorias:

$$\sum_{k=1}^{k=n} C\, a_k = C \sum_{k=1}^{k=n} a_k, \tag{I.4}$$

donde C es una constante que no depende de k. Basta recordar la sociatividad de los números reales: $C\, a_1 + C\, a_2 + C\, a_3 = C\, \{a_1 + a_2 + a_3\}$.

Ejemplo

Demuestre la igualdad entre las dos sumatorias indicadas:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (i)^3.$$

Solución

A continuación se incluye una demostración ingeniosa que hace uso del método gráfico para demostrar la igualdad. Escribiremos el mismo arreglo de números, enfrentados en la Figura anterior, pero ordenados de manera diferente.

La idea consiste en sumar los números de los arreglos agrupados en forma diferente, de manera que reflejen a cada una de las sumatorias propuestas. Esto está señalado en la Figura. Como los números en ambos arreglos son iguales, el valor de la suma debe ser el mismo.

En esta Figuras se suman, en ambos casos, los números de acuerdo a la caja que los contiene (rectangular o formando un ángulo recto). El valor de la suma de cada una de las cajas se indica al pie de la misma Figura.

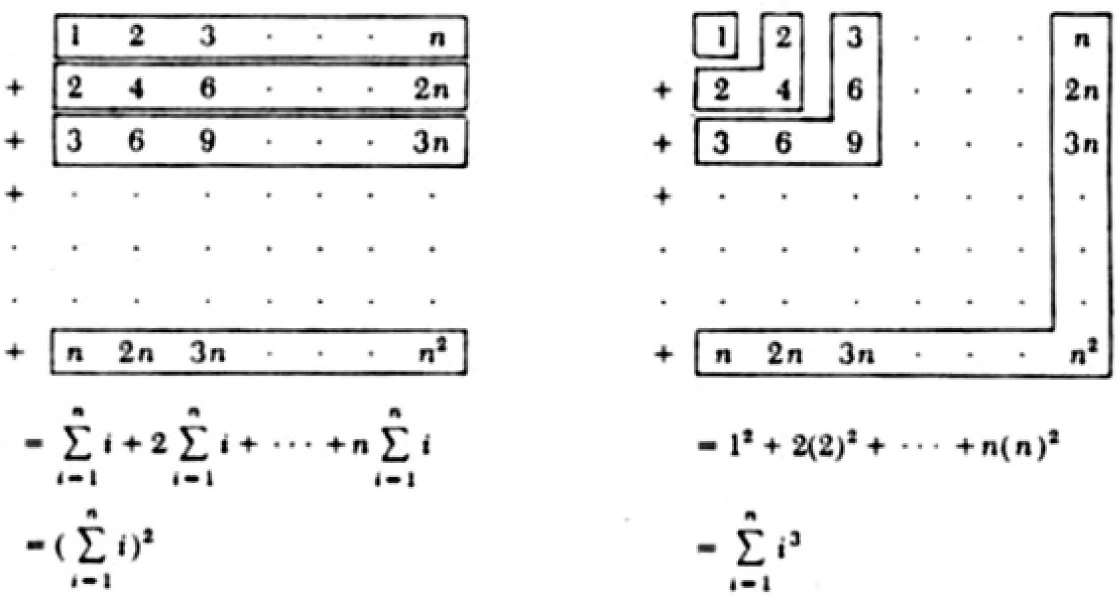


Figura I.1: (The College Mathematics Journal, Vol. 62, # 5, Dec. 89.)

En el caso del arreglo ubicado a mano izquierda, se ha sacado –usando la regla de factorización recién descrita– un factor común en cada una de las sumatorias individuales, que corresponde al número $2, 3, 4...n$, de acuerdo a la posición del rectángulo horizontal. En seguida, se saca la sumatoria de i como factor común, como se 9indica a continuación

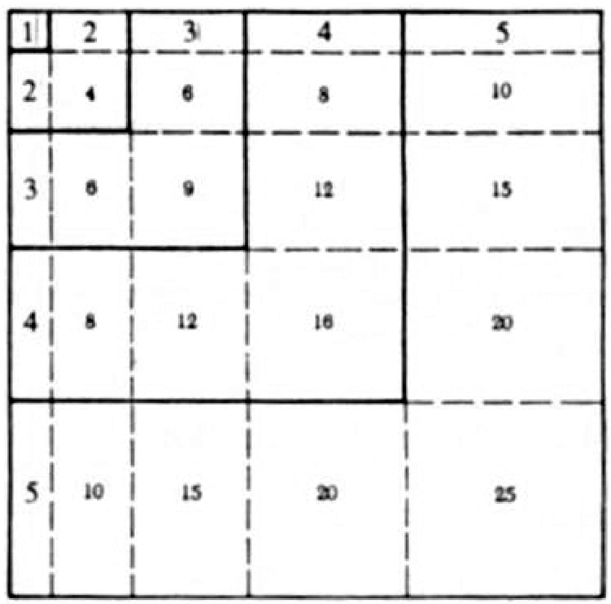
$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) + 3\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) + ... + n\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) = \left\{\sum_{i=1}^{i=n}(i)\right\}[1+2+3+...+n] = \left[\sum_{i=1}^{i=n} i\right]^2$$

Con esto calculamos el bloque de la izquierda.

Dejamos como ejercicio comprobar que los términos al pie del bloque de la derecha de la Figura corresponden a la suma de los números encerrados dentro de cada uno de los cajas en forma de ángulo recto.

Podemos poner en forma gráfica la opción que aparece a la derecha de la Figura I.1. esta es otra forma de visualizar la sumatoria: $\left[\sum_{i=1}^{i=n} i\right]^2$. Agrupamos los términos de forma que corresponde al *área de un terreno cuadrado* que tiene $\sum_{i=1}^{i=n} i$ metros (por dar una unidad de longitud) por lado. A continuación se dibuja el terreno a escala (la longitud 5, por ejemplo, tiene cinco unidades de largo) y se calcula el área en forma diferente. El número indicado dentro del cuadrado (o rectángulo), corresponde al valor del área de dicha figura. El truco radica en sumar las áreas considerando franjas en forma de ángulo recto, (una **L**). Con este método se verifica el resultado obtenido anteriormente.

□



Ejemplo

Dado un número real, arbitrario q, y un número entero N, se pide encontrar el valor de la siguiente suma:

$$S = \sum_{n=0}^{N} q^n = q^\circ + q^1 + q^2 + ... + q^N$$

A partir de la expresión encontrada aquí recuperar el resultado obtenido para la serie anterior.

Podemos encontrar el valor de S multiplicando ambos lados de la sumatoria por q,

$$q \bullet S = S + q^{N+1} - 1,$$

despejando S de esta ecuación, tenemos

$$S = (1 - q^{N+1})/(1 - q) = 1 + q^1 + q^2 + ... + q^N. \qquad \textbf{(I.5)}$$

Hemos encontrado el valor de S sin necesidad de sumar cada uno de los términos de la serie. Este resultado es válido para todos los valores de $q \neq 1$. Supongamos que $|q| < 1$ y hagamos crecer el valor de N indefinidamente, es decir, tomemos el valor límite de $N \to \infty$. En otras palabras, damos a N un valor muy grande, mayor que cualquier otro que uno pueda imaginar. En este caso

$$\lim_{N\to\infty} q^{N+1} = 0.$$

Este resultado adquiere sentido si uno considera el producto de un número, menor que la unidad por sí mismo. Y repite esta multiplicación tantas veces quiera. Por ejemplo, no importa lo pequeño que sea el número (positivo) que Ud. pueda imaginar (llamémosle ϵ, para ser específico), uno siempre puede encontrar un valor de N suficientemente grande, que haga $q^{N+1} < \epsilon$. (Verifique esta afirmación con una calculadora.)

Así

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ... = \frac{1}{1-q}, \qquad \textbf{(I.6)}$$

coincidiendo con lo demostrado anteriormente, usando sólo geometría.

Ejemplo

La fracción decimal periódica $0,317317317...$, representa un número *racional*.

a) Escriba este número como una suma infinita de términos.

b) Siendo un número racional, es posible escribirlo de la forma p/q. Usando el resultado de la parte a), encuentre el valor de p y q.

a) Primero notamos que este número, por ser una una fracción decimal periódica, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
0,317317317... &= 0,317 + 0,000317 + 0,000000317... \\
&\text{o de otra forma} \\
0,317317317... &= 0,317 + \frac{0,317}{10^3} + \frac{0,317}{10^6}... \\
0,317317317... &= 0,317\left\{1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + ...\right\} \\
0,317317317... &= 0,317\left\{\frac{1}{1-10^{-3}}\right\}.
\end{aligned}$$

En la última línea, usamos el resultado obtenido en [I.6]. Para poder expresarla como la razón entre dos enteros debemos escribirla de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
0,317317317... &= \frac{317}{10^3}\left\{\frac{1}{1-10^{-3}}\right\} \\
0,317317317... &= \left\{\frac{317}{10^3-1}\right\} = 317/999.\square
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Encuentre el valor de la siguiente suma para $n = 14$.

$$S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + ... + \overbrace{111111}^{\text{n–unos}}.$$

Indicación: Haga la suma de los tres primeros términos: $S_3 = 1 + 11 + 111 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 100$. En el caso general entonces será $S_n = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 10 + ...\square$.

I.2. Series con Infinitos Términos

En un gran número de casos los casos la suma involucra infinitos términos, no termina nunca. En este escenario, si la serie está bien definida (es decir, el valor de su suma es finito), ocurre que al escribirla explícitamente, cada uno de los términos que se agregan – a partir de un cierto valor de **k**–, van tomando valores (absolutos) decrecientes de acuerdo a un cierto criterio bien establecido (que no mencionaremos acá) que garantiza que la serie converge a valor finito. Este valor constituye el límite de la serie.

El concepto de serie infinita con su respectivo límite asociado, no es trivial y requiere más elaboración. El dominio de esta área no es fundamental en las materias de este libro. En general en física uno toma sólo los primeros términos de esta serie cuando plantéa un esquema de resolución de un problema. Sólo utilizaremos algunas de ellas para ilustrar aproximaciones conocidas. Proporcionan -además-, la posibilidad de utilizar el computador para convencerse de algunos resultados cuyas demostraciones analíticas van más allá de este curso.

Una serie que utilizaremos en los cálculos en física, principalmente en evaluar aproximaciones de funciones es

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... \tag{I.7}$$

Para que esta serie converga se debe verificar que $|x| < 1$. $|x|$ indica el valor absoluto de x.

Nota

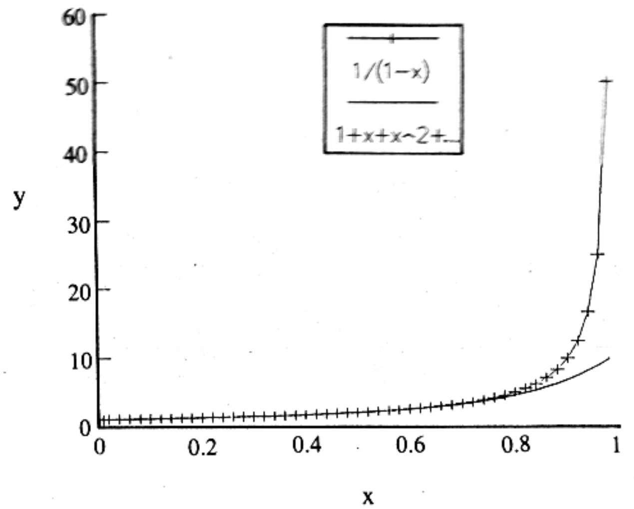


Figura I.2: *Comparación entre la función 1/(1 - x) (gráficada con +) y la aproximación polinomial, que incluye hasta potencias de orden 10 (línea continua). En la aproximación, se corta la serie infinita, manteniendo sólo los primeros términos.*

Rigurosamente se debe escribir:

$$S_n \equiv \sum_{k=0}^{k=n} x^k \equiv \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad \text{o} \quad S_\infty = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right). \tag{I.8}$$

S_n constituye una *sucesión* de números identificadas con n. El límite de esta sucesión para $n \to \infty$ (es decir para un **n** mayor que cualquier **n** que Ud. se pueda imaginar) se obtiene al verificar que a medida que **n** aumenta la suma se aproxima a un valor fijo que no depende de **n**. Este es el valor de S_∞. Debe ser un valor finito, de otra manera, como ya se señaló, el resultado no tiene ningún significado matemático. Verifiquemos que para $|x| < 1$, la serie anterior, con todos sus términos incluidos, se puede escribir en forma analítica:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = 1/(1-x). \tag{I.9}$$

Hay muchas formas de obtener esta identidad. Podemos comprobar este resultado graficando con un computador las siguientes dos funciones (ver Figura I.2) :

$$\begin{aligned} y(x) &= 1/(1-x), \qquad \text{y} \\ S_{10} &= 1 + x + x^2 + ... + x^{10}. \end{aligned}$$

Ejemplo

Demostraremos esta igualdad en forma geométrica utilizando proporciones: triángulos semejantes. Usaremos el triángulo rectángulo de la Figura I.2

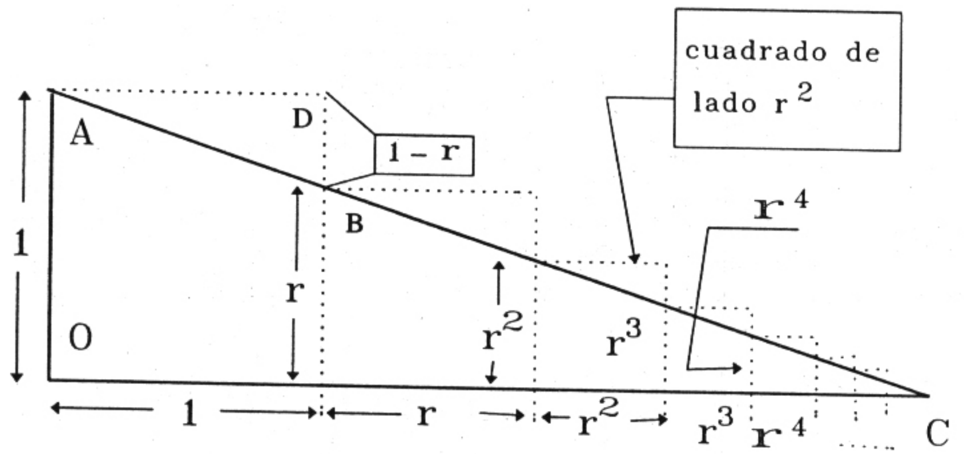


Figura I.3: *La semejanza entre el ΔOAC y el ΔADB permite demostrar la igualdad propuesta. A partir de OA, que hacemos unitario, se construye un cuadrado, este genera el segmento de longitud r, que genera otro cuadrado de longitud r^2...*

Se construye la siguiente estructura sobre el triángulo rectángulo: A partir del cateto más pequeño, que se toma de largo unitario (por definición, o si Ud. quiere, lo construye con dicho lado unitario) se construye un cuadrado perfecto. Con esto se genera un segmento (ver Figura) de largo r, a partir del cual se genera otro cuadrado de lado $r < 1$ como indica la Figura. Sucesivamente se construyen los cuadrados r^2, r^3... etc.

De la Figura , vemos que hay dos triángulos semejantes: $\Delta ADB \sim \Delta COA$, esto implica que existe una proporcionalidad entre sus lados correspondientes, que se indica a continuación

$$\frac{1}{(1-r)} = \frac{(1 + r + r^2 + r^3 + ...)}{1}.$$

Con este último paso completamos la demostración.

El valor que puede tomar r (o mejor utilizar la letra x) es arbitrario salvo que $|x| < 1$.

Si r (o $|x|$) es muy pequeño con respecto a la unidad, es decir $|x| << 1$ entonces

$$\frac{1}{1-x} \simeq (1 + x), \tag{I.10}$$

porque al multiplicar un número pequeño por sí mismo, se hace aún más pequeño. Comprobemos esto numéricamente: si $r = 10^{-3} = ,001$, entonces $x^2 = 10^{-3} \times 10^{-3} = 10^{-6} = ,000001$ y podemos apreciar que es realmente despreciable con respecto al primer término.

Esta última es una de las aproximaciones más frecuentes en el desarrollo de los problemas físicos.

Ejemplo

A continuación incluimos una serie con infinitos términos que es convergente y que es fácil de visualizar mediante una figura.

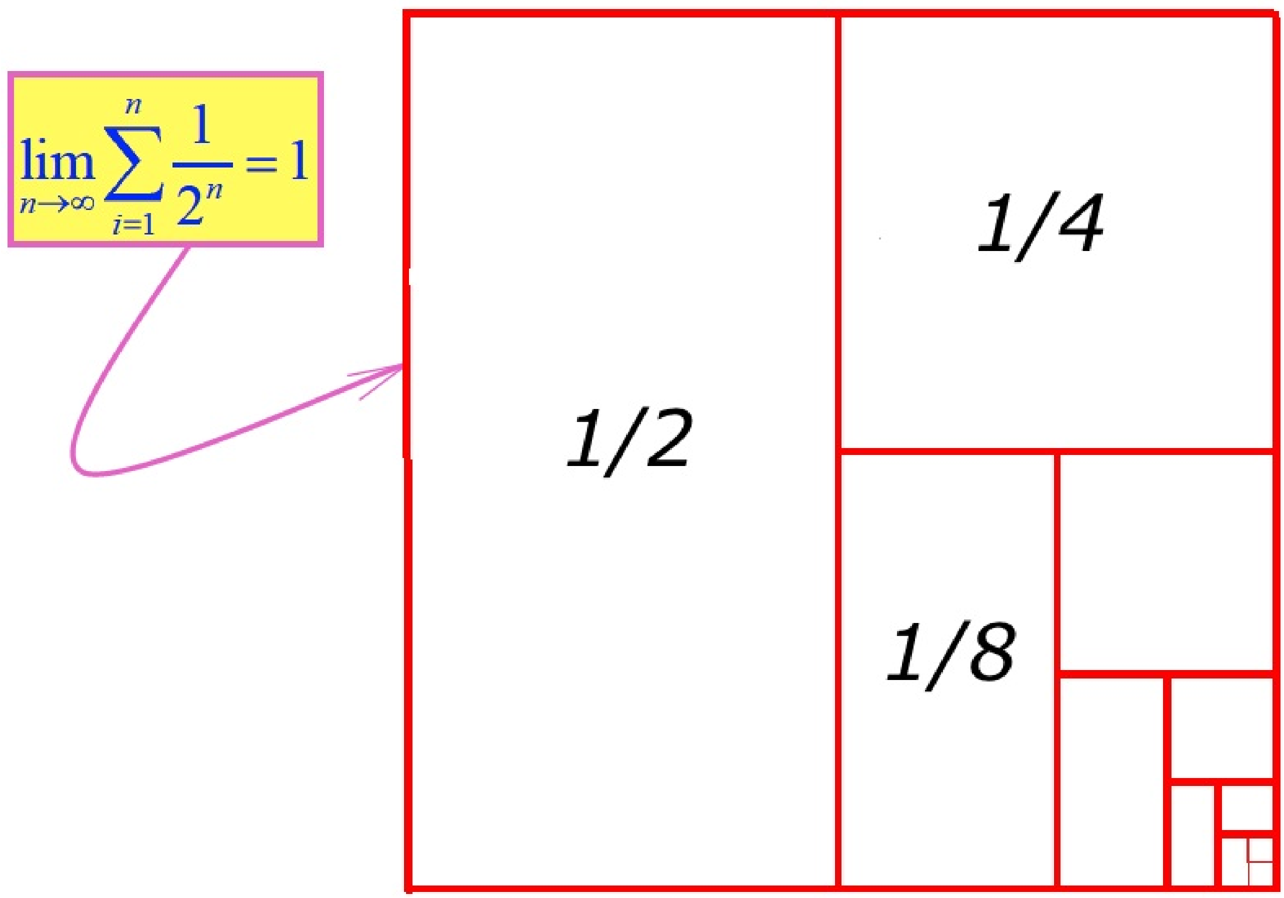


Figura I.4:

Ejemplo

La serie que se incluye a continuación es divergente, a pesar que a simple vista, no lo parece.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \tfrac{1}{n} \\
S &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n+1} + \ldots
\end{aligned}
$$

Utilice un computador para encontrar el número mínimo de términos de la serie $\sum 1/n$ que debe sumar, para que su valor sea mayor que 3. (Respuesta: 11) □

I.3. Series Recurrentes en Física

I.3.1. El binomio y el número e.

Una de las series que se presenta frecuentemente, es el desarrollo de de un binomio. La potencia enésima de un binomio es:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \ldots \\
&= \textstyle\sum_{\alpha=0}^{\infty} \displaystyle\frac{n!}{(n-\alpha)!}\frac{x^\alpha}{\alpha!}
\end{aligned}
\tag{I.11}
$$

La expresión que aparece en esta última línea es una forma compacta para representar la fórmula del binomio y contiene la expresión $n!$ *n factorial* que será definida a continuación. Conviene desarrollar esta suma para los casos más conocidos como una forma de familiarizarse con su significado.

- Esta serie tiene sólo $n+1$ términos **si** n es un entero positivo. En este caso la suma termina cuando $\alpha = n$. Si n no es un entero positivo, la suma prosigue hasta infinito.

- Corresponde al desarrollo usual del cuadrado de un binomio si $n = 2$, al cubo de un binomio si $n = 3$ ...

- Al final de esta sección generalizaremos este resultado para cualquier valor de n, real, negativo... .

- 3!, se lee: tres factorial y es una denominación para el siguiente producto:

$$
\begin{aligned}
3! &\equiv 3 \cdot 2 \cdot 1, \\
1! &\equiv 1, \\
0! &\equiv 1 \text{ (por definición).}
\end{aligned}
$$

En general

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \qquad \text{(I.12)}$$

$n!$ es un número que crece rápidamente. Compruébelo calculando 10! en un computador.

Probablemente la serie más célebre es la siguiente:

$$e^x \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \qquad \textbf{(I.13)}$$

Donde la letra **e** define, por convención, al número irracional $e = 2,71828...$ El valor de **e** se obtiene de la serie anterior si ponemos $x = 1$:

$$e^1 \equiv e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = 2,71828... \qquad \text{(I.14)}$$

Esta serie obedece las mismas propiedades que las potencias en una base cualquiera, a^x y precisamente por esa razón se define de esa forma. Por ejemplo:

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n}, \quad \text{también} \qquad e^0 = 1.$$

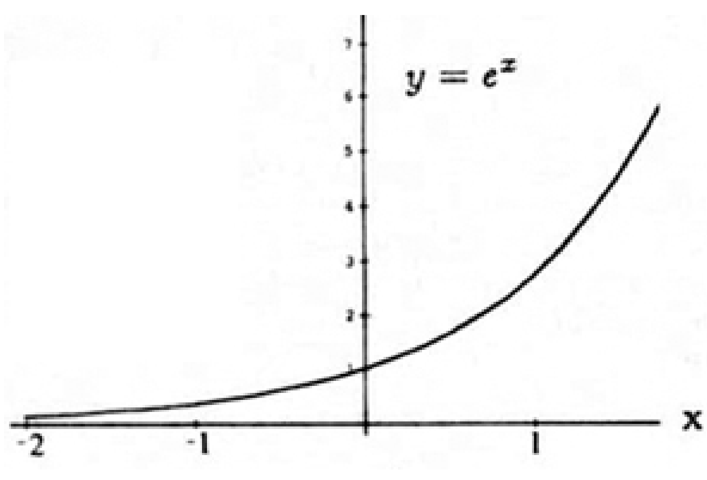


Figura I.5: *Gráfico de la función $y = e^x$. La función exponencial es positiva para todos los valores de x, y toma el valor y = 1, para x = 0.*

Ejercicio

Calcule los dos decimales siguientes en la expresión de $e = 2,7182....$ Grafique la función $y = e^x$

Nota

Calcular los dos decimales siguientes quiere decir que al aumentar el número de términos de la serie incluidos en el cálculo, el valor de los seis primeros decimales no se altera.

- $y = e^x$ es una función positiva a lo largo de todo el eje x.
- También se denomina exponencial de x.
- $f(x) \equiv$ función de x. A un valor determinado de x, $f(x)$ le asocia un número real, si la función es real. Es equivalente a una tabla de valores de dos columnas, o a la información contenida en un gráfico.

I.3.2. La series correspondents a la función seno y coseno

Notablemente las funciones $\cos x$ y $sen\, x$ definidas inicialmente como una razón entre los lados de un triángulo, tienen también un desarrollo en serie. Hay una expresión analítica que posee las mismas propiedades de la funciones trigonométricas definidas anteriormente.

Las series correspondientes con estas funciones trigonométricas son

$$cos\, x \equiv 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm ... \tag{I.15}$$

$$sen\, x \equiv x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm ... \tag{I.16}$$

Esta serie es la que debería evaluar internamente una calculadora para obtener el valor del seno de un ángulo. Sin embargo, para mejorar su rapidez, *las calculadoras evalúan esta serie mediante una aproximación*, la aproximación de Padè, que es un cuociente de polinomios *finitos* que aproximan esta función (y otras) con la precisión que uno desee.

Ejercicio

Encuentre, numéricamente, el valor de $sen\, \alpha$ para $\alpha = 0,05$ radianes, de acuerdo a la serie definida con este nombre en la sección anterior. ¿Cuál es el valor de α en grados? ¿Cuál es el error cometido al aproximar $sen\, \alpha \approx \alpha$? (Sume tres términos de la serie y compare la diferencia).□

Ejercicio

Demuestre que con estas series se cumple el teorema de Pitágoras: $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Verifique esta igualdad hasta potencias de α^7. (Cuando multiplique la serie por sí misma, no considere términos con potencias superiores a 7.

□

I.3.3. Arco y Cuerda: Aproximación para Ángulos Pequeños.

La definición geométrica de las funciones trigonométricas es la circunferencia de radio unitario. Usando esta misma herramienta geométrica podemos extraer una aproximación muy útil en los desarrollos de problemas en física. Consiste en considerar los casos en que el ángulos α es muy pequeño (siempre medido en radianes) de forma que podemos aproximar el arco de circunferencia subtendido por el ángulo α con la cuerda que une ambos extremos. Esta descripción está graficada en la Figura I.6.

A continuación ponemos estas afirmaciones en ecuaciones.

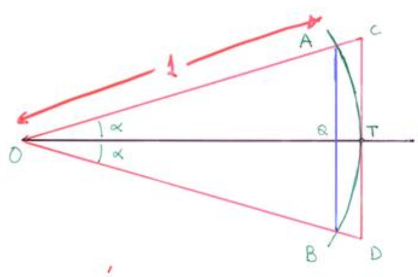


Figura I.6: Si el ángulo (en radianes) es pequeño, confundiremos el arco con la cuerda.

IMPORTANTE

Las siguientes *aproximaciones* que se desprenden directamente de las representaciones en serie de las funciones trigonométricas, aparecen frecuencia en física.

Si α es muy pequeño ($\alpha \ll 1$), se cumple que:

$$\begin{aligned} sen\,\alpha &\simeq \alpha + O(\alpha^3) \\ cos\,\alpha &\simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4) \\ \tan\,\alpha = sen\,\alpha/cos\,\alpha &\simeq \alpha/(1-\alpha^2) \simeq \alpha(1+\alpha^2) \\ &\simeq \alpha + O(\alpha^3) \end{aligned} \tag{I.17}$$

entonces, a primer orden en α, (es decir:despreciando todas las potencias de α superiores a 1), se cumple:

$$\tan\alpha \simeq \alpha \simeq \operatorname{sen}\alpha. \quad \square \tag{I.18}$$

El ángulo α debe ser medido en radianes para que estas aproximaciones sean válidas.

GRÁFICO SEN y TAN α

SEN A	A-RADIANES	TAN A	A-GRADOS
0,0100	0,01	0,0100	0,5729
0,0200	0,02	0,0200	1,1458
0,0300	0,03	0,0300	1,7187
0,0400	0,04	0,0400	2,2916
0,0500	0,05	0,0500	2,8645
0,0600	0,06	0,0601	3,4374
0,0699	0,07	0,0701	4,0103
0,0799	0,08	0,0802	4,5832
0,0899	0,09	0,0902	5,1561
0,0998	0,1	0,1003	5,729
0,1098	0,11	0,1104	6,3019
0,1197	0,12	0,1206	6,8748
0,1296	0,13	0,1307	7,4477
0,1395	0,14	0,1409	8,0206
0,1494	0,15	0,1511	8,5935
0,1593	0,16	0,1614	9,1664
0,1692	0,17	0,1717	9,7393
0,1790	0,18	0,1820	10,3122
0,1889	0,19	0,1923	10,8851
0,1987	0,2	0,2027	11,458
0,2085	0,21	0,2131	12,0309
0,2182	0,22	0,2236	12,6038
0,2280	0,23	0,2341	13,1767
0,2377	0,24	0,2447	13,7496
0,2474	0,25	0,2553	14,3225
0,2571	0,26	0,2660	14,8954
0,2667	0,27	0,2768	15,4683
0,2764	0,28	0,2876	16,0412
0,2860	0,29	0,2984	16,6141
0,2955	0,3	0,3093	17,187
0,3051	0,31	0,3203	17,7599
0,3146	0,32	0,3314	18,3328

El gráfico muestra el grado de acercamiento entre el sen, la tangente y alpha medido en radianes.

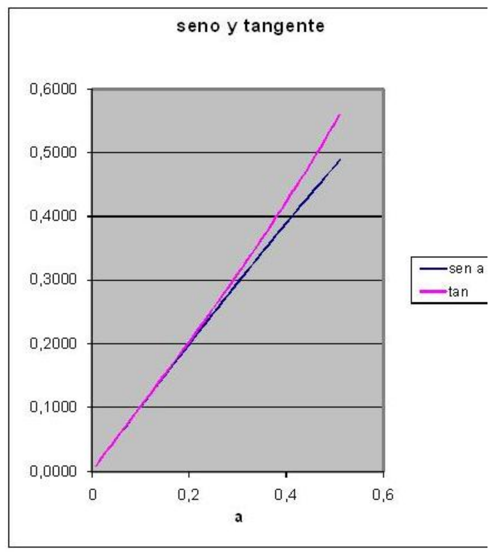


Figura I.7: *Se gráfica la función tangente y seno para ángulos pequeños en radianes. Se puede apreciar que para valores de hasta 0.2, aproximadamente 12º ambas funciones coinciden. El ángulo alpha en radianes no se gráfica pero corresponde a una recta que se confunde con las funciones anteriores en la vecindad del origen.*

I.3.4. Expansión Binomial

Podemos generalizar la fórmula del binomio a un exponente arbitrario. Definimos entonces la forma $(1\,+\,x)^r$ para cualquier valor de r, real, positivo negativo, usando el desarrollo en serie del binomio. Esto nos garantiza que para los casos conocidos anteriormente recuperamos su expresión conocida.

$$
\begin{aligned}
(1+x)^r &= 1 + r\,x + r\,(r-1)\frac{x^2}{2!} + r\,(r-1)(r-2)\frac{x^3}{3!} + ... \\
&= \textstyle\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{r!}{(r-\alpha)!}\frac{x^\alpha}{\alpha!}
\end{aligned} \tag{I.19}
$$

Ejemplo

Usando la expresión recién definida, obtenga -sin usar calculadora-, el valor de las siguientes expresiones, manteniendo tres cifras significativas :

a.- $1/\sqrt{101}$, b.- $(59)^{2/3}$, c.- $\sqrt{\pi}$.

Soluciones

La estrategia en estos ejercicios es incorporar un número conocido y fácil de manipular en la expresión del problema.

a.-

$$1/\sqrt{101} \,=\, (81\,+\,20)^{-1/2} \,=\, (81)^{-1/2}\,(1\,+\,20/81)^{-1/2}$$

$$= \,(1/9)\left[1\,+\,\frac{r\,(20/81)}{1!}\,+\,\frac{r\,(r-1)\,(20/81)^2}{2!}\,+\,\frac{r\,(r-1)\,(r-2)\,(20/81)^3}{3!}\,+...\right]$$

Resta sólo reemplazar $r\,=\,-(1/2)$ y podemos evaluar esta serie. El resultado es una aproximación (dependiendo del número de potencias consideradas) al valor correcto.

b.-

$$(59)^{2/3} \,=\, [64 + (-5)]^{2/3}$$

$$= \,(64)^{2/3}\left[1\,+\,(2/3)\,(-5/64)\,+\,\frac{(2/3)(2/3-1)}{2!}\,(-5/64)^2\,+\,\frac{(2/3)(2/3-1)(2/3-2)}{3!}\,(-5/64)^3\,...\right]$$

Hemos sido cuidadosos con los signos negativos para evitar las confusiones. Como en el caso anterior, el cálculo se detiene cuando tenemos suficientes cifras significativas. No se pueden calcular, obviamente, todos los términos de la serie.

c.- Consideramos 4 cifras significativas para expresar el número π. $\pi\,=3.142$. Esta es la precisión que esperamos obtener en este cálculo. Como requerimos un número fácil de calcular para plantear el esquema de este método, escribimos $\pi\,=\,(4\,-\,0{,}858)$. Entonces, procedemos

$$(\pi)^{1/2} \,=\, (4\,-\,0,858)^{1/2} \,=\, 2\,[1+(-0,858/4)]^{1/2} \,=\, 2\,[1-0{,}225]^{1/2}.$$

El resto es calcular la serie hasta que los términos siguientes de la serie no afecten a la cuarta cifra significativa.

I.4. ÁREA ENCERRADA BAJO UNA CURVA

Más adelante es preciso evaluar el área encerrada bajo una curva y allí haremos uso de algunas de las sumas introducidas aquí.

Esta operación de evaluar el área bajo una curva, es lo que en cálculo se denomina *integrar una función*.

Cabe notar que aun en los casos más simples se realiza este tipo de cálculo –evaluar el área bajo una curva–, pero sin necesidad de recurrir a las sumatorias (o a la integral, si uno tiene conocimientos de cálculo infinitesimal). Por ejemplo, en el movimiento de una partícula con aceleración uniforme, es necesario calcular el área encerrada bajo la curva velocidad vs. tiempo, si desea conocer el camino recorrido por esta partícula. Aquí la *curva* es una recta y el valor del área encerrada corresponde al área de un trapezoide, cuya fórmula es conocida.

Para una partícula que soporta una aceleración variable, la curva es más complicada y, necesariamente, debemos recurrir a un método numérico para calcular, primero su velocidad y, posteriormente la distancia recorrida.

I.4.1. Area encerrada por la curva $y = x^2$.

La función $y = x^2$ es un buen ejemplo de cálculo del área bajo una curva.

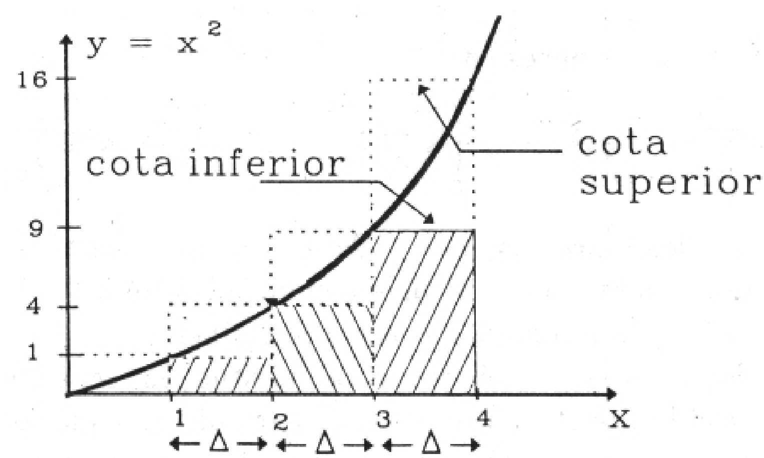


Figura I.8: *El área bajo la curva se ha descompuesto en una suma de rectángulos. Una familia de rectángulos dará como resultado un valor mayor para el área buscada, y la otra familia de rectángulos, un valor menor.*

Como método general, para calcular el área encerrada bajo una curva cualquiera sumaremos el área de cada uno de los rectángulos que aparecen en la Figura . El problema es cómo fijar la altura de este rectángulo. El procedimiento que usaremos será tomar dos cotas: una superior, donde el rectángulo claramente tiene más superficie que la figura original, y la cota inferior, donde tomamos un rectángulo que toca el valor más bajo de la función en el intervalo a evaluar. Este es el procedimiento más elemental, existen otros métodos más sofisticados diseñados para disminuir el error.

A continuación calcularemos una cota *inferior* para el área bajo la curva de la función $y = x^2$; sumemos los rectángulos achurados, que se ubican *debajo* de la curva:

$$\text{Area}_{INF} = \sum_{n=1}^{100} \left[(n-1)^2 \cdot \Delta^2\right] \cdot \Delta \tag{I.20}$$

El término entre corchetes, representa el valor de la función $y = x^2$. Esto proviene del siguiente argumento: si x es el largo y Δ es lo que designamos como la base del rectángulo, entonces $x = (n - 1)\,\Delta$ corresponde al valor más bajo de la función para el intervalo en cuestión (ver Figura I.8). En otras palabras, trazamos un rectángulo que toque a la curva $y = x^2$ en el punto más bajo de cada uno de los intervalos. Esta es la cota mínima.

En seguida desarrollamos $(n-1)^2 = n^2 - 2\,n + 1$ y usamos la siguientes propiedades de las sumatorias (válidas si las sumatorias son finitas).

$$\sum_{n=1}^{100}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{100} a_n + \sum_{n=1}^{100} b_n, \tag{I.21}$$

$$\sum_{n=1}^{100} \lambda \bullet a_n = \lambda \sum_{n=1}^{100} a_n, \qquad \lambda = \text{constante}. \tag{I.22}$$

Cota inferior para el área

La sumatoria se transforma entonces en:

$$\text{Area}_{INF} = \sum_{n=1}^{100}(n-1)^2 \cdot \Delta^3 = \left[\sum_{n=1}^{100} n^2 \, - \, 2\sum_{n=1}^{100} n \, + \, \sum_{n=1}^{100} 1\right] \Delta^3.$$

Hemos tomado $x_{\text{máx.}} = 100\,\Delta$. Estamos calculando entonces el área bajo la curva encerrada entre $x = 0$ y $x_{\text{máx.}} = 100\,\Delta$. En general, para funciones más complicadas, por ejemplo que aumenten y después disminuyan muy marcadamente, el valor de Δ conviene que dependa de la posición y por tanto de n con el objeto de minimizar el error introducido. Acá estamos presentando el método y no ahondamos en ese aspecto.

Escribimos el resultado obtenido anteriormente

$$\text{Área}_{INF} = \left[\sum_{n=1}^{100} n^2 - 2\sum_{n=1}^{100} n + \sum_{n=1}^{100} 1\right] \Delta^3.$$

En la Figura se aprecia que el área denominada con INF es MENOR que la que el área encerrada bajo la curva $y = x^2$, que es la que debemos calcular.

Cota superior para el área

Ahora si tomamos el rectángulo cuya altura corresponde al valor máximo de la función en el intervalo, entonces obtenemos

$$\text{Área}_{SUP} = \sum_{n=1}^{100} n^2\,\Delta^3. \tag{I.23}$$

En la Figura se aprecia que el área$_{SUP}$ constituye una cota superior para el valor del área que deseamos estimar.

Hemos obtenido una cota superior e inferior para el valor del área encerrada por la curva $y = x^2$. Con estos dos resultados, parece natural asignar que un valor cercano al valor exacto del área bajo esta curva se obtiene promediando estas dos cotas.

Ejercicio

Demuestre que asociar el valor del área encerrada por la curva $y = x^2$ con el promedio aritmético del valor del Área Superior y del Área Inferior calculada, corresponde geométricamente a trazar una recta que reemplace la curva entre los dos verticales de cada tramo Δ que tocan a la parábola $y = x^2$.

Nota: Considere un trapecio instalado en cada bloque definido por un rectángulo.

$\square$

Se desprende de aquí que para evaluar numéricamente esta área necesitamos, conocer el valor de las sumatorias que han aparecido hasta aquí: $\sum_{n=1}^{N} n$ y $\sum_{n=1}^{N} n^2$.

Incluimos los detalles del cálculo de estas sumatorias en la siguiente sección. Para no desviarnos de este problema, usaremos los valores de estas sumatorias, sin demostrarlos, para obtener el resultado final.

Los valores son

$$\sum_{n=1}^{N} n = (N+1)\frac{N}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{N} n^2 = N[(2N+1)(N+1)]/6. \tag{I.24}$$

Con estos valores disponibles retornamos a las ecuaciones [I.20], [I.23] que correspondían al área evaluada por defecto (cota inferior) y por exceso (cota superior), respectivamente.

Promediando los valores de ambas cotas, tenemos

$$
\begin{aligned}
\text{Área} \;&= \tfrac{1}{2}[\text{Área}_{(SUP)} + \text{Área}_{(INF)}]\,\Delta^3 \\
&= \left\{ \tfrac{1}{2}[2\,\textstyle\sum_{n=1}^{N} n^2 - 2\,\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} 1] \right\}\,\Delta^3 \\
&= \{\, N[(2N+1)(N+1)]/6 - N(N+1)/2 + N/2\}\,\Delta^3 \\
&= \{\, N(N+1)[(2N+1)/6 - 1/2] + N/2\}\,\Delta^3 \\
&= [N^3/3 + N/6]\,\Delta^3
\end{aligned}
$$

Si el valor máximo de x es L, entonces, de acuerdo a nuestra partición, $L \equiv N\,\Delta$, donde N es el valor del número de rectángulos considerados en el cálculo. De este modo área bajo la curva es

$$
\text{Área} = \frac{1}{2}[\text{Área}_{(SUP)} + \text{Área}_{(INF)}]\,\Delta^3 \;=\; [N^3/3 + N/6]\,\Delta^3 \;=\; \frac{L^3}{3} \;+\; \frac{L^3}{6\,N^2}. \qquad \text{(I.25)}
$$

El valor exacto de esta sumatoria es $L^3/3$. El error porcentual cometido es del orden de $1/(2\,N^2)$. Si utilizamos 100 particiones (N=100), el error es del orden de una parte en 20.000, o un error de 0.005 $\%$.

Ejercicio

a.- Repita este cálculo para el caso $y = x$.

b.- Calcule el área encerrada entre la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$. Calcule primero el punto donde ambas curvas se cortan, posteriormente calcule las áreas separadamente y reste adecuadamente sus resultados. □

I.4.2. Método general para evaluar $\sum_{n=1}^{N} n^k$.

Aquí propondremos un método simple y general para evaluar las sumatorias indicadas en el título de esta sección.

Como ejemplo para ilustrar el método obtendremos el valor de la siguiente sumatoria

$$
\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + 3 + ... + N.
$$

Consiste en calcular la siguiente combinación de sumatorias,

$$
\sum_{n=1}^{N} (n+1)^2 - \sum_{n=1}^{N} n^2.
$$

Esta combinación de sumatorias no parece estar relacionada con la sumatoria que nos interesa, pero al desarrollar el binomio de la primera sumatoria aparecen dos características relevantes para esta evaluación de sumatorias. Primero

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2 - \sum_{n=1}^{N} n^2 = \sum_{n=1}^{N}(n^2+2n+1) - \sum_{n=1}^{N} n^2 = \sum_{n=1}^{N}(2\,n+1). \qquad \text{(I.26)}$$

Donde hemos usado la asociatividad de la sumatoria (la misma propiedad de los números reales) [I.21], y con ello hemos cancelado las sumatorias que contenían n^2.

En segundo lugar, la resta de sumatorias que aparece a la izquierda de la última ecuación puede ser evaluada fácilmente si escribimos cada uno de sus términos en columnas separadas como se indica a continuación:

$$\begin{array}{rcll}
2^2 & - & 1^2 & \text{primer término de la sumatoria,} \\
3^2 & - & 2^2 & \text{segundo término de la sumatoria,} \\
4^2 & - & 3^2 & \text{tercer término de la sumatoria,} \\
 & \vdots & & \qquad\vdots \\
(N+1)^2 & - & N^2 & \text{N–ésimo término de la sumatoria.} \\
\hline
(N+1)^2 - 1. & & &
\end{array}$$

Es fácil ver que los términos de la suma se van anulando entre ellos, permaneciendo sólo el primero y el último, cuya diferencia es el resultado de la suma. las series con esta característica se denominan series telescópicas y surgen frecuentemente en nuestros problemas.

El valor de la suma es: $N\,(N+2)$.

Por otra parte el término de la derecha de la ecuación [I.26] es:

$$2(\sum_{n=1}^{N} n) + \quad \sum_{n=1}^{N} 1 = 2(\sum_{n=1}^{N} n) + N.$$

De aquí se puede despejar $\sum_{n=1}^{n=N} n$ que es la sumatoria cuyo resultado buscamos:

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)/2 \qquad \text{(I.27)}$$

Ejercicio

Usando este método, reobtenga el valor de la siguiente sumatoria:

$\sum_{n=1}^{N} n^2 = N(2N+1)(N+1)/6.$

Indicación: use la ecuación [I.26], pero incluyendo potencias cúbicas en lugar de las cuadráticas que allí aparecen.□

Resumiendo: *con este método se puede calcular la sumatoria de una potencia arbitraria de n. Para ello se debe conocer el valor de la sumatoria de una potencia más baja que la buscada y calcular la diferencia entre los valores de las dos sumatorias de una potencia inmediatamente superior, en la forma ya señalada.*

I.4.3. Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^{N} n$

A pesar que el resultado de esta sumatoria es el mismo si N es par o impar, analizaremos ambos casos en forma independiente.

Consideremos primero el caso de N par.

$$\sum_{n=1}^{N} n = \overbrace{1 + \underbrace{2 + \overbrace{3 + \underbrace{4 + ... + (N-3)} + (N-2)} + (N-1)} + N}$$

Para evaluar esta sumatoria reagruparemos los términos de la sumatoria en la forma señalada en la Figura: sumamos en pares aquellos unidos por el extremo de cada una de las llaves indicadas en la Figura. El valor que toma cada uno de estos pares es $(N+1)$. Ahora si *N es par* el número de llaves que debemos considerar es $N/2$ puesto que la suma tiene N términos, y el valor de la suma es $N/2$ veces $(N+1)$:

$$\sum_{n=1}^{N} n = (N+1)\frac{N}{2}. \tag{I.28}$$

N impar.

Si N es impar, la suma de cada par de términos tiene el mismo valor que antes $(N+1)$, **excepto** que ahora al agruparlos permanece uno (el del centro), sin compañero. El valor de este término, es $(N+1)/2$.

En este caso la expresión que toma la sumatoria es

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + ... + \overbrace{\frac{(N+1)}{2}} + ... + (N-1) + N$$

Sumamos entonces teniendo en cuenta que el valor del término central es $(N+1)/2$, y que debe ser sumado en forma aparte. El valor de la sumatoria se obtiene sumando $(N-1)/2$ veces $(N+1)$ y añadiendo el término central $(N+1)/2$. Recuerde que (N - 1) es un número par, y que la suma del primero y el último de este par es $(N+1)$.

El resultado final es

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=1}^{N} n &= (N+1)\bullet(N-1)/2 + (N+1)/2 \\ &= (N^2-1)/2 + (N+1)/2 \\ &= N(N+1)/2 \end{aligned}$$

Vemos que la expresión es la misma, sea N **par o impar**, de modo que:

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)/2 \qquad \textbf{(I.29)}$$

El método expuesto se debe a Gauss.

Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^{N} n^2$.

Para evaluar la cota inferior o superior para el área encerrada bajo la curva, necesitamos conocer el valor de otra sumatoria, aquella que contiene n^2. Usaremos dos métodos diferentes para evaluar la suma. El procedimiento indicado a continuación es complejo. Lo estudiaremos como una forma de familiarizarnos con la manipulación de las sumatorias.

Incluiremos otro método, más simple, como ejercicio al final de este capítulo.

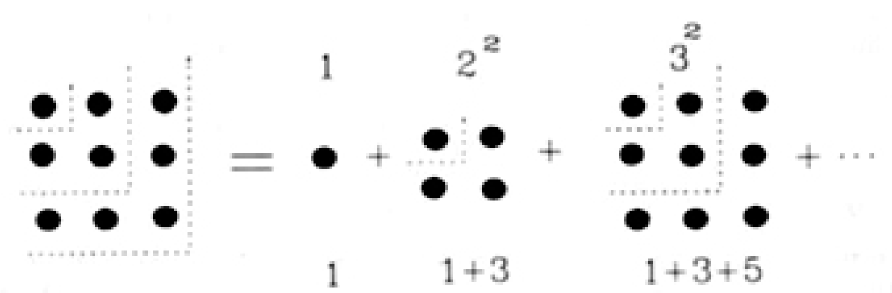


Figura I.9: *La Figura muestra los puntos dentro del cuadrado con línea cortada que permite evaluar una suma cualquiera de números impares. Usaremos este esquema para encontrar el valor de $\sum n^2$.*

A partir de la Figura, sumando los puntos ubicados dentro del cuadrado con línea cortada, se puede verificar la siguiente igualdad:

$$\begin{array}{ll} 1 & = 1 \\ 1+3 & = 2^2 \\ 1+3+5 & = 3^2 \\ \dots & \vdots \\ 1+3+5+\cdots+(2N-1) & = N^2 \end{array}$$

Los valores ubicados a la derecha del signo igual son los números que nos piden evaluar. Sumando los números de la izquierda por columnas, obtenemos:

$$N + 3\cdot(N-1) + 5\cdot(N-2) + ... + (2N-1)\cdot 1 = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

Para obtener este resultado recordemos que hay N filas y que se han sumado columna por columna. El resultado en la ecuación anterior está escrito en el mismo orden. También podemos *verificar* que la suma que aparece a la izquierda del signo igual se puede escribir , después de agrupar los términos convenientemente, como

$$\overbrace{(1)}\cdot\underbrace{[N]} + \overbrace{(3)}\cdot\underbrace{[N-1]} + ... + \overbrace{(2N-3)}\cdot\underbrace{[2]} + \overbrace{(2N-1)}\cdot\underbrace{[1]} \quad =$$

$$\sum_{n=1}^{N}\overbrace{(2n-1)}\,\underbrace{[N-(n-1)]}\,.$$

Las llaves *sobre* los números a la izquierda del signo igual, indican una familia de términos representada por la expresión genérica $(2\,n-1)$. Este factor se ubica, con la misma identificación, a la derecha del signo igual. Análogamente, los términos con una llave *bajo* el número, son generados por el término señalado a la derecha de la ecuación con una llave similar.

Ejercicio

Verifique que (2 n - 1) es un número impar para cualquier valor de n y, que en este caso, toma cada uno de los valores de los números que caracterizan a cada columna, exactamente en el mismo orden en que van apareciendo.

Verifique, dando distintos valores de n, que el término entre paréntesis cuadrado reproduce el otro factor de la suma. □

Igualando este último resultado con la sumatoria de n^2, tenemos

$$\sum_{n=1}^{N}(2n-1)[N-(n-1)] = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

El resto del cálculo se reduce a separar en un miembro de la ecuación la sumatoria de n^2 y en el otro el resto de los términos.

Desarrollando el miembro de la izquierda, de acuerdo a las reglas establecidas, tenemos

$$N\sum_{n=1}^{N}(2n-1) \;-\; \sum_{n=1}^{N}(2n-1)(n-1) = \sum_{n=1}^{N} n^2.$$

Aplicando, nuevamente, las propiedades conocidas de las sumatorias,

$$2N\sum_{n=1}^{N} n - N\sum_{n=1}^{N} 1 - 2\sum_{n=1}^{N} n^2 + 3\sum_{n=1}^{N} n - \sum_{n=1}^{N} 1 = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

Ordenando sumatorias de potencias similares

$$(2N+3)\sum_{n=1}^{N} n \;-\; (N+1)\sum_{n=1}^{N} 1 \;\; = 3\sum_{n=1}^{N} n^2,$$

reemplazando el valor obtenido para $\sum_{n=1}^{N} n$, [I.29], y recordando que $\sum_{n=1}^{N} 1 = N$, tenemos:

$$2N^2(N+1)/2 - (N+1)\,N + 3N(N+1)/2 = 3\sum_{n=1}^{N} n^2,$$

y finalmente, haciendo un poco de álgebra obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = N[(2N+1)(N+1)]/6. \qquad \textbf{(I.30)}$$

Esta fórmula es válida para cualquier valor de N.

I.4.4. Regla del trapecio.

A continuación incluímos la fórmula usada para calcular numéricamente el área bajo una curva $y = f(x)$ usando trapecios (en lugar de rectángulos) como unidades elementales. De cualquiera de las Figuras de esta Sección, se desprende que la idea es acomodar un trapecio bajo la curva, apoyando uno de sus catetos en el eje x y el cateto opuesto aproxima la curva mediante una recta.

Si queremos calcular el valor del área bajo la curva entre los puntos $x = a$ y $x = b$, dividimos dicho segmento en $(N-1)$ segmentos mediante los puntos x_n con $0 \leq n \leq N$. El valor de la función en cada uno de sus puntos se designa como $f_n \equiv f(x_n)$, es decir $f_0 \equiv f(x_o) = f(a)$, $f_1 \equiv f(x_1)$... $f_N \equiv f(x_N) = f(b)$, donde hemos identificado x_0 con a y x_n con b.

Recordemos que el área de un trapecio es la semisuma de sus bases multiplicada por la altura. La fórmula para el área de un trapecio cualquiera dentro del tramo de interes es:

$$\text{Area del trapecio} = \frac{1}{2}\,[f_{n-1} + f_n]\,(x_n - x_{n-1}).$$

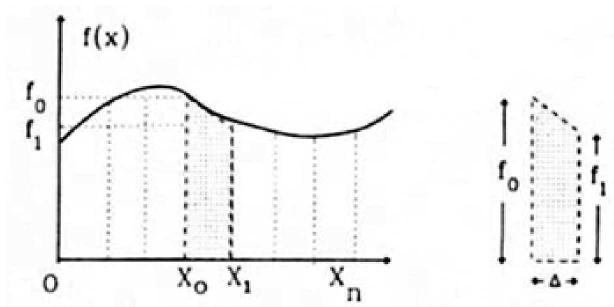


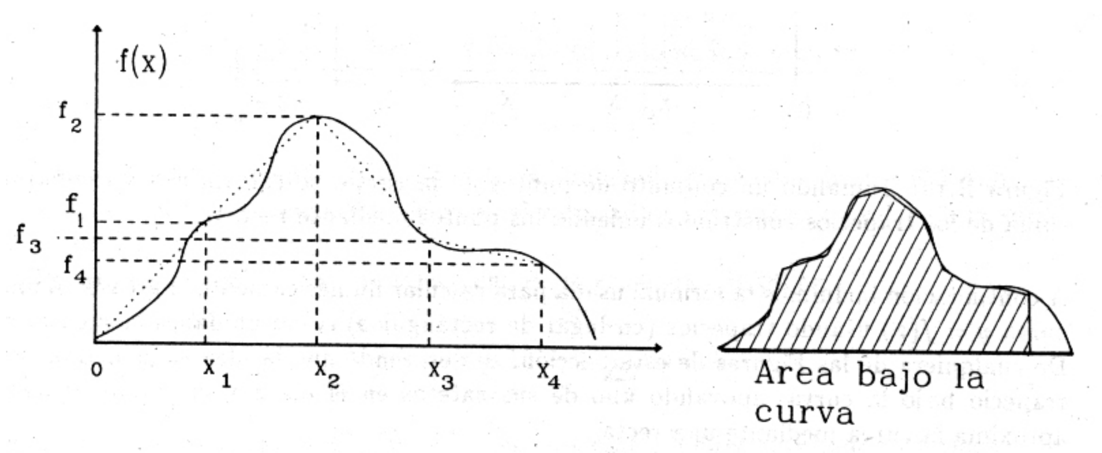
Figura I.10: *Regla de Trapecio. Tomando un conjunto de puntos de la curva, se calcula el área como la suma del área de los trapecios construidos uniendo los puntos mediante rectas.*

En este caso, el trapecio está puesto en forma vertical: la base del trapecio es cada una de las verticales señaladas como f_0, f_1, f_2,... f_N, cuyo valor es el valor que toma la función $f(x)$ para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2 ... x = N$ respectivamente (ver Figura).

Si sumamos el área de cada uno de los trapecios de la Figura, suponiendo que todos los trazos son iguales: $[x_n - x_{n-1}] \equiv \Delta$, para simplificar el álgebra, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_a^b f(x)\Delta \simeq \quad & \Delta[f_0 + f_1]/2 + \\ & \Delta[f_1 + f_2]/2 + \ \Delta[f_2 + f_3]/2 + ... \\ & + \Delta[f_{N-2} + f_{N-1}]/2 + \ \Delta[f_{N-1} + f_N]/2. \\ = \ & \Delta\left\{1/2 \cdot f_0 + \left[\sum_{i=1}^{N-1} f_i\right] + 1/2 \cdot f_N\right\}. \qquad \text{(I.31)}\end{aligned}$$

La suma $\left\{\sum_a^b f(x)\,\Delta\right\}$ indica el valor del área encerrada entre $x = a$ y $x = b$ por la función f(x).



I.5. EJERCICIOS

1.- A partir de la serie:

$$(1+x)^n = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{n!}{(n-\alpha)!}\,\frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

compruebe que para $h << 1$, es posible aproximar $(1+h)^n$ como:

$$(1+h)^n \approx 1 + n\,h + O(h^2).$$

Para verificar la exactitud de esta aproximación, elija tres valores de h, por ejemplo: 0,01, 0,1 y 0,5, con ellos calcule el valor de $(1+h)^8$ de dos formas: utilizando la expresión exacta y a través de la aproximación mencionada. Compárelos y estime el porcentaje de error cometido, en cada uno de los casos, al truncar la serie.

2.- Compruebe si la igualdad propuesta es correcta.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

a.- Para calcularla numéricamente, procure reordenar la serie agrupando términos consecutivos, y calculando su valor. Por ejemplo calcule como: (1-1/3)+ (1/5 - 1/7)+ ... Éstos son los nuevos términos de la serie reordenada.

b.- Muestre que la serie reordenada se puede escribir como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}.$$

3.- Calcule el valor de las siguientes series:

$$a) \quad 1 + 1/2! + 1/3! + ..,1/n! + ...$$

$$b) \quad 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! + ...$$

$$c) \quad 1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + ...$$

Respuestas: a) $(e-1)$, b) e^{-1}, c) (1 – e^{-1}).

Compruebe estos resultados numéricamente.

4.- Sean α y δ dos ángulos medidos en radianes.

i) Usando la expresión para la suma de ángulos, calcule:

$$\frac{[\,\text{sen}(\alpha+\delta) - \text{sen}\,\alpha]}{\delta},$$

ii) Haga tender a cero el valor de δ, es decir, suponga que $\delta << 1$ y calcule el valor de la expresión anterior, utilizando las aproximaciones relevantes.

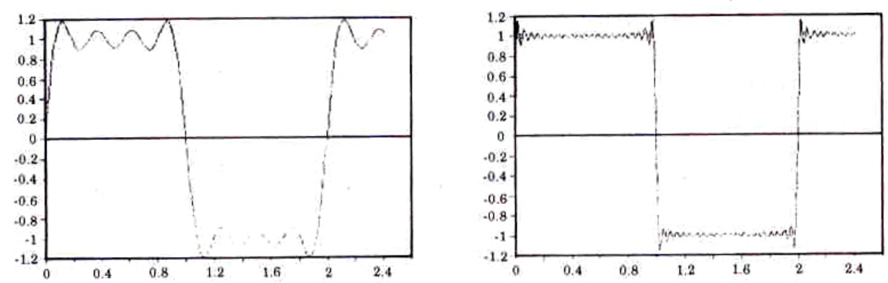


Figura I.11: *El gráfico de la izquierda corresponde a la serie truncada en el octavo término. Si se incluyen los primeros 41, se obtiene el gráfico de la derecha.*

5.- Graficar la función:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}[\,\operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} 3x)/3 + (\operatorname{sen} 5x)/5 + ...]$$

Compruebe que al aumentar el número de términos de la serie, ésta se aproxima rápidamente a la función:

$$f(x) = +1 \qquad 0 < x < \pi$$

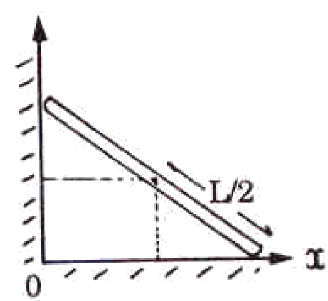
$$f(x) = -1 \qquad \pi < x < 2\pi$$

Compruebe que para $x = \pi$ se produce una discontinuidad de la función y en el caso que $n \to \infty$, este salto es del orden de un $18\,\%$ de la altura de la función.

¿Puede ver esto en el gráfico del computador ? (Nota: sume un número grande de términos de la serie).

6.- Considere una escalera apoyada en una muralla.

Demostrar que el punto medio de esta escalera, de largo L que resbala apoyándose en el muro, describe una circunferencia.
La ecuación de una circunferencia de radio R es: $x^2 + y^2 = R^2$.



7.- Una camionada de arena seca se descarga formando un cono cuya base es una circunferencia de 4 metros de diámetro. Si la pendiente de la arena seca es de $\theta = 32°$ y su densidad es $\rho = 1,7$ g/cm^3, calcule la masa de la arena.

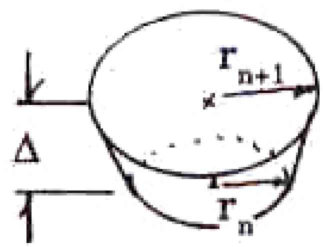
8.- Encuentre el ángulo entre dos diagonales de un cubo.

9.- ¿Cómo cortaría un cubo mediante un plano de forma que la intersección entre el plano y las superficies de cubo formen un hexágono regular?

10.- Un tetraedro regular es la figura geométrica que se obtiene al formar una pirámide con cuatro triángulos equiláteros idénticos. Encuentre el ángulo entre dos de sus caras. Debe definir lo que entiende por un ángulo entre dos superficies planas.

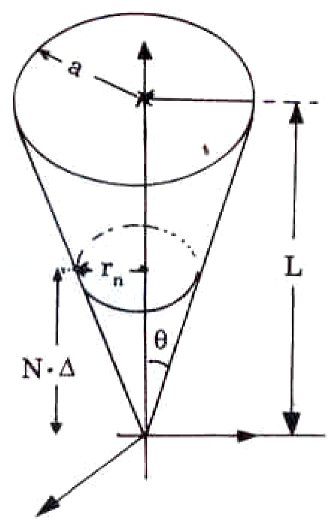
11.- ¿Para qué latitud, el paralelo terrestre tiene 1/3 de la longitud del Ecuador?

12.- Se pide calcular el volumen del cono que se muestra en la Figura.
Para ello se sugiere trabajar de la siguiente forma:
a) Descomponga el cono en una suma de troncos de cono de altura constante Δ y cuyo volumen está dado por la fórmula siguiente:



$$V_{\text{Tronco de Cono}} = \pi \cdot \left[\frac{r_n + r_{n+1}}{2} \right]^2 \cdot \Delta.$$

Sume cada uno de estos volúmenes hasta completar el cono. Use las propiedades de la sumatoria y los resultados obtenidos anteriormente para:



$$\sum_{n=1}^{n=N} n^2 = \frac{N(2N+1)(N+1)}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{n=N} n = \frac{N(N+1)}{2},$$

$r_n = n \cdot \Delta \cdot \tan\,\theta,\ \Delta = \mathrm{Cte.},\ \tan\,\theta = \dfrac{a}{L} = \mathrm{C}$

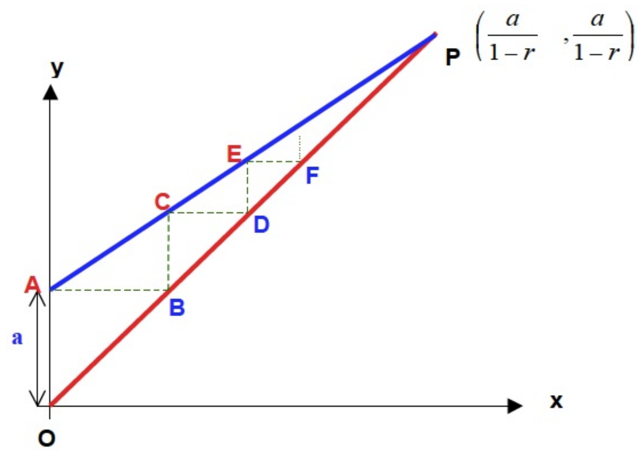
b) Para obtener el valor exacto del volumen de un cono, tome los siguientes límites en los resultados anteriores:

$$\Delta \longrightarrow 0, \qquad N \longrightarrow \infty,$$

de manera que el producto permanezca constante.

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta \to 0}} N \bullet \Delta = L.$$

13.- En la figura aparecen dos líneas rectas que se cortan en el punto **P** de coordenadas (a/(1-r), a/(1-r)). r es un número positivo menor que la unidad: $0 < r < 1$ y **a** es un número real positivo arbitrario, como 2,3 ó 3 ó 4,5.



A partir de la figura:

a.- Escriba la ecuación de la recta que pasa por el origen O y el punto P. b.- Muestre que la ecuación de la recta que pasa por el punto A y el punto P adopta la forma y = r x +a c.- Demuestre que AB es igual a OA = a d.- ¿Qué longitud tiene BC? (Puede ser de ayuda considerar la pendiente de la recta AP) e.- ¿Qué longitud tiene ED? f.- A partir de la figura y sumando los trazos AB, CD, EF... obtenga el siguiente resultado: $a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+... = a/[1-r]$

14.- Consiga una hoja de papel muy larga y con un grosor de $0,1$ mm (10^{-4} m). Comience a doblarla por su mitad, de manera que en cada doblez el grosor aumenta al doble.

¿Cuántos **dobleces** son necesarios, para que el grosor final que adquiere, alcance a cubrir la distancia Tierra–Luna (aproximadamente 380.000 Km)?
Antes de hacer el cálculo escoja alguna de las alternativas propuestas en la Tabla.

a) 42 veces
b) 1320 veces
c) 483200 veces
d) 639421 veces
e) $2,4 \bullet 10^8$ veces.

Ahora calcule y concluya cuánto puede confiar en su intuición.

En el sitio del New York Times apareció un artículo con el título **Power Tools** de Steven Strogatz (matemático) donde relata una estudiante de secundaria de Pomona, California, Britney Gallivan, estudiando este problema dedujo una fórmula que relacionaba el largo del papel **L** con el número de dobleces **n**

$$L = \frac{\pi T}{6} (2^n + 4)(2^n - 1))$$

donde **T** es el grosor del papel. Llevó su fórmula a la práctica y con un papel higiénico de 3/4 de milla de longitud logró doblarlo 12 veces, verificando así su predicción. Las potencias de 2 aparecen dos veces en la fórmula debido a que en cada doblez, se duplica el grosor y disminuye a la mitad el largo del papel. La página donde apareció esto es

http://opinionator.blogs.nytimes.com/2010/03/28/power-tools/

Ver U-cursos.

15.- Estudie la siguiente situación: alrededor del Ecuador terrestre se construye un anillo metálico que calza en forma exacta, sin huelgo. A continuación se corta el anillo metálico en un punto y se le agrega un pedazo de anillo de 1 metro de longitud. Si al agregarle el nuevo pedazo, el anillo queda suspendido equidistante de la superficie terrestre a una altura h:

a) Estime, sin calcular: ¿A qué altura queda el anillo?

b) Haga el cálculo numérico y compare con su estimación.

16.- a.- ¿Con qué rapidez puede Ud. lanzar una piedra?

b.- ¿Qué velocidad cree Ud. que alcanza una bala a la salida del cañón.

En ambos casos, justifique cuantitativamente su estimación.

17.- a.- Calcule *numéricamente* el valor de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} =?$$

Indicación:

Calcule esta suma con tres cifras significativas. Descarte los términos de la serie más pequeños que 10^{-4} y al sumarlos aproxime la última cifra de modo que mantenga el mismo número de cifras significativas del comienzo.

b.- Recordando que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$

Calcule *el valor exacto* de la serie propuesta en la parte a).

Se propone el siguiente método:
1.- Escriba la serie correspondiente al número $e = e^1$.
2.- A la serie propuesta en la primera parte, sume la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+1)! \qquad \textit{término a término.}$$

3.- Relacione esta nueva serie con la asociada al número **e**.