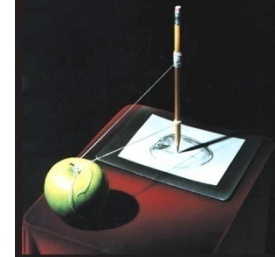


Introducción a la Física Newtoniana



TRABAJO y ENERGÍA

1-DIMENSIÓN

Fuerza Constante

MATEMÁTICA

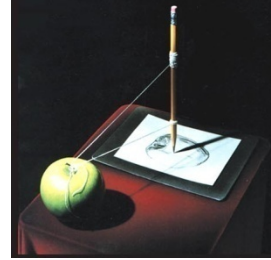
- Producto Escalar entre vectores
- Integral de las ecuaciones de movimiento

$$F \Delta x = m a \Delta x$$

III

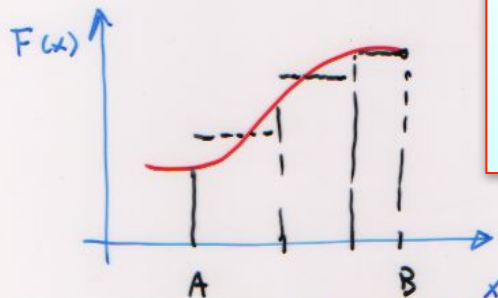
Trabajo

Introducción a la Física Newtoniana



Integral $\equiv$ Sumatoria

En nuestros
cálculos

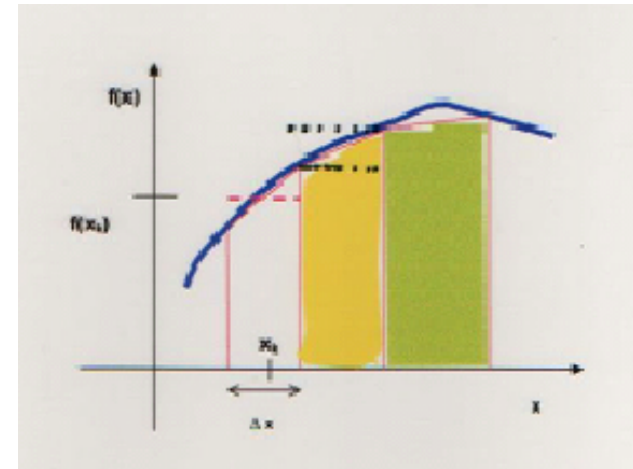


Este es el caso de una fuerza en una dimensión y que además depende de la posición.

$$\sum_{A}^B F \cdot \Delta x \equiv \text{AREA}$$

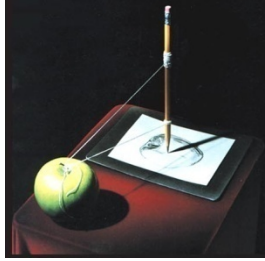
BAJO LA CURVA
en el gráfico
Fuerza vs x

La sumatoria es una integral con elementos Finitos. Es la forma de integrar numéricamente.



Es un escalar, un número. Es más simple que un vector.

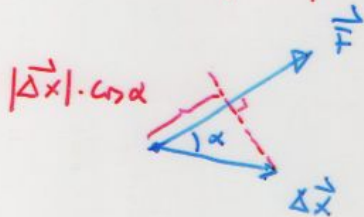
Introducción a la Física Newtoniana



$$\vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = |\vec{F}| \cdot |\Delta \vec{x}| \cdot \cos \alpha$$

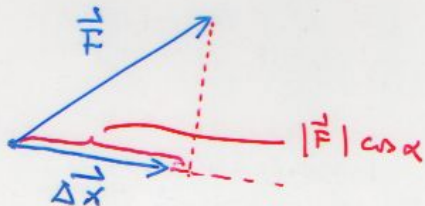


se puede proyectar $\Delta \vec{x}$ sobre $\vec{F}$

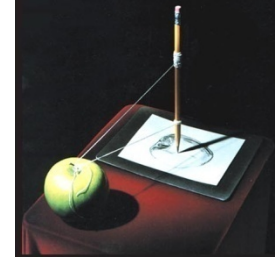


o

se proyecta $\vec{F}$ sobre $\Delta \vec{x}$



Introducción a la Física Newtoniana



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

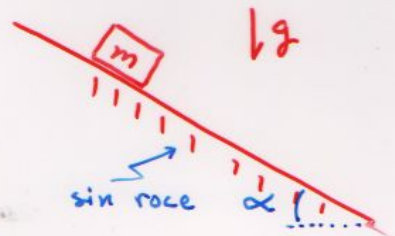
$$\vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = m \vec{a} \cdot \Delta \vec{x}$$

$$\sum_A^B \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = \sum_A^B m \vec{a} \cdot \Delta \vec{x}$$

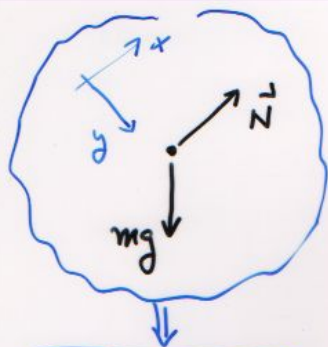
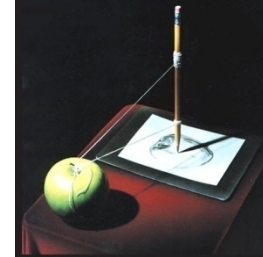
Definimos TRABAJO (W)

$$W \Big|_A^B = \sum_A^B \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

Ejemplo



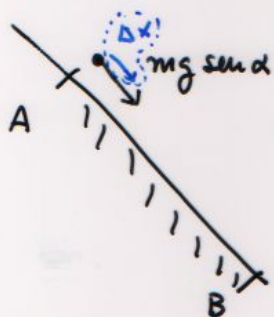
Introducción a la Física Newtoniana



La fza. nete
es $mg \sin \alpha$

$\vec{N}$ se "adapta" de
manera que cancela
la componente vertical
normal (o perpendicular)
a la superficie de la
cuña

$$N - mg \cos \alpha = 0.$$



$$\vec{F} \cdot \vec{\Delta x} = F_0 \cdot \Delta x$$

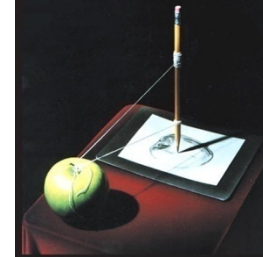
($\vec{F}$ y $\vec{\Delta x}$ son
paralelas)

$$\sum_A^B \vec{F} \cdot \vec{\Delta x} = mg \sin \alpha \sum_A^B \Delta x$$

$$W|_A^B = mg \sin \alpha \cdot (x_B - x_A)$$

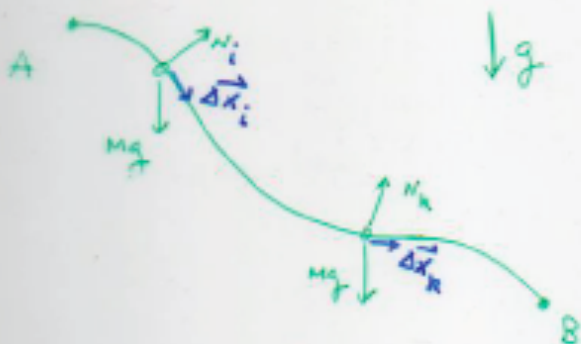
Introducción a la Física Newtoniana

FUERZA CONSTANTE



Considere una trayectoria (arbitraria)
sin roce.

Estudiamos el trabajo realizado
por la fuerza gravitacional.



NOTE que $\vec{N}_i$ no es constante
ni en magnitud ni en dirección.

PERO $\vec{N}_i \cdot \Delta \vec{x}_i = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow$ La fza. normal no realiza
trabajo a lo largo de $A \rightarrow B$.

Trabajo de la Fza. Gravitacional

$$\sum_A^B \vec{F}_0 \cdot \Delta \vec{x} = \vec{F}_0 \cdot \left(\sum_A^B \Delta \vec{x} \right)$$

$$= \vec{F}_0 \cdot (\Delta \vec{x}_1 + \Delta \vec{x}_2 + \dots + \Delta \vec{x}_N)$$

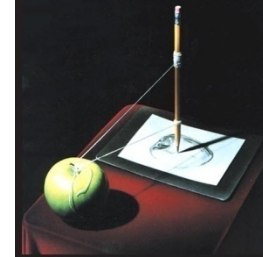
pero (de la figura)

$$\Delta \vec{x}_1 + \Delta \vec{x}_2 + \dots + \Delta \vec{x}_N = \vec{x}_B - \vec{x}_A$$

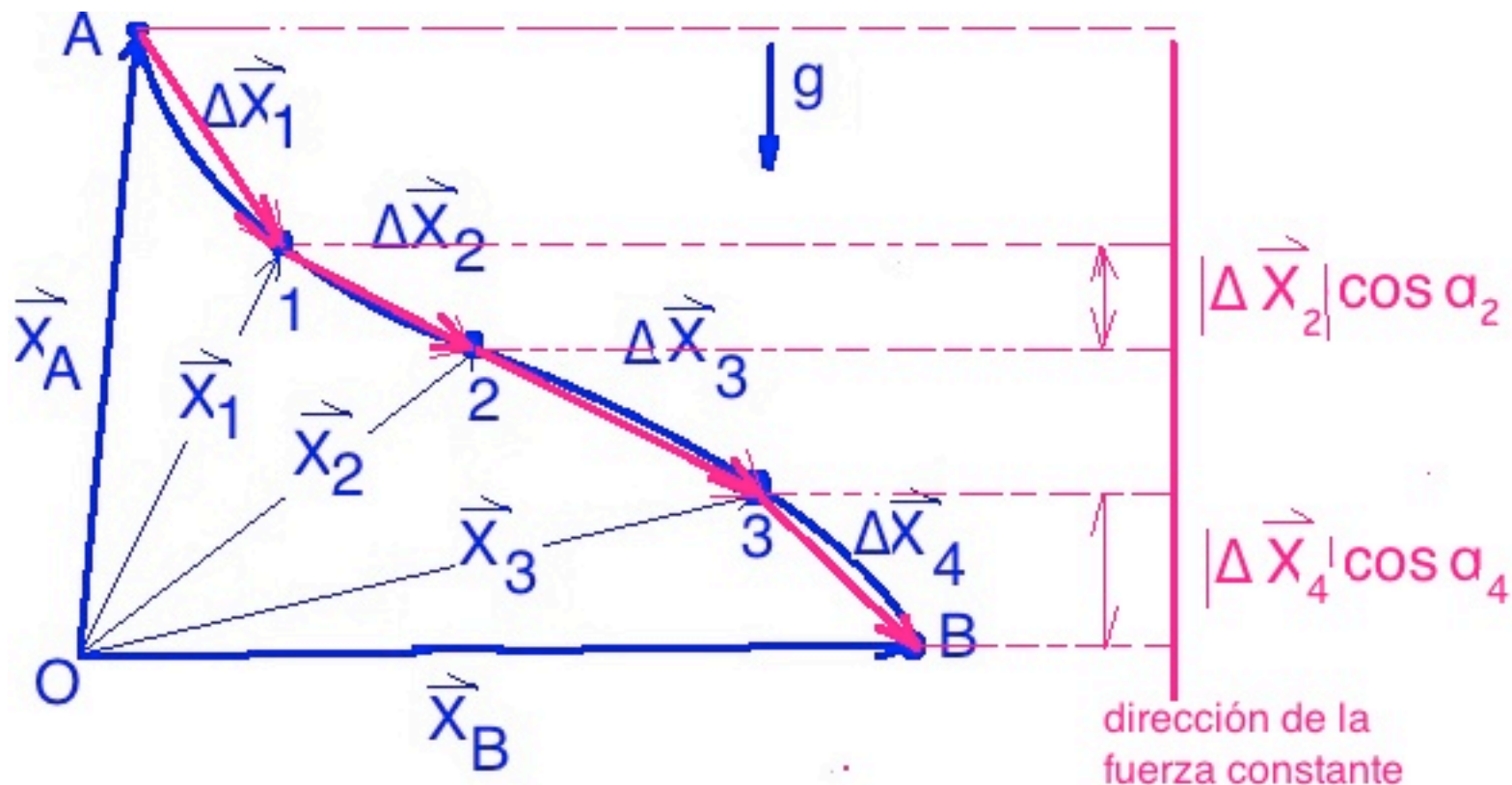
Entonces

$$\sum_A^B \vec{F}_0 \cdot \Delta \vec{x} = \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_B - \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_A$$

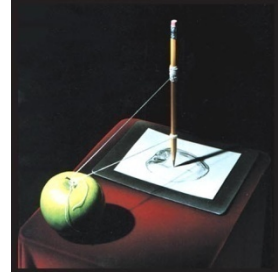
Introducción a la Física Newtoniana



FUERZA CONSTANTE



Introducción a la Física Newtoniana



Hasta aquí sólo hemos considerado solo el Trabajo. Integramos la fuerza a lo largo de la trayectoria .

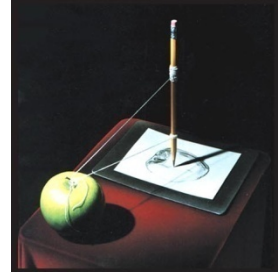
Si continuamos con el otro lado de la ecuación de Newton, debemos considerar la aceleración de la partícula en cada punto de la trayectoria.

A partir de la aceleración obtendremos una expresión que denominaremos la energía cinética y que, al igual que el caso anterior, depende sólo de los valores de la energía cinética en los extremos de la trayectoria: los puntos A y B.

$$\sum_A^B m \vec{a} \Delta \vec{x} = \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2$$

Demostramos esto
a continuación !

Introducción a la Física Newtoniana



FUERZA CONSTANTE

$$\sum_A^B m \vec{a} \Delta \vec{x} = \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2$$

$$\sum_A^B \vec{F}_0 \cdot \Delta \vec{x} = \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_B - \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_A$$

Igualando ambas expresiones
(segunda Ley de Newton!)
tenemos:

$$\vec{F}_0 \cdot \vec{x}_B - \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_A = \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 - \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2$$

Instalando los términos con subíndice A a mano izquierda y aquellos con subíndice B a mano derecha de la ecuación, tenemos:

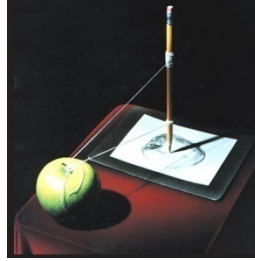
$$\frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 - \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_A = \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 - \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_B$$

Dado que los puntos A y B son puntos arbitrarios en la trayectoria de la partícula, concluimos que la expresión anterior toma el mismo valor a lo largo de la trayectoria

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 - \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_B} = C$$

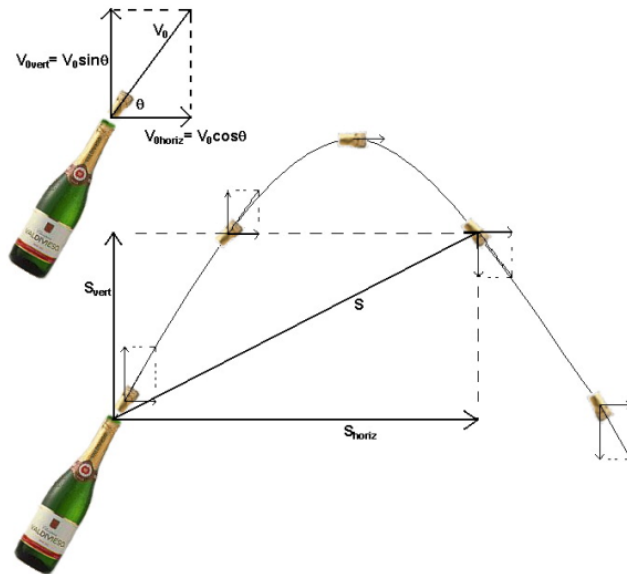
Esta expresión es lo que denominamos
ENERGÍA MECÁNICA

Introducción a la Física Newtoniana



Esta expresión para la energía ya la conocíamos!

En cinemática, en el caso de aceleración constante a_y , obtuvimos la misma expresión a la que llegamos a partir de la definición del trabajo, como se aprecia en los cálculos del recuadro que se acompaña.



$$\left. \begin{aligned} y &= v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ v_y &= v_{0y} + a_y t \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Si } a_x = 0$$

$$x = v_{0x} t$$

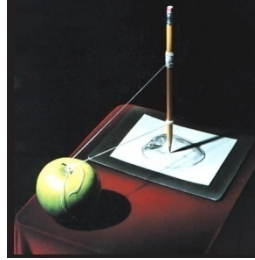
Despejando t

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2 a_y (y - y_0) \quad \left/ \frac{m}{2} \right.$$

$$\frac{1}{2} m v_y^2 - \frac{1}{2} m v_{0y}^2 = m a_y y - m a_y y_0$$

$$\frac{1}{2} m v_y^2 - m a_y \cdot y = \frac{1}{2} m v_{0y}^2 - m a_y y_0$$

Introducción a la Física Newtoniana



Desarrollemos el caso de la aceleración

$$m \vec{a} \cdot \Delta \vec{x},$$

si $\Delta \vec{x}_i$ es pequeño

$\vec{a} \sim$ constante
en dicho intervalo

pero, recordemos que

$$\text{si } \vec{a} = c^k \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m (v_{f1}^2 - v_{i1}^2) = m \vec{a}_1 \cdot \Delta \vec{x}_1$$

⊕

$$\frac{1}{2} m (v_{f2}^2 - v_{i2}^2) = m \vec{a}_2 \cdot \Delta \vec{x}_2$$

⊕

⋮

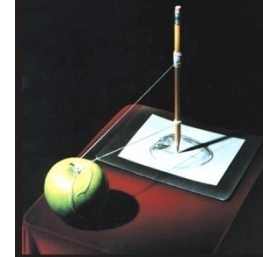
$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \sum_k m \vec{a}_k \cdot \Delta \vec{x}_k$$

Este es un resultado general, válido siempre.

A diferencia del caso del trabajo, donde la expresión FINAL DEPENDE de la expresión analítica de la fuerza en función de las coordenadas.

Veremos eso cuando estudiemos el caso del resorte

Introducción a la Física Newtoniana

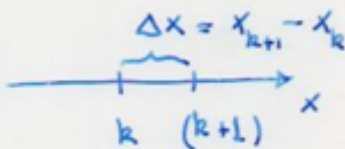


Otra forma de llegar al mismo resultado:

$$\sum_A^B m \vec{a} \cdot \Delta \vec{x}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

1-Dimensión



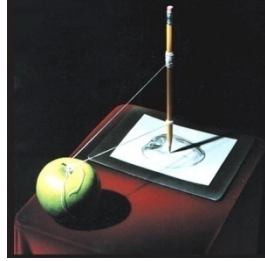
$$a = (v_{k+1} - v_k) / \Delta t$$

$$\Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t = [(v_{k+1} + v_k) \cdot \Delta t] / 2$$

$$a \cdot \Delta x = \frac{(v_{k+1} - v_k)}{\Delta t} \cdot \frac{(v_{k+1} + v_k) \Delta t}{2}$$

$$a \cdot \Delta x = \frac{(v_{k+1}^2 - v_k^2)}{2}$$

Introducción a la Física Newtoniana

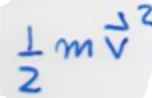


Conclusión: agrupando los términos correspondientes a cada punto, obtenemos una expresión, que llamamos la Energía, y que toma el mismo valor numérico en cada punto de la trayectoria.

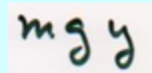
$E = T + V = \text{Constante}$ a lo largo de la trayectoria.

Donde

$T = \text{Energía Cinética}$


$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

$V = \text{Energía Potencial}$

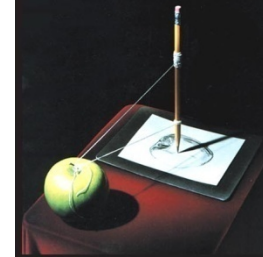

$$mgy$$


$$\frac{1}{2} kx^2$$

Para el caso del resorte que estudiaremos más adelante

Lo que hemos considerado acá es la energía mecánica. Esta se conserva sólo si no hay disipación en OTRAS formas de energía, como calor, energía interna (deformación)... La energía total (mecánica más otras formas) siempre se conserva.

Introducción a la Física Newtoniana



g En cada punto de la trayectoria existe un # que se conserva!

$$E = \frac{1}{2} m v_y^2 - m a_y \cdot y$$

si suelto la partícula desde una altura H

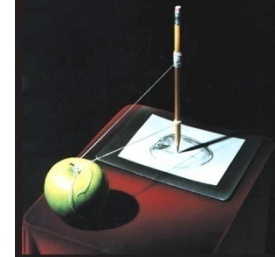
$t=0$ $v_y=0$ (suelto la partícula)

$\Rightarrow a_y = -g$ $t=0$ $y=H$

$$E = m g H = \frac{1}{2} m v^2 + m g y$$

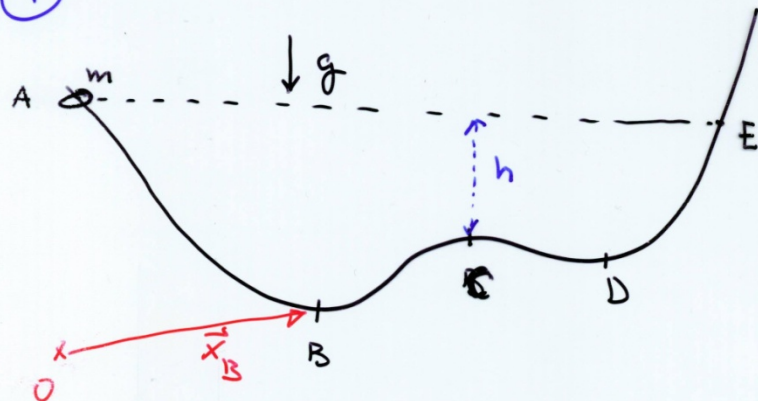
si $y=0$, $v^2 = 2 g H$.

Introducción a la Física Newtoniana



Ejemplos Típicos

①



La partícula parte del reposo desde A

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \vec{F}_0 \cdot \vec{x}$$

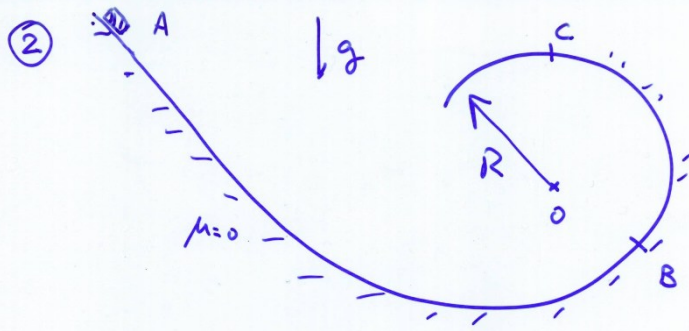
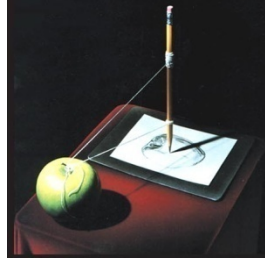
$$E_0 = -\vec{F}_0 \cdot \vec{x}_A$$

En el punto C:

$$-\vec{F}_0 \cdot \vec{x}_A = \frac{1}{2} m \vec{v}_C^2 - \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_C$$

$$v_C^2 = \frac{2}{m} [\vec{F}_0 \cdot (\vec{x}_C - \vec{x}_A)] = 2gh.$$

Introducción a la Física Newtoniana



$$E_A = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_B$$

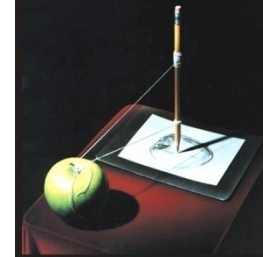
$$-\vec{F}_0 \cdot \vec{x}_A = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \vec{F}_0 \cdot \vec{x}_B$$

Si B se ubica en un nivel inferior al centro de la circunferencia O,

$$\begin{aligned} \vec{v}_B^2 &= \frac{2}{m} [\vec{F}_0 \cdot (\vec{x}_B - \vec{x}_A)] \\ &= \frac{2}{m} g (h_A - h_B) > 0 ! \end{aligned}$$

En el punto C la situación es diferente puesto que la masa m SE APOYA en el riel, entonces la fuerza normal apunta siempre hacia fuera de la superficie, por lo tanto no puede sostener a "m" (sigue)

Introducción a la Física Newtoniana



Después del punto P



Para que m no se desprenda del círculo en el pto. C , debe ocurrir que

$$-m \frac{v_c^2}{R} = -mg + \cancel{0} (=0)$$

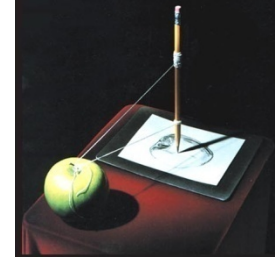
$$\boxed{v_c^2 = gR}$$

conservación de la energía entre A y $C \Rightarrow$

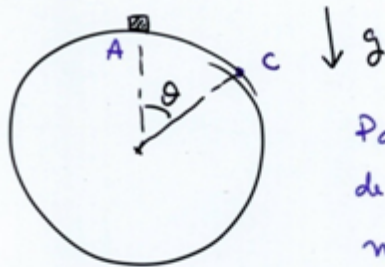
$$mgR = v_c^2 = 2g(h_A - h_c)$$

$$h_A = \frac{1}{2} [2h_c + R] //$$

Introducción a la Física Newtoniana



③



Para qué valor de θ , la masa m se despreja del cilindro.

Para que "m" se despreja del cilindro, quiere decir que NO lo toca (o no se apoya en él) $\Rightarrow$

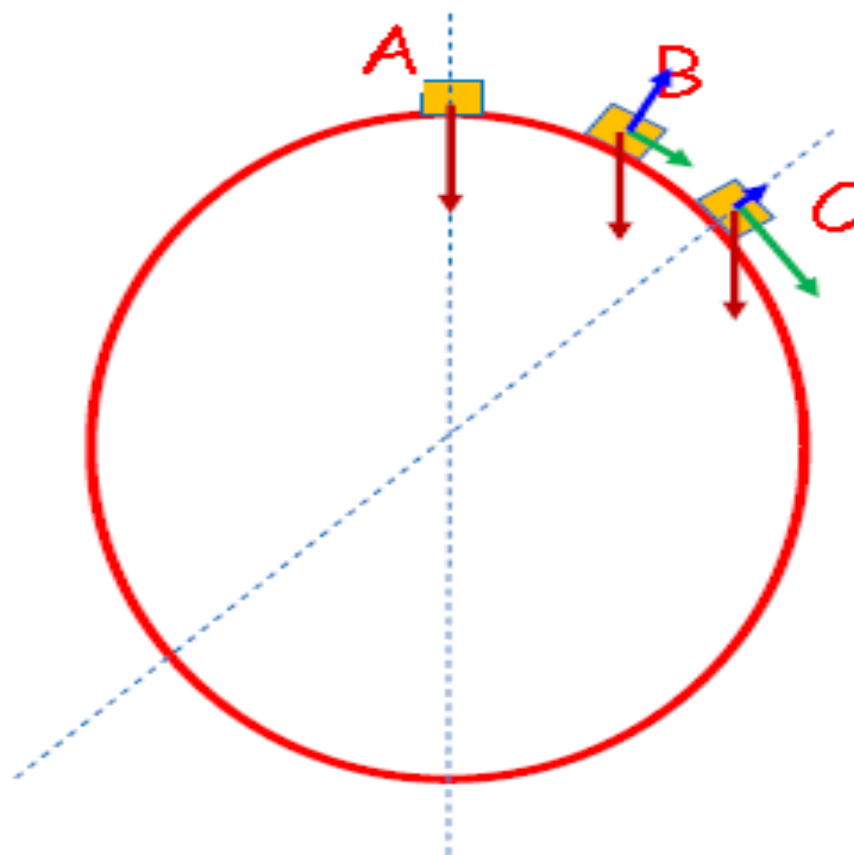
$$\vec{N} = 0$$

$$v_c^2 = 2g(R - R \cos \theta^*)$$

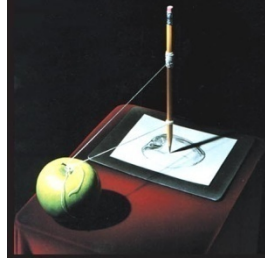
$$v_c^2 = 2gR(1 - \cos \theta^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{conservación} \\ \text{de la} \\ \text{Energía} \end{array} \right.$$

$$-m \frac{v_c^2}{R} = -mg \cos \theta^*$$

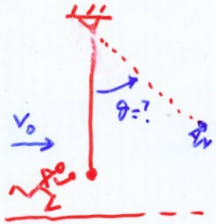
$$v_c^2 = 2gR(1 - \cos \theta^*) = gR \cos \theta^* \Rightarrow \cos \theta^* = \frac{2}{3}$$



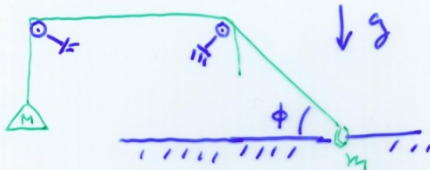
Introducción a la Física Newtoniana



Otros Ejemplos (Ver Guía)



Problema Desafío



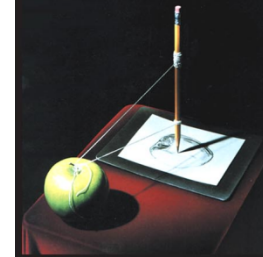
DEFINICIÓN:

La energía se obtiene a partir de la integral de la segunda ley de Newton a lo largo de la trayectoria de una partícula.

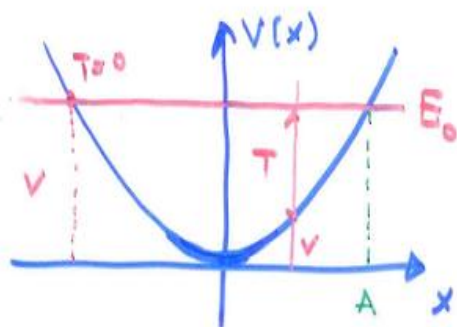
Es un número.

Si el número obtenido NO depende de la trayectoria, afirmamos que la energía se conserva. Tiene el mismo valor en cada punto de la trayectoria.

Introducción a la Física Newtoniana



Interpretación Gráfica de
la conservación de la Energía.



$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$T + V = E_0$$

$V(x)$ para una masa sobre puesta
en un resorte

