INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 4 de noviembre de 2014

Índice general

Capítulo XIII

TORQUE Y MOMENTO ANGULAR

XIII.1. MOMENTO ANGULAR

XIII.1.1. Definición

La definición de momento angular es:

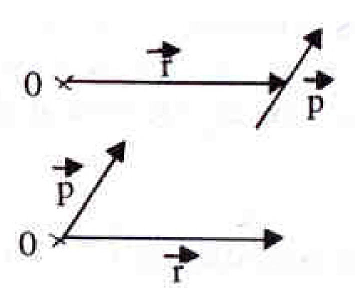
$$\vec{L} \equiv \vec{r} \wedge \vec{P} \tag{XIII.1}$$

Comenzamos con la definición del producto vectorial aplicada al momento angular, utilizando los vectores que la definen: $\vec{r}$ y $\vec{P}$.

El módulo de $\vec{L}$, está dado por:

$$L = |\vec{r}||\vec{P}|\text{sen}\theta.$$

El sentido de $\vec{L}$ está determinado por la regla de la mano derecha, y puede entrar ($\Rightarrow \ \vec{L} = L \bigotimes$), o salir del plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{p}$, ($\Rightarrow \vec{L} = L \bigodot$).



Recordemos que θ es el ángulo más pequeño entre $\vec{r}$ y $\vec{p}$.

Momento angular de una partícula rotando

Calculemos el valor del momento angular para el caso más simple. Una partícula de masa M que gira describiendo una circunferencia de radio r. El momentum lineal es:

$\vec{p} = m\,\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es tangente a la circunferencia y por lo tanto el ángulo que forma con el radio es $\theta = \pi/2$. El módulo de la velocidad tangencial es $v = \omega\,r$.

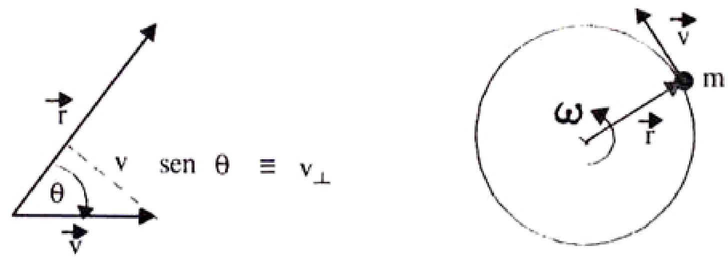


Figura XIII.1: Momento angular de una partícula moviéndose a lo largo de una circunferencia.

$$
\begin{aligned}
L &= m|\vec{r}\,||\vec{v}\,|\text{sen}\,\theta, \qquad \text{con} \quad |\vec{r}\,| = r \quad \text{y} \quad |\vec{v}| = v, \\
L &= mrv_{\perp}, \qquad \text{donde } v_{\perp} = \omega\,r \quad \text{en una circunferencia} \qquad \text{(XIII.2)} \\
L &= m\,r\,\omega\,r \\
L &= m \cdot r^2 \cdot \omega. \qquad \text{(XIII.3)}
\end{aligned}
$$

Esta última expresión representa el *Momento Angular* de una partícula que describe una órbita circular. La velocidad angular ω no debe ser necesariamente constante. La fórmula obtenida es general para el movimiento circular.

Momento angular de una barra rígida

¿Cuál es el momento angular de una barra que gira en torno a un extremo?

Este es un ejemplo de un sólido con dimensiones finitas. Para encontrar el momento angular de la barra, la descomponemos en una serie de trozos infinitesimales y calculamos el momento angular de cada uno de ellos, considerados como una partícula. Al sumar el momento angular de cada uno de ellos obtenemos el momento angular de la barra.

La exactitud de este método depende del error incorporado en la aproximación. Los elementos infinitesimales son, al fin de cuentas, pequeñas barras que nosotros hemos confundido con una partícula puntual. Mientras más pequeño sea el largo de estas barras infinitesimales y menor su ancho, mejor será la exactitud de este método.

Figura XIII.2: Descomposición de una barra continua en elementos muy pequeños que finalmente, en el cálculo, son considerdos como partículas puntuales.

El momento angular de este sistema de partículas es:

$$L = \sum_{n=1}^{N} m_n\, r_n^2\, \omega_0 \qquad \text{(XIII.4)}$$

ω_0 : es la velocidad angular de la barra. No es necesariamente constante.
r_n : indica la distancia que separa a la partícula n–ésima del centro de giro.
m_n : es la masa de la partícula n–ésima. La suponemos igual para cada uno de los elementos en que se dividió la barra.

El procedimiento usado consistió en dividir la barra en elementos de largo Δ – todos iguales–, tal como se indica en la Figura. El valor de r_n lo elegimos de manera que identifique el punto medio de cada uno de los elementos en que se dividió la barra. Este punto medio es el centro de masa de la barra infinitesimal.

$$\begin{aligned}
r_n &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta = (2n-1)\frac{\Delta}{2}, \qquad n = 1, 2, 3..., && \text{(XIII.5)}\\
m_n &= m_0, \quad \text{la masa es la misma para cada uno de los trozos } \Delta,\\
\omega &= \omega_0, \quad \omega \text{ no depende de n},\\
L &= m_0\,\omega_0 \left(\sum_{n=1}^{N} r_n^2\right) = m_0\,\omega_0 \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \sum_{n=1}^{N}(2n-1)^2\\
L &= m_0\,\omega_0 \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \left[\sum_{n=1}^{N}(4n^2 - 4n + 1)\right] && \text{(XIII.6)}
\end{aligned}$$

Resumiendo, hemos considerado la barra rígida como un agregado de puntos materiales que en conjunto rotan con una velocidad angular ω_0 constante, con respecto a uno de sus extremos.

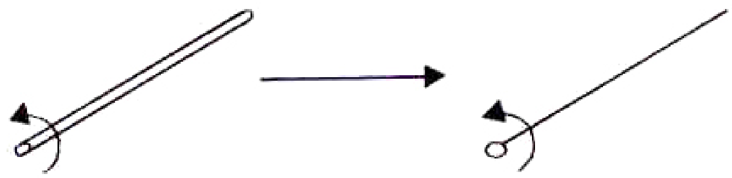


Figura XIII.3: Modelo usado para calcular el momento angular de una barra rígida. En rigor, este modelo identifica la barra con un segmento de una línea recta: no consideramos su ancho. Incluirlo complica el álgebra y no agrega nada conceptualmente nuevo.

Definimos $r_n = (n - \frac{1}{2})\,\Delta$ para indicar el Centro de Masa de cada uno de los trozos en que se dividió la varilla. De esta forma, para $n = 1$, el CM se ubica en $\Delta/2$ y para la n–ésima partícula, tenemos $(n\,\Delta - \Delta/2) = (n - 1/2)\Delta$.

Resumen de los resultados sobre series

En el párrafo que sigue, citamos los resultados acerca de series que son necesarios para resolver este ejercicio.

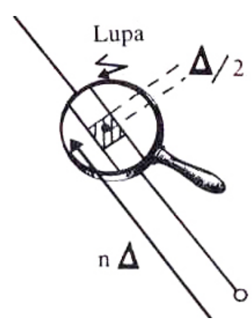
$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N}{6}(2N+1)(N+1).$$

Recordemos que:

$$\sum_{n=1}^{N}(Aa_n + Bb_n) = A(\sum_{n=1}^{N} a_n) + B(\sum_{n=1}^{N} b_n),$$

Con A y B independientes de n. Los otros coeficientes a_n y b_n pueden depender de n.



XIII.1.2. Momento de inercia de una barra

Retornando a la sumatoria [XIII.6]. Si desarrollamos cada uno de los términos incluidos allí, obtenemos la siguiente expresión:

$$L = m_0\,\omega_0 \frac{\Delta^2}{4}\left[\sum_{n=1}^{N} 4n^2 - \sum_{n=1}^{N} 4n + \sum_{n=1}^{N} 1\right],$$

el resultado de cada una de las sumatorias es:

$$= m_0\,\omega_0\,\Delta^2\left[\frac{N}{6}(2N+1)(N+1) - \frac{N(N+1)}{2} + \frac{N}{4}\right],$$

y finalmente, ordenando la suma:

$$= m_0\,\omega_0\left[\frac{\Delta^2}{6}N(2\,N+1)(N+1) - \Delta^2\frac{N(N+1)}{2} + \frac{\Delta^2 N}{4}\right]. \qquad \text{(XIII.7)}$$

El paso siguiente consiste en lograr que esta suma de pequeñas barras se aproxime lo más posible a una barra continua. Para ello imponemos que $N \rightarrow \infty$, esta operación equivale a subdividir repetidamente cada trozo infinitesimal de la barra, es decir:

$$\Delta \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty \qquad \text{de forma que se cumpla}$$

$$\lim_{N\rightarrow\infty} N\cdot\Delta = \ell, \quad \text{con } \ell \equiv \text{ largo de la barra.} \qquad \text{(XIII.8)}$$

Además: $$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ m_0 \rightarrow 0}} [N\cdot m_0] = M, \quad \text{masa de la barra.} \qquad \text{(XIII.9)}$$

Agrupando explícitamente en la sumatoria [XIII.7], cada uno de los productos: $\Delta\cdot N$ y $m_o\cdot N$, la expresión del Momento Angular L, toma la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
L &= \omega_0 \left\{ \frac{1}{6}(m_0\, N)[\,2\,N\,\Delta + \Delta][\,N\,\Delta + \Delta] \right.\\
&\qquad \left. -\frac{m_0}{2}\,\Delta\,N\,[\Delta\,N + \Delta] + \Delta\,N \cdot \frac{\Delta\,m_0}{4} \right\}.
\end{aligned}
$$

donde usamos: $\Delta^2(2N+1)(N+1) \equiv (2N\Delta + \Delta)(N\Delta + \Delta).$

Ahora si: $\Delta \to 0, \qquad m_0 \to 0, \qquad N \to \infty,$

con $\Delta \cdot N = \ell, \qquad N \cdot m_0 = M$ entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
L &= \omega_0 \left[\frac{1}{6}\,M\,(2\ell + \Delta)(\ell + \Delta) - \frac{m_0}{2}\,\ell(\ell + \Delta) + \frac{\ell}{4}\,\Delta\,m_0 \right],\\
L &= \frac{M\ell^2}{3}\omega_0. \qquad \text{(XIII.10)}
\end{aligned}
$$

En la última igualdad, descartamos los términos que contenían como factores a Δ y m_o. Esta determinación se tomó porque ambos términos tienden a cero. Su efecto en la suma se desvanece en este límite, frente a los otros términos que permanecen finitos.

El factor que acompaña a ω_0 depende solamente de la geometría del cuerpo y de la ubicación relativa del eje de rotación dentro del cuerpo. Este término tiene dimensiones de masa multiplicado por largo al cuadrado. Recibe el nombre de *momento de inercia* y se identifica con la letra I.

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \text{ momento de inercia. Sus dimensiones son: } [M] \cdot [L]^2\\
I &= \frac{1}{3}M\ell^2, \qquad \text{(XIII.11)}
\end{aligned}
$$

este es el momento de inercia de una barra evaluado con respecto a uno de sus extremos. La barra tiene largo ℓ y masa M.

La expresión genérica del momento de inercia I, de un objeto es:

$$I = k\,M\,L^2,$$

donde k es un número determinado por la geometría del cuerpo y la posición del eje con respecto al cual se calcula el momento de inercia I. M es la masa del cuerpo y L, representa una longitud característica del objeto.

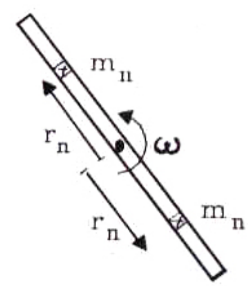
No existe un valor único de I asociado a un cuerpo, como se ilustra a continuación.

Ejemplo

Calcular el valor del momento de inercia de una barra que rota con respecto a un eje que pasa por su centro de masa.

El largo de la barra es ℓ y su masa M.

$$I \equiv \sum_{n=1}^{N} m_n\, r_n^2.$$



Sabemos que es posible realizar esta suma en cualquier orden sin alterar el resultado. Entonces podemos considerar este ejemplo como una suma de dos barras independientes, cada una de largo $\ell/2$ y masa $M/2$.

Esta es la fórmula que se usó anteriormente. Aquí r_n señala cada uno de los trozos en que se subdividió la barra. Como es una *suma*, podemos hacerla en la forma que más nos convenga. Primero debemos sumar los términos hacia un lado de la barra y enseguida el resto, esto es lo que hacemos en la primera línea de la ecuación que sigue. Ya hemos calculado anteriormente cada una de las sumas; su valor se inserta en la segunda de las ecuaciones que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{n=1}^{N/2} m_n r_n^2 + \sum_{k=1}^{N/2} m_k\, r_k^2,\\
I &= \frac{1}{3}\left(\frac{M}{2}\right)\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{M}{2}\right)\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^2,\\
&= \frac{1}{24}\, M\ell^2 + \frac{1}{24}\, M\ell^2,\\
I &= \frac{1}{12}\, M\, \ell^2. \qquad \text{(XIII.12)}
\end{aligned}$$

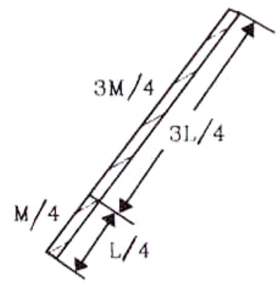
Este es el valor del momento de inercia de una barra que gira con respecto a su punto medio. Como se aprecia, siempre tiene un valor proporcional a $M\cdot\ell^2$. El factor numérico que lo multiplica depende de la posición relativa del eje de giro en el cuerpo.

Ejemplo

Calcule el valor del momento de inercia de la misma barra anterior, pero ahora tomando como referencia un eje perpendicular al plano del papel, ubicado a una distancia $\frac{L}{4}$ de su extremo.

Respuesta:

$$
\begin{aligned}
I &= I_{\frac{3L}{4}} + I_{\frac{L}{4}},\\
I &= \frac{1}{3}\,(\frac{3M}{4})\,(\frac{3\,L}{4})^2 + \frac{1}{3}\,(\frac{M}{4})\,(\frac{L}{4})^2,\\
I &= \frac{7}{48}\,M L^2. \;\square
\end{aligned}
$$



Resumen:

La expresión para el momento de inercia I, se obtuvo a partir del momento angular de una partícula que gira en un plano describiendo una circunferencia.

El momento angular de un cuerpo en torno a un eje fijo es:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = I\,\vec{\omega}, \tag{XIII.13}$$

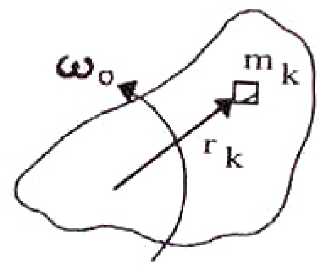
donde el $\vec{\omega}$ apunta en la dirección perpendicular al plano y cuyo sentido queda determinado por la regla de la mano derecha. Coincide, además, con el sentido determinado a partir del producto vectorial $\vec{r} \wedge \vec{p}$.

$$I = \sum_{n=1}^{N} m_n\, r_n^2 \equiv \int dm\, r^2. \tag{XIII.14}$$

I es una cantidad que depende de la ubicación del eje de rotación y de la geometría del objeto.

Si el cuerpo es un sólido rígido y rota con velocidad angular ω alrededor de un eje, podemos escribir entonces:

$$L = \sum_{i=1}^{N} m_i\, r_i^2\, \omega_0 = I\, \omega.$$



XIII.1.3. Torque y aceleración angular. Rotación con respecto a un eje fijo

Si el eje de rotación mantiene fija su orientación y el cuerpo no se deforma o cambia la posición relativa de sus componentes; la variación del momento angular en el tiempo se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &\equiv \lim_{\Delta t \to 0} I \left(\frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \right), \\
\text{donde } I &= \text{constante, por ser un sólido rígido.} \\
&= I \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \right), \\
\frac{dL}{dt} &= I\, \alpha, \quad \text{donde } \alpha \text{ es la aceleración angular.}
\end{aligned}$$

Para incorporar el torque en la última ecuación, utilicemos la definición del momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ y derivémosla con respecto al tiempo para conectarla con la expresión anterior.

Comencemos enfatizando dos puntos: primero, realizaremos este cálculo para una partícula y posteriormente, generalizaremos al cuerpo entero, sumando sobre cada una de ellas. Segundo: *en un sólido rígido, todas las partículas tienen la misma velocidad y aceleración angular,* ω y α, respectivamente.

Por definición:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\vec{r}(t+\Delta t) \wedge \vec{p}\,(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \wedge \vec{p}(t)}{\Delta t} \right\}$$

Debemos aplicar la condición de *Leibnitz* –que caracteriza a toda operación que se denomine derivada–, a esta última expresión. Esta condición afirma que:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{A(t+\Delta t)\cdot B(t+\Delta t) - A(t)B(t)}{\Delta t} \right\} \quad &= \\
= A(t) \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t} \right] \quad &+ \\
\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \right] \cdot B(t).
\end{aligned}$$

Entonces, en el caso del momento angular L,

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\, L}{\Delta\, t} = \left[\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right) \right] \quad \wedge \quad \vec{p} \ + \\
+\ \vec{r}(t) \ \wedge \ \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} \right], \\
\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\vec{L}(t+\Delta t) - \vec{L}(t)}{\Delta t} \right] = \vec{v} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{F},
\end{aligned}$$

el primer término es cero, puesto que $\vec{p} = m\,\vec{v}$, y por lo tanto es paralelo a $\vec{v}$. Finalmente, obtenemos:

$$\frac{d\,\vec{L}}{d\,t} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{\text{externas}} \ = \ \vec{\tau}. \tag{XIII.15}$$

Resumen:

Hemos resumido el cálculo, por ejemplo, falta la sumatoria de esta expresión con respecto a cada una de las partículas: es decir, en $\vec{r} \wedge \vec{p}$, debería aparecer $\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$. También faltó analizar el efecto de las fuerzas internas y estudiar como se cancelan los torques generados por estas fuerzas, por efecto del principio de acción y reacción.

El resultado final es el exhibido en la ecuación [XIII.15], donde **L** representa el momento angular del cuerpo rígido y τ el torque externo que actúa sobre el sistema.

Las expresiones obtenidas a partir de la definición del momento angular L y de su derivada son:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}, \qquad \text{(XIII.16)}$$

$$\Delta\vec{L} = \Delta t\, \vec{\tau}. \qquad \text{(XIII.17)}$$

Para un cuerpo rígido:

$$\vec{\tau} = I\,\vec{\alpha}. \qquad \text{(XIII.18)}$$

$$\text{Si} \sum \vec{\tau} = 0, \Longrightarrow \Delta\vec{L} = 0 \Longrightarrow \vec{L} = \text{constante.} \qquad \text{(XIII.19)}$$

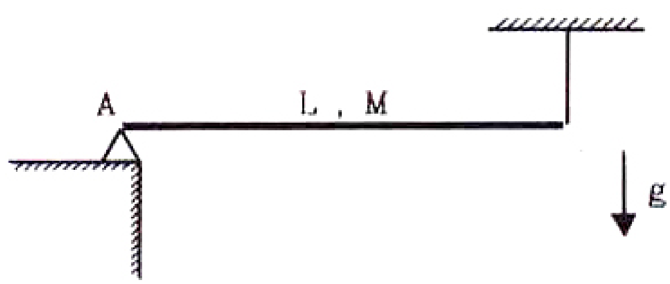


Figura XIII.4: Barra rotulada en **A** y sostenida por un hilo desde el extremo opuesto. Al cortarse repentinamente la cuerda, la reacción en el punto A disminuye, como se demuestra en el Ejemplo siguiente.

Ejemplo

Una barra de masa M, largo L y momento de inercia I_A con respecto al punto A, ($I_A = \frac{1}{3}\,ML^2$), está sostenida por un hilo en el punto B y puede girar alrededor de un pivote en el otro extremo. Repentinamente el hilo se corta.

a) Calcular las reacciones en el punto A y la tensión de la cuerda en B, antes de cortarse el hilo.

b) Calcular la reacción R en A y la aceleración angular α *inmediatamente* después del corte de la cuerda.

Respuesta:

a) No existen fuerzas horizontales, entonces sólo existen componentes verticales, y al aplicar las leyes correspondientes a la estática, se obtiene:

$R_A = T_B = \frac{1}{2} Mg.$

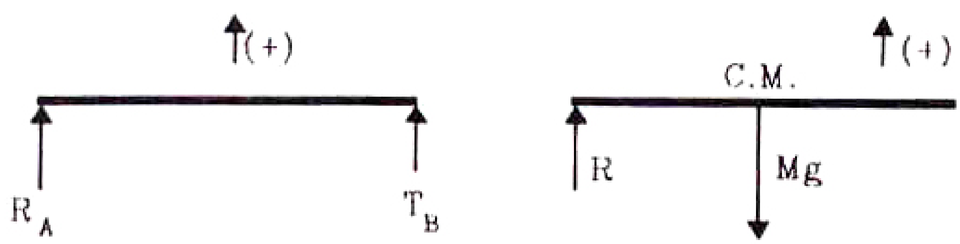


Figura XIII.5: Diagrama de cuerpo libre para el caso estático, antes de romper la cuerda (izquierda) y justo después que se corta.

b) Note que se piden estos valores exactamente después del corte de la cuerda, puesto que en un instante posterior el problema se complica, porque el torque va a depender del valor del ángulo que la barra forme con la horizontal.

Aplicando la segunda ley de Newton en el centro de masa de la barra, tenemos:

$$1)\ \ R - Mg = M\, a_{CM},$$

y calculando el torque con respecto al extremo fijo A,

$$\sum \tau_A = I\alpha, \quad \text{y reemplazando la expresión del torque,}$$

$$2)\quad Mg \cdot \frac{L}{2} = I\alpha.$$

Existe una relación geométrica entre la aceleración angular y la aceleración del centro de masa, cuando la barra comienza a girar con respecto al punto A:

$$3)\ \ a_{CM} = \alpha \cdot \frac{L}{2}.$$

Figura XIII.6: Diagrama de cuerpo libre de la barra justo en el instante en que se cortó el hilo. Se ilustra también la relación entre la velocidad angular y la velocidad lineal del centro de masa.

Ahora ya tenemos suficientes ecuaciones para resolver este problema. Despejando α de la ecuación 3) obtenemos:

$$\frac{1}{4} M g L^2 = I\, a_{CM} = \frac{1}{3} M\, L^2\, a_{CM}, \qquad \text{de donde:}$$

$$a_{CM} = \frac{3}{4}\, g \quad \text{y} \quad R = \frac{1}{4}\, M\, g. \square$$

Es interesante hacer notar que el extremo de la barra tiene una aceleración de:

$$a_B = \alpha\, L = a_{CM}\, \frac{2}{L}\, L = \frac{3}{2}\, g.$$

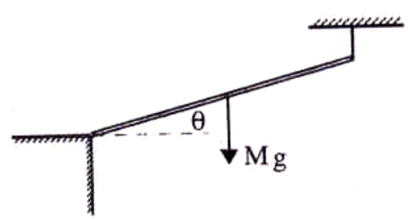
Podemos hacer un experimento para saber si este resultado es correcto: colocar una bolita en el extremo de una barra, similar a la del ejemplo reciente pero que haga un cierto ángulo sobre la horizontal. Si repentinamente soltamos la barra, la bolita experimenta una aceleración igual a g, por lo tanto debe caer más lentamente que el extremo de la barra y además verticalmente, con lo cual alcanzará un punto más al interior de la barra. Se puede hacer, en ese punto, una concavidad para que la bolita se instale allí al final de su caída y, con esto, verificar los resultados obtenidos aquí.

Ejemplo

¿Qué sucede si la barra forma un ángulo θ con respecto a la horizontal? ¿Cuál es el valor de la aceleración en el extremo de la barra?

Todo es similar al ejemplo anterior, excepto que:

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge \vec{g} &= r\, g\, \mathrm{sen}(\,\theta + \pi/2), \\ &= r\, g\, \cos\theta\ \otimes . \end{aligned}$$



Las ecuaciones de Newton, el torque y la relación entre la aceleración angular y lineal, para el caso en que el hilo se acaba de cortar, se escriben a continuación:

$$\begin{aligned}
1)\quad & M\,a_{CM}\,\cos\theta && = -R_y + M\,g,\\
2)\quad & M\,a_{CM}\,\text{sen}\,\theta && = R_x,\\
3)\quad & M\,g\,\tfrac{L}{2}\,cos\,\theta && = I\alpha \quad \bigotimes,\\
4)\quad & a_{CM} && = \alpha\,\tfrac{L}{2}.
\end{aligned}$$

Donde T es la fuerza tangencial que ejerce el piso sobre la barra. R es la reacción normal del piso.

Despejando la velocidad angular en función de la velocidad del CM de la ecuación 4) y reemplazándola en la ecuación 3), obtenemos:

$$a_{CM} = \frac{M\,g\,\cos\,\theta\,L^2}{\frac{1}{3}\,M\,L^2\,4} = \frac{3}{4}\,g\,\cos\,\theta,$$

esta es la aceleración del CM. En el extremo de la barra se cumple:

$$a = \frac{3}{2}\,g\,\cos\,\theta.$$

Si $\cos\,\theta > \dfrac{2}{3} \Rightarrow\; a_B > g$, en el instante en que se corta el hilo de la barra.

Ejercicio

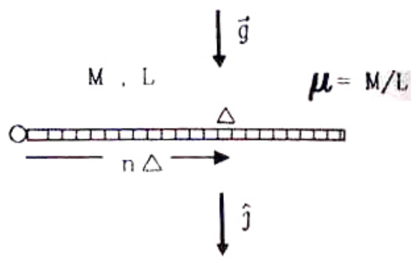
Calcular la posición de la cavidad de manera que la bolita al caer, desde un extremo de la barra, se ubique en el receptáculo.□

Ejemplo

Demuestre que al calcular el torque con respecto a un extremo de la barra y concentrar todo el peso en el CM, como se hizo en el ejemplo anterior, se obtiene el mismo resultado que al evaluar el torque generado por el peso de cada elemento infinitesimal de barra con respecto al mismo punto.

En la ecuación 3) del último ejemplo, usamos el peso del cuerpo $M\,g$ como la fuerza que generó el torque, sin embargo en rigor deberíamos usar la suma de los pesos de cada una de las partes infinitesimales de la barra por su respectivo brazo, para calcular el torque total.

No lo hicimos porque el resultado es el mismo, es equivalente a considerar el peso de la barra concentrado en el CM. A continuación demostramos este resultado. Δ es el largo de cada segmento de barra, μ es la densidad lineal, M la masa total y L el largo de la barra. El vector unitario $\hat{\jmath}$ se indica en la Figura.



Note que la barra permanece horizontal, de modo que:

$$\vec{r}_i \wedge (g\,\hat{\jmath}) = r_i\,g, \quad \text{puesto que} \quad \operatorname{sen}\theta = 1.$$

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \mu\,\Delta \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge (g\,\hat{\jmath}), \\
\vec{\tau} &= \mu\,\Delta\,g \left[\sum_{n=1}^{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\Delta = \mu\,g\,\Delta^2 \left[\sum_{n=1}^{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right], \\
&= \mu\,g\,\Delta^2\{\tfrac{1}{2}\,N^2 + \tfrac{1}{2}\,N + \tfrac{1}{2}\,N\}, \\
&= \mu\,g\,\{\tfrac{1}{2}\,(N\Delta)^2 + (N\Delta)\cdot\Delta\},
\end{aligned}$$

Tomando el límite $\Delta \to 0$, $N \to \infty$, tal que $N \cdot \Delta = L$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\tau &= \underbrace{\mu\,g\,\frac{1}{2}L^2} + \mu\,g \cdot L \cdot \Delta, \\
\vec{\tau} &= (\mu L)\,g\,\tfrac{L}{2} = \tfrac{1}{2}\,M\,g\,L \;\bigotimes .
\end{aligned}$$

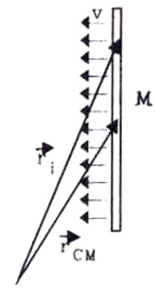
Con este cálculo verificamos que, concentrar la masa total del cuerpo en el CM, y calcular el torque sumando el efecto de cada uno de sus elementos, son métodos equivalentes.

Ejemplo

Calcular el momento angular con respecto a un punto P, para una barra que se traslada (sin rotar) con velocidad $\vec{V}$ en un plano, como se indica en la Figura.

$$\vec{L} = \sum_{i=i}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \right) \wedge \vec{p},$$

ya que $\vec{p}_i = \vec{p}_j = \vec{p}$ debido a que la barra experimenta solo traslación.



$$\sum \vec{r}_i = \sum (\vec{r}_{CM} + n\,\Delta\,\hat{\jmath}) = N\,\vec{r}_{CM} + 0.$$

Donde $\sum (n\,\Delta)\,\hat{\jmath} = 0$, puesto que –por simetría– existe el mismo número de segmentos de largo Δ sobre el CM, que bajo él.

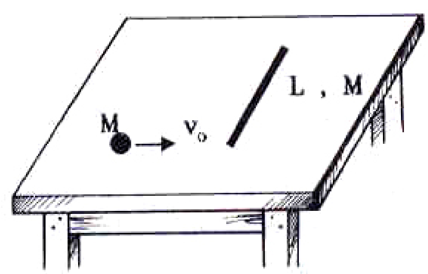
$$p = m_o\,\vec{v}\ ,\ N\,m_o = M.$$

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \wedge (M\,\vec{v}).$$

Ejemplo

Una barra de largo L y masa M descansa sobre una mesa horizontal pulida (con roce despreciable). Una masa M que tiene una velocidad v_0 y que está dirigida perpendicularmente contra la barra (ver Figura) choca con el extremo y se queda pegada a ella.

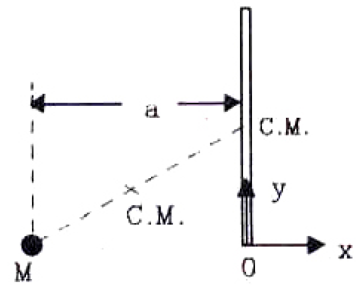
a) ¿Cuál es la posición del CM del sistema cuando la masa se encuentra a una distancia a de la barra?
b) ¿Cuál es el valor de la velocidad del CM, antes y después del choque?
c) Calcule la velocidad angular ω_0 del sistema barra–masa con respecto al CM, antes y después del choque.



Solución:

a) Por simetría, el CM de la barra homogénea se ubica en su punto medio. Para determinar el CM del sistema barra–masa, lo descomponemos en dos masas puntuales, una que representa a la barra ubicada en su punto medio y la otra la masa M. El CM del sistema se localiza en el punto medio de la línea que los une.

Ubicamos el origen del sistema de coordenadas en el extremo de la barra, en el lugar exacto donde ocurrirá el choque (ver Figura).
En un cierto instante, la masa M se ubica en $x=-a$, entonces, usando la expresión para calcular el CM, obtenemos para el sistema barra–masa:



$$
\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{(-a)M + 0\cdot M}{2M} = -\frac{a}{2},\\
y_{CM} &= \frac{0\cdot M + \frac{L}{2}M}{2M} = \frac{L}{4}.
\end{aligned}
$$

b) Como $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ en el plano de la mesa, entonces:

$$\Delta\,\vec{P}_{CM} = \Delta\,t\,\left[\sum \vec{F}_{ext}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{V}_{CM}|_{\text{antes}} = \vec{V}_{CM}|_{\text{después}}.$$

$$V_{CM}|_x = \frac{M\,v_0\;+\;M\cdot 0}{2M} = \frac{1}{2}\,v_0, \qquad V_{CM}|_y = 0.$$

Donde hemos usado [**??**]: $\vec{V}_{CM} = \dfrac{\sum m\,\vec{v}_i}{\sum m_i}$.

c) Como la masa M no choca con el centro de masa de la barra, después del choque, el conjunto experimenta un movimiento de traslación y rotación simultáneos. El CM del sistema *no* sufre cambios debido al choque, puesto que las fuerzas que ocurren en ese instante, son internas y no afectan la dinámica del conjunto barra–masa. Como no hay fuerzas externas en el plano de la mesa, *la velocidad del centro de masa permanece constante e igual a* $V_0/2$.

Parece razonable reubicar el origen del sistema de referencia en el centro de masa. En esta nueva ubicación, la barra junto con la masa M en su extremo, no se desplaza y sólo gira en torno al nuevo origen de coordenadas. Más aún, como el torque externo al sistema barra-masa es nulo, el momentum angular, L_0, permanecerá constante.

$$\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad L = constante,$$

es decir: $L_{\text{antes del choque}} = L_{\text{después del choque}}.$

Comencemos estudiando el movimiento del conjunto barra–masa, desde el sistema ubicado fijo al centro de masa.

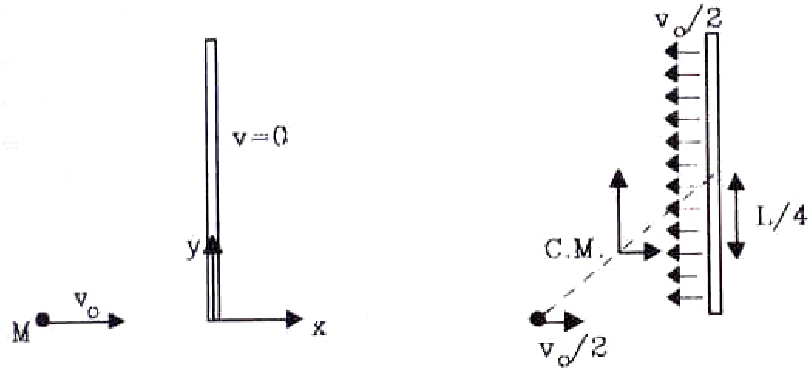


Figura XIII.7: El choque visto por un observador ubicado en la mesa (sistema de Laboratorio) y otro observador que se mueve con el centro de masa del conjunto barra–masa.

Calculemos las velocidades relativas. De acuerdo a la fórmula obtenida en el Capítulo III:

$$V_{\text{barra/CM}} = V_{\text{barra/Lab}} + V_{\text{Lab/CM}} = V_{\text{barra/Lab}} - V_{\text{CM/Lab}},$$

reemplazando los valores correspondientes:

$$V_{\text{barra /CM}} = 0 - \frac{V_0}{2} = -\frac{V_0}{2},$$

$$V_{\text{masa / CM}} = V_{\text{masa/Lab}} - V_{\text{CM/Lab}} = V_0 - \frac{V_0}{2} = \frac{V_0}{2}.$$

Ambas velocidades sólo tienen componentes en el eje–x.

Para calcular la velocidad angular después del choque, necesitamos conocer el valor del momento angular del sistema antes que éste ocurra. Este valor es la suma del momento angular de la barra más la contribución de la masa M. Si tomamos como origen el CM, entonces (ver ejercicio previo):

$$L_{\text{barra/CM}} = \vec{r}_{CM} \wedge \vec{p} = \frac{M\,L\,V_o}{8}, \tag{XIII.20}$$

$$L_{\text{masa/CM}} = M\,\frac{V_o}{2}\,\frac{L}{4}, \quad \text{y el momento angular total es,} \tag{XIII.21}$$

$$L_{\text{antes del choque}} = \frac{1}{4}\,L\,M\,V_o. \tag{XIII.22}$$

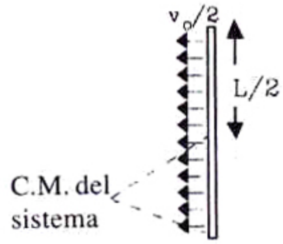


Figura XIII.8: Campo de velocidades de la barra. La barra no tiene velocidad angular, todos sus puntos tienen la misma velocidad, en consecuencia, podemos usar el resultado obtenido en un ejercicio anterior para el cálculo del momento angular.

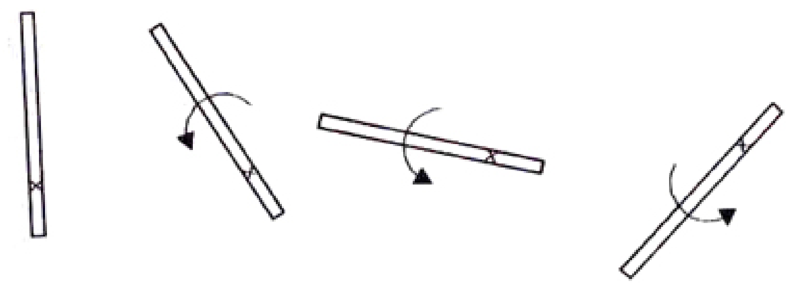


Figura XIII.9: Movimiento del conjunto barra–masa después del choque. El CM se mueve con velocidad constante, por lo tanto las cruces –que ubican el CM– deben estar en una línea horizontal e igualmente espaciadas, si los intervalos de tiempo considerados entre cada posición, son iguales.

Después de ocurrido el choque, el momento angular del conjunto permanece constante y el *conjunto barra–masa gira como un todo*, lo que facilita el cálculo del momento angular total:

$$L_{\text{después del choque}} = L_{\text{barra/CM}} + L_{\text{masa/CM}}.$$

$L_{\text{barra/CM}} = I\,\omega_0$, (puesto que sólo existe rotación, con respecto al CM).

I $\equiv$ Momento de Inercia de una barra rotando con respecto al centro de masa del conjunto barra–masa.

El valor del momento de inercia de la barra rotando con respecto al punto que se indica en la Figura ya se calculó en un ejemplo anterior, el valor obtenido fue:

$$I = \frac{7}{48}\,M\,L^2.$$

$$L_{\text{después del choque}} = \underbrace{\frac{7}{48}\,ML^2\,\omega_0}_{I\,\omega_0} + \underbrace{M\left(\frac{L}{4}\right)^2\,\omega_0}_{M\,r_M^2\,\omega_0} = \frac{5}{24}\,ML^2\,\omega_0,$$

pero, $L_{\text{antes}} = L_{\text{después}}$, de aquí obtenemos la ecuación que nos permite calcular ω_0:

$$\frac{M\,V_o\,L}{4} = \frac{5}{24}\,(\omega_0\,L)\,ML, \quad \text{simplificando, se tiene:}$$

$$V_0 = \frac{5}{6}\,(\omega_0\,L) \implies \omega_0 = \frac{6}{5}\,\frac{V_0}{L}.$$

Comentarios

Este es un problema largo y conviene resumir sus puntos más importantes.

• El conjunto estudiado consiste en la barra y la masa puntual. Sobre este sistema *no* existen fuerzas externas en el plano de la mesa, por lo tanto el momentum lineal y el momento angular se conservan:

$$\Delta\,\vec{P}_{\text{sistema}} = 0,$$
$$\Delta\,\vec{L}_{\text{sistema}} = 0.$$

Cualquier cambio de velocidades entre estas dos componentes se debe a la acción de las fuerzas internas.

• Como no hay fuerzas externas el centro de masa se mueve con *velocidad constante*, por lo tanto conviene ubicar el sistema de referencia fijo a dicho punto. Las leyes de Newton son válidas allí, puesto que *es* un sistema inercial.

• Al considerar el momento angular antes del choque, la barra se toma como un punto de masa M y velocidad $(V_0/2)$ porque se *traslada paralelamente a sí misma*.

• Como las masas de ambos cuerpos son iguales a M, no tenemos oportunidad de considerar los casos extremos en que la partícula tiene una masa m muy pequeña o muy grande comparada con la masa M de la barra.

Ejercicio

Repita estos cálculos utilizando una masa $m \neq M$ para la partícula puntual. Verifique que estos resultados coinciden con los obtenidos anteriormente, cuando se impone que ambas masas sean iguales.

XIII.2. TEOREMA DE STEINER

XIII.2.1. Momento de inercia

Existen muchos ejemplos interesantes en los cuales el eje de rotación no pasa por el centro de masa.

A continuación expresamos el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje fijo, perpendicular al plano de movimiento y que lo atraviesa por un punto arbitrario.

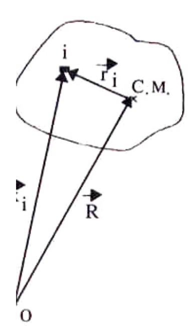
El valor del momento de inercia con respecto a este nuevo eje es igual a la suma del momento de inercia del cuerpo con respecto al centro de masa y el valor del momento de inercia del centro de masa –considerado como una partícula– con respecto al nuevo eje.

La única operación que debemos realizar es descomponer el vector posición de cada una de las partículas $\vec{x}_i$, como la suma de un vector que va desde el eje al centro de masa $\vec{R}_{CM}$ y otro que apunta desde el CM al punto i–ésimo, $\vec{r}_i$.

$$I_o = \sum_{i=1}^{N} m_i\,(\vec{x}_i)^2, \qquad \vec{x}_i = \vec{R} + \vec{r}_i.$$

Utilizaremos $\vec{R}_{CM} \equiv \vec{R}$, en los siguientes desarrollos, en el resultado final incluiremos nuevamente el sub–índice CM.

$$\begin{aligned}
(\vec{x}_i)^2 &= (\vec{R} + \vec{r}_i)^2, \\
(\vec{x}_i)^2 &= \vec{R}^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{r}_i + \vec{r}_i^{\,2}, \\
I_o &= \sum_{i=1} m_i \left[\vec{R}^2 + 2\,\vec{R}\cdot\vec{r}_i + \vec{r}_i^{\,2}\right], \\
\textstyle\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i &= 0, \quad \text{entonces:} \\
I_o &= M\,R_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i^{\,2}.
\end{aligned}$$



Identificando los términos correspondientes, se obtiene:

$$I_o = I_{CM} + I_{\mathrm{c/r}\,CM}$$

XIII.2.2. Momento angular

Una situación análoga se produce en el caso del momento angular. La misma separación de coordenadas anterior, es válida aquí . El detalle de los cálculos es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \wedge \vec{p}_i \quad &= \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \wedge (m_i\,\vec{v}_i), \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left\{(\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i) \wedge (m_i\,\vec{v}_i)\right\}, \\
&= \vec{R}_{CM} \wedge \left[\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\right] + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge (m_i\,\vec{v}_i), \\
\text{como, } \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i \quad &= M\,\vec{V}_{CM}, \quad \text{y además, } \vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{u}_i, \quad \text{reemplazando}
\end{aligned}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
\vec{L} \;&=\; \vec{R}_{CM} \wedge (M\,\vec{V}_{CM}) \;+\; \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i\right) \wedge \vec{V}_{CM} + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge (m_i\,\vec{u}_i).
\end{aligned}$$

En este cálculo hemos usado la igualdad: $\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i = 0$, y la composición de velocidades: $\vec{v}_i = \vec{V}_{CM}+\vec{u}_i$, obtenida derivando con respecto al tiempo, el vector posición: $\vec{x}_i = \vec{R}_{CM}+\vec{r}_i$.

El momento angular con respecto al punto O se descompone en la suma de dos términos: el momento angular del cuerpo con respecto al centro de masa y el momento angular del objeto –concentrado en su centro de masa–, con respecto al punto O:

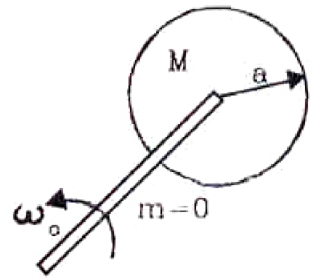
$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} \;+\; \vec{R} \wedge\; M\,\vec{v}_{CM}.$$

La variación del momento angular con respecto al tiempo está relacionada con el torque a través de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{\mathrm{O}} \;=\frac{d\,\vec{L}_O}{dt}$$

Ejemplo

Una barra de masa despreciable ($m = 0$) y largo ℓ, sostiene en su extremo un disco –de masa M y radio a– mediante un eje sin fricción. Si a medida que la barra gira, el disco permanece paralelo a sí mismo, calcular el momento angular con respecto al eje de giro de la barra.



El momento angular es:

$$\vec{L}_o = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \wedge M\,\vec{v}_{CM}.$$

Como el disco *no* gira con respecto a su centro de masa, $\vec{L}_{CM} = 0$. El momento angular se reduce al de una masa M ubicada en el extremo de la barra, que rota con la velocidad angular de la barra ω_o:

$$I = M\,\ell^2, \qquad L_o = M\,\ell^2\,\omega_o.$$

Ejemplo

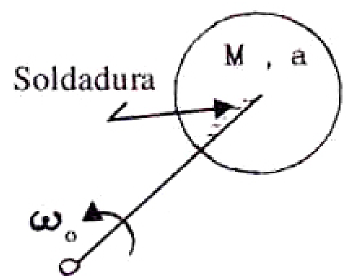
Para evitar que el disco se traslade paralelamente a sí mismo, como sucede en el caso anterior, lo fijamos a la barra. Ahora el disco *gira* unido a la barra y su centro de masa describe una circunferencia.

Calcule el momento angular del conjunto.

La expresión del momento angular es:

$$L_o = L_{\text{CM}} + L_{\text{c/r CM}}.$$

$L_{\text{c/r CM}}$ es el momento angular del disco con respecto a su centro. Su velocidad angular es la misma de la barra. Su valor es:



$$L_{\text{c/r CM}} = I_{\text{c/r CM}}\,\omega_o = \frac{1}{2}\,M\,R^2\,\omega_o,$$

donde ω_o es la velocidad angular de la barra. $[M\,R^2]/2$, es el valor del momento de inercia del disco con respecto a su centro.

Por otra parte:

$$L_{CM} = M\,\ell^2\,\omega_o \quad \Rightarrow \quad L_o = \left\{M\,\ell^2 + \frac{1}{2}\,M\,R^2\right\}\,\omega_o.\Box$$

Supongamos que en este caso $\ell = R$, entonces $L_o = [3\,M\,R^2]/2\,\omega_o$. Esto es equivalente a que el disco gire en torno a un eje situado en el borde, por lo tanto, el valor del momento de inercia de un disco con respecto a un borde es:

$$I_{\text{c/r al borde}} = \frac{3}{2}\,M\,R^2.$$

Ejemplo

Calcular la aceleración de un cilindro que rueda sin resbalar sobre un plano inclinado. Este plano forma un ángulo θ con la horizontal. El valor del coeficiente de roce entre el cilindro y el plano es $\mu_{\text{estático}}$.

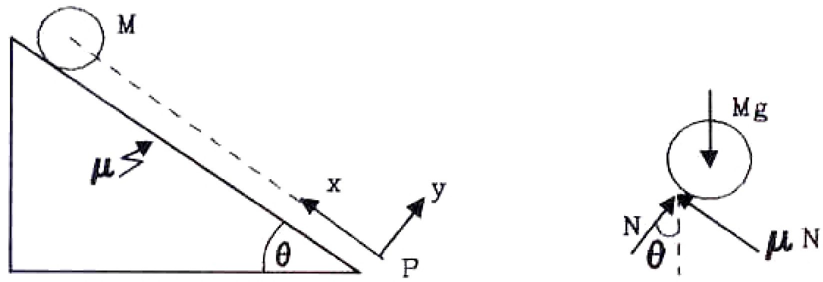


Figura XIII.10: Diagrama de cuerpo libre de un cilindro que cae por un plano inclinado con roce.

Lo primero que debemos hacer es elegir un sistema de referencia adecuado que facilite los cálculos. Una de las posibilidades es ubicarlo en el punto P de la Figura, de modo que la ecuación del torque sea simple. Esta no es la única alternativa, como ilustraremos al final de este ejemplo.

De acuerdo a la ley de composición del momento angular, tenemos:

$$L_P = L_{CM} + L_{c/r\,CM}.$$

L_{CM} es nulo: la velocidad del centro de masa es colineal con el vector que une este punto con P. De esta forma:

$$L_P = L_{c/r\,CM} = \frac{M\,R^2}{2}\,\omega,$$

donde ω es la velocidad angular del cilindro. A medida que se desplaza por el plano inclinado, su velocidad angular aumentará, de modo que $\omega = \omega(t)$.

Por otra parte, la expresión para el torque es:

$$\tau = \frac{d\,L_P}{dt} = \frac{d}{d\,t}\left\{\frac{M\,R^2}{2}\,\omega\right\}.$$

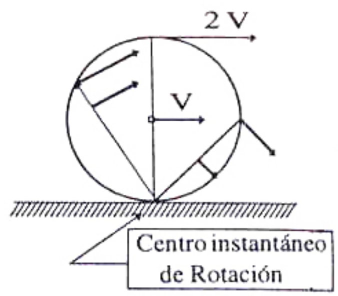
La única fuerza que genera un torque con respecto al punto P es el roce. La fuerza normal al plano $\vec{N}$, se cancela con la proyección del peso del cilindro: $M\,g\,\cos\,\theta$ (ver Figura).

Las ecuaciones de Newton y la del torque son entonces:

$$1)\qquad F_{\text{roce}} = I_{CM}\,\alpha \quad \left(\frac{d\,\omega}{d\,t} \equiv \alpha\right),$$

$$2)\qquad M\,g\,\text{sen}\,\theta - F_{\text{roce}} = M\,a_{CM}.$$

$$3)\qquad N - M\,g\,\cos\,\theta\; = 0.$$



La condición geométrica de *resbalar sin rodar* indica que *instantáneamente* el cilindro está rotando con respecto al punto de contacto entre el cilindro y el plano. La velocidad del centro del disco es: $R\,\omega = v_{CM}$. La velocidad relativa entre el punto del cilindro en contacto con el piso y el piso mismo es nula en ese instante (ver Figura). Las aceleraciones están relacionadas por:

$$R\,\alpha = a_{CM}.$$

Tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas: α, N, F_{roce} y a_{CM}. Despejando a_{CM}, obtenemos:

$$a_{CM} = \frac{2\,g\,\text{sen}\,\theta}{3} \qquad \alpha = \frac{2}{3}\,\frac{g}{R}\,\text{sen}\,\theta.$$

El valor de N se obtiene directamente de la ecuación 3), y

$$F_{\text{roce}} = -M\,g\,\frac{\text{sen}\,\theta}{3}.$$

Note que si el cilindro rueda sin resbalar, debe cumplirse que la fuerza de roce, sea menor o igual al valor máximo $F_{\text{máxima de roce}}$, que de acuerdo a la definición empírica dada es $F_{\text{máxima de roce}} = \mu_{\text{estática}}\,F_{\text{normal}}$.

De esta forma, para que el cilindro no resbale a medida que baja, debe cumplirse que:

$$F_{\text{roce}} = M\,g\,\frac{\text{sen}\,\theta}{3} \leq \mu_{\text{estática}}\,F_{\text{normal}} = \mu_{\text{estática}}\,M\,g\,\cos\,\theta.$$

De aquí obtenemos la condición para que el cilindro no resbale:

$$\frac{\tan\,\theta}{3} \leq \mu_{\text{estática}}.$$

Es decir, si incrementamos lentamente el ángulo θ, el cilindro comenzará a resbalar sobre el plano, cuando se cumpla que: $\tan\theta > 3\,\mu$. El factor $1/3$, depende de la geometría del cuerpo. $\square$

Ejercicio

Continuando con este ejemplo, elija ahora un sistema de referencia apoyado en el plano, es decir con el punto P, origen del sistema de coordenadas, descansando en el vértice inferior del plano inclinado. Demuestre que el momento angular con respecto al punto P es:

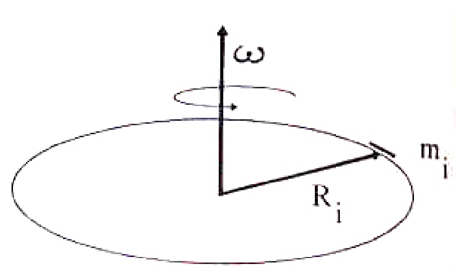
$$L_o = L_{\text{c/r CM}} + L_{\text{CM}} = \frac{3}{2}\,M\,R^2\,\omega.$$

Comente este resultado teniendo presente el valor del momento de inercia con respecto a un borde del disco, encontrado anteriormente. $\square$

XIII.3. ENERGIA CINETICA DE ROTACION

Calculemos la energía cinética, K, de un anillo rotando con respecto a un eje perpendicular a su plano, que pasa por el centro de masa. Este puede ser el modelo de una rueda de bicicleta, si despreciamos la masa de los rayos que unen el aro al eje central.

La velocidad tangencial de una partícula en el borde es, $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$, donde $\vec{R}$ es el vector que apunta a dicha partícula y $\vec{\omega}$, la velocidad angular del anillo.
Como $\vec{\omega}$, es perpendicular a $\vec{R}$, para cualquier punto del aro, entonces: $\vec{\omega} \wedge \vec{R} = (\omega\,R)\,\hat{t}$, donde $\hat{t}$, es un vector unitario tangente al anillo. La energía cinética de un elemento de arco es:



$$K_i = \frac{1}{2}\,m_i\,\vec{V}^2 = \frac{1}{2}\,m_i\,R_i^2\,\omega^2,$$

donde m_i es la masa de un elemento de arco del aro, y $V = R\,\omega$, su velocidad tangencial.

Sumando sobre todas las partículas del aro, obtenemos su energía cinética:

$$
\begin{aligned}
K &= \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{V}^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2, \\
K &= \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i R_i^2 \right] \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2.
\end{aligned} \tag{XIII.23}
$$

Este mismo método puede generalizarse al caso de un objeto bidimensional girando alrededor de un eje perpendicular a él, o a una figura que gira en torno a un eje que coincide con uno de sus ejes de simetría.

La expresión general para la energía cinética de un cuerpo, cuyo momento de inercia con respecto a un eje de simetría es I, en torno al cual se encuentra girando, es:

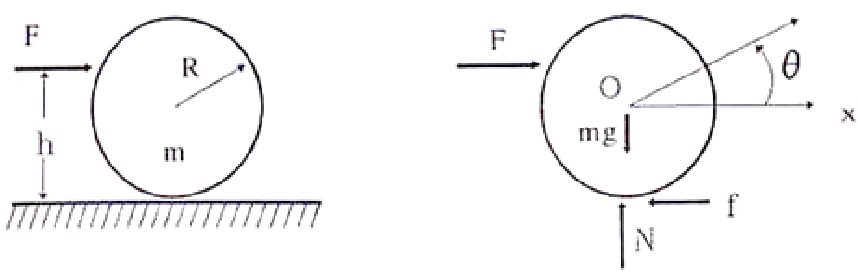
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{XIII.24}$$

Esta expresión también es válida para un objeto plano, cualquiera sea su forma.

Un ejemplo que se repite a menudo, es el de un cuerpo rodando sin resbalar sobre otro. En estos casos, la fuerza de roce no realiza trabajo, porque no hay desplazamiento relativo entre los dos puntos en contacto de los cuerpos. Por tanto, la energía se conserva.

Por ejemplo, si hacemos rodar un cilindro en un plano rugoso, de manera que no resbale sobre él, en teoría –dada una velocidad inicial– el cilindro permanece eternamente rodando. En la práctica sabemos que esto no sucede. La suposición que existe un único punto de contacto entre el cilindro y el piso no se cumple: en realidad, es una superficie debido a que el cilindro se deforma – muy poco–, pero suficiente para que la condición de rodar sin resbalar no se cumpla en forma estricta. Además, el piso no es perfectamente plano, de manera que en algunos instantes existe –independiente de la deformación ya mencionada– más de un punto en contacto simultáneo, lo que genera un torque que contribuye a disipar la energía inicial con estos choques microscópicos.

Otra característica de esta forma de desplazamiento, es el rango de valores que puede alcanzar la fuerza de roce. Por ejemplo, un cilindro que rueda sin resbalar sobre un plano horizontal, tiene una fuerza de roce que se opone a su movimiento y cuyo *máximo valor* es igual a $F = \mu_{\text{estático}} N$, donde N es la fuerza normal al plano. Debemos recordar que esta fuerza no está determinada por esta ecuación, sino que varía desde cero hasta su valor máximo, ya indicado. Esta fuerza responde de acuerdo a las características del piso. Si es perfectamente plano y horizontal, el valor que toma la fuerza de roce es igual a cero, puesto que el cilindro no desacelera. Pero en caso que surga una leve pendiente, al ser remontada por el cilindro, su peso deja de ser normal al piso, adquiriendo una componente paralela a él, y simultáneamente, aparece una fuerza en sentido opuesto generada por el roce. Esta última no es, necesariamente, igual a la proyección tangencial del peso.



Ejemplo

Un cilindro de radio R y masa m, está empujado por una fuerza F, que actúa a una distancia h del piso, como se indica en la Figura. El coeficiente de fricción cinética entre el cilindro y el piso es μ. Encuentre el valor de la fuerza de roce f y la aceleración lineal del cilindro.

Usamos las ecuaciones de Newton –incluyendo el torque– para resolver este problema. Sea x, el eje horizontal que se ubica a la altura del centro de masa del cilindro, y θ el ángulo que describe el cilindro al rodar. Las ecuaciones de Newton son:

$$m\,a = F - f.$$

Tomando torque con respecto al centro de masa y suponiendo que el momento de inercia del cilindro con respecto a este eje es I, tenemos:

$$I\,\alpha = -F\,(h - R) - f\,R.$$

Note que ambas fuerzas: F y f, generan un torque en el mismo sentido.

Si el valor de F permite que el cilindro ruede sin resbalar, entonces se cumple: $R\,\alpha = a$. Con esta última igualdad, tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas: α, a y f. Resolviendo las ecuaciones se obtiene:

$$a = \frac{F\,h\,R}{I + m\,R^2} = R\,\alpha, \quad f = F\left[1 - \frac{m\,h\,R}{I + m\,R^2}\right].$$

Resulta interesante analizar los distintos valores que debe tomar f cuando cambiamos el punto de aplicación de la fuerza F. Esto ilustra lo que comentamos en el párrafo anterior: f no es constante, sino que varía dentro de ciertos límites.

Si $h = 0$, entonces estamos aplicando la fuerza en el punto de contacto, así: $f = F$, y el cilindro sólo se moverá si $F > f$. Si $h = R$, $f = F/3$, si incluimos el valor del momento de inercia del cilindro, $I = m\,R^2/2$. Podemos calcular en qué punto debemos aplicar F, de modo que no exista fuerza de roce, $f = 0$: $h = 3\,R/2$.

Si el valor de f es mayor que $\mu_{\text{estático}}\,m\,g$, entonces el cilindro resbala y la fuerza de roce es: $f = \mu_{\text{cinético}}\,m\,g$. Este valor modifica la aceleración del cilindro:

$$a = \frac{F - \mu\,m\,g}{m}, \quad \alpha = \frac{F(h - R) + \mu\,m\,g\,R}{I}.$$

Ejemplo

Un disco con momento de inercia I_1 gira sobre un piso sin roce, con velocidad angular ω, alrededor de un eje vertical sin fricción. Un segundo disco de momento de inercia I_2, que inicialmente no rota, cae sobre el primero (ver Figura). Como existe roce entre las superficies, pasados unos segundos ambos discos giran con la misma velocidad angular Ω.

a) Calcule el valor de Ω.

b) Calcule la razón entre la energía cinética de rotación inicial y la final, cuando ambos discos giran unidos.

c) Suponga que la fuerza de roce entre ambos discos genera un torque $\tau_o =$ constante: calcule cuánto tardaron los discos en alcanzar la velocidad angular común, Ω.

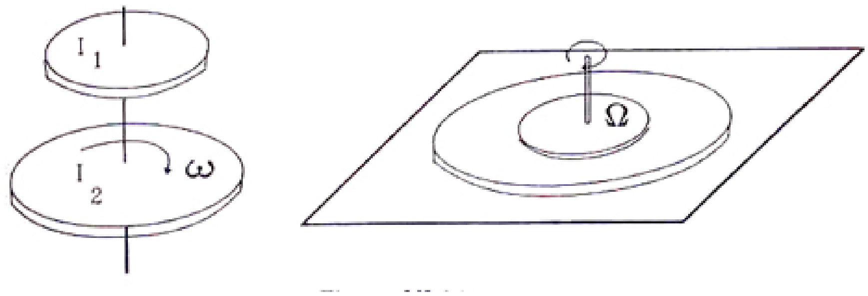


Figura XIII.11:

a) Como no hay torques externos sobre los discos, el momento angular se conserva: $L_i = L_f$. El momento angular inicial corresponde exclusivamente al disco I_2, puesto que es el único que se encuentra girando al comienzo:

$$L_i = L_f \implies I_2\,\omega = [I_1 + I_2]\,\Omega,$$

el momento angular final es la suma de ambos momentos de inercia. De esta ecuación, podemos encontrar el valor de Ω:

$$\Omega = \frac{I_2}{I_1 + I_2}\,\omega.$$

b) La energía cinética de rotación inicial es: $I_2\,\omega^2/2$ y la final es: $I_2^2\,\omega^2/[2\,(I_1 + I_2)]$. La razón entre ambas es:

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} = 1 - \frac{I_1}{I_1 + I_2},$$

la energía cinética inicial que desapareció, fue disipada en forma de calor durante el lapso de tiempo en que los discos alcanzaron una misma velocidad angular.

Note que si $I_1 >> I_2$, prácticamente toda la energía se disipa, independiente del valor inicial.

c) Sobre el disco I_2 se ejerce un torque τ_o que lo tiende a frenar. Puesto que no hay ningún torque externo, por acción y reacción, el mismo τ_o actúa sobre I_1, pero en sentido opuesto. La aceleración angular sobre cada uno de los discos es:

$$\alpha_1 = \frac{\tau_o}{I_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\tau_o}{I_2}.$$

La velocidad angular obedece la ecuación: $\omega_f = \omega_i \pm \alpha\,t$, como ambos discos deben alcanzar –simultáneamente– la misma velocidad, se tiene:

$$\Omega = \omega - \alpha_2 \, T = 0 + \alpha_1 \, T, \implies T = \frac{\omega}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{I_1 \, I_2 \, \omega}{\tau_o \, [I_1 + I_2]}. \; \Box$$

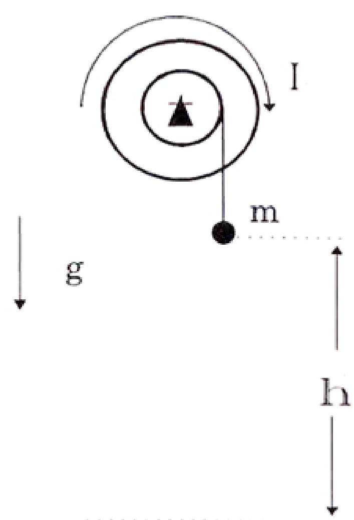
Ejemplo

Un disco de masa M y radio R, está montado en un eje horizontal sin roce cuyo radio es r. Sobre este eje se enrolla un hilo cuyo extremo libre tiene atada una masa m. El conjunto se deja libre, partiendo del reposo (ver Figura). Si después de caer una altura h, el hilo se desprende del cilindro: ¿qué torque debemos aplicar al disco para detenerlo en cinco revoluciones?

Podemos resolver este problema usando el método tradicional de torque y fuerzas, pero es mucho más directo resolverlo utilizando el método de la energía.
Inicialmente sólo existe energía potencial, correspondiente a la masa m que está suspendida a una altura h: $E_i = m \, g \, h$. Esta expresión indica que el sistema de coordenadas usado tiene como origen el punto donde la masa m pierde contacto con el cilindro.
La energía total en el instante en que la masa m se desprende, es:

$$E_f = \frac{1}{2} \, m \, v^2 + \frac{1}{2} \, I \, \omega^2,$$

donde I, es el momento de inercia del sistema disco–eje, y ω es su velocidad angular. La relación entre v y ω es: $v = \omega \, r$.



Igualando estas dos últimas expresiones obtengo el valor de la velocidad angular del disco, ω:

$$\omega^2 = \frac{2 \, m \, g \, h}{m \, r^2 + I}.$$

Si aplicamos un torque constante τ, la desaceleración del sistema será $\alpha = \tau / I =$ constante. Recordando que la velocidad angular final es nula, entonces: $\omega_i = \alpha \, T$, con T, el tiempo que tarda en detenerse el sistema. La expresión para θ, el ángulo recorrido antes de detenerse, es:

$$\theta = \omega_i \, T - \frac{1}{2}\,\alpha\, T^2 = \frac{\omega_i^2}{\alpha} - \frac{\alpha\,\omega_i^2}{2\,\alpha^2} = \frac{\omega_i^2}{2\,\alpha} = \frac{2\,m\,g\,h\,I}{[m\,r^2 + I]\,\tau}. \square$$

Existe una forma más directa de obtener este resultado, que explicaremos a continuación.

La ecuación del trabajo y la energía

Análogamente a la forma cómo calculamos la pérdida de energía debida al roce para el movimiento de traslación, lo hacemos para la rotación.

El trabajo se definió como $\Delta\, W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$, con $\Delta\vec{x}$, el desplazamiento del objeto donde actuaba la fuerza F. En el caso de la rotación se verifica que: $\Delta\, W = \tau\Delta\theta$. Se elimina el producto punto que aparece en su similar, porque est!mos estudiando rotaciones con respecto a u. eje fijo en el espacio, de esta forma la dirección del torque siempre coincide con el vector que identifica al ángulo de rotación.

El formalismo para una rotación finita es:

$$\sum_{i=1}^{N} \tau\, \Delta\theta = \sum_{i=1}^{N} I\, \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Delta\theta = \sum_{i=1}^{N} I\, \Delta\omega \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} I\, \Delta\omega\, \omega = \frac{1}{2}\, I\, \left[\omega_f^2 - \omega_i^2\right],$$

donde usamos procedimientos similares a los utilizados al introducir el concepto de energía. El resultado final es:

$$\sum_{i=1}^{N} \tau\, \Delta\theta = \frac{1}{2}\, I\, \left[\omega_f^2 - \omega_i^2\right]. \tag{XIII.25}$$

Podemos aprovechar la semejanza de estos cálculos con sus equivalentes, desarrollados anteriormente y definir la potencia. En el caso de la traslación, su definición es:
$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Para la rotación:

$$\text{Potencia} \equiv P = \tau\, \omega. \tag{XIII.26}$$

Ejemplo

Un cilindro de masa M, radio R y momento de inercia I con respecto a su eje de simetría, rueda sin resbalar desde lo alto de una colina. Si la velocidad del centro de masa

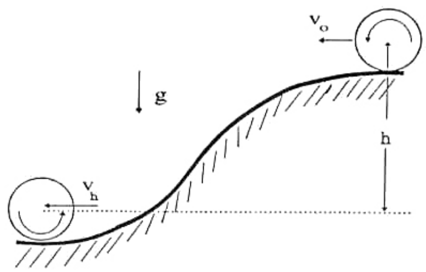


Figura XIII.12:

del cilindro era V_o, encontrar la velocidad del cilindro después que ha descendido una altura h.

Como no hay pérdida de energía, podemos usar su ley de conservación, incluyendo la energía de rotación:

$$E_i = E_f \implies \frac{1}{2} m\, V_o^2 + \frac{1}{2} I \left[\frac{V_o}{R}\right]^2 + m\, g\, h = \frac{1}{2} m\, V_h^2 + \frac{1}{2} I \left[\frac{V_h}{R}\right]^2 .$$

En el primer término, no hay que olvidar la energía de rotación del disco. V_h, es la velocidad del disco en el punto inferior. Despejando V_h, obtenemos:

$$V_h^2 = V_o^2 + \frac{2\, m\, g\, h}{m + I/R^2} . \square$$

XIII.4. ROTACION EN TORNO A UN PUNTO

Los ejemplos y ejercicios desarrollados en este capítulo corresponden a cuerpos planos girando en torno a un eje perpendicular a este plano o, a un cuerpo en tres dimensiones, si y sólo si, el eje escogido coincide con uno de sus ejes de simetría.

Para un cuerpo en tres dimensiones cuya rotación no se realiza de acuerdo a las especificaciones anteriores, las ecuaciones:

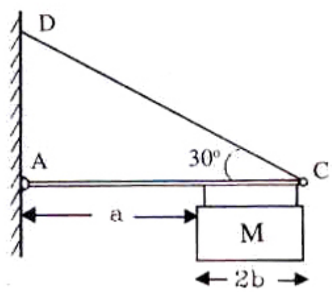
$$\vec{L} = I\, \omega, \qquad \frac{d\vec{L}}{d\, t} = I\, \alpha,$$

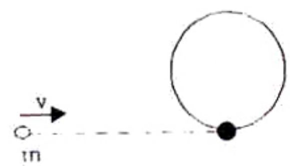
no son válidas. El momento de inercia en este caso es una matriz y no un número como nosotros lo hemos introducido aquí .

Estos casos son tratados en textos más avanzados.

XIII.5. EJERCICIOS

1. – Un aro de madera circular delgado de masa m, radio R, se encuentra en un plano horizontal sin roce, en reposo. Una bola, también de masa **m**, se mueve con velocidad horizontal **v**, choca al aro y se incrusta en él como lo indica la Figura. Calcular la velocidad del centro de masa, el momento angular del sistema con respecto al **CM**, la velocidad angular ω del aro y la energía cinética del sistema, antes y después de la colisión.



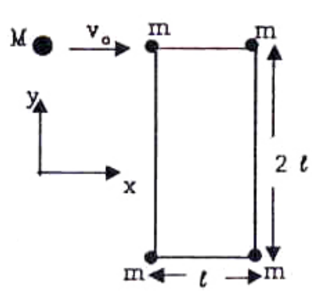


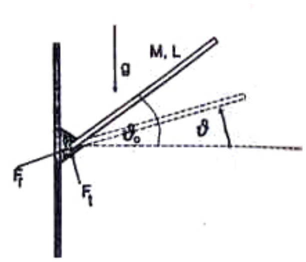
2. – Los cuatro puntos de la Figura, cuyas masas son iguales a m, se ubican en los vértices de un rectángulo de lados ℓ y $2\,\ell$, que descansa sobre una superficie horizontal sin roce. Los puntos están conectados por barras rígidas de masa despreciable. Otra masa puntual, M, se acerca en la dirección del eje x con una velocidad V_o, choca con la masa ubicada en ese vértice y permanece adherida a ella después del choque.

   a) Encuentre la posición del centro de masa del rectángulo. No considere, en esta pregunta, la masa que colisiona.

   b) Calcule el valor de la velocidad del centro de masa del sistema total, incluyendo todas las partículas.

   c) Describa el movimiento del sistema después del choque.



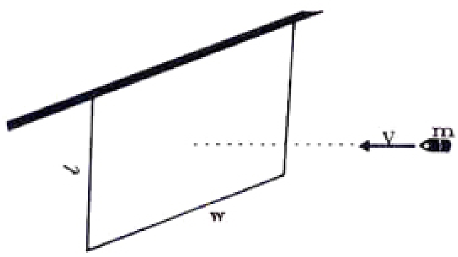


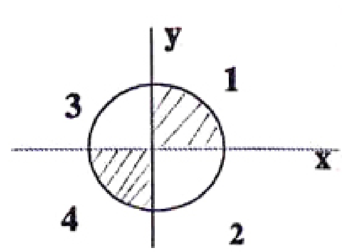
3. – Una barra de largo L y masa M, puede girar libremente en torno a una bisagra empotrada en la pared (ver Figura). La barra está inicialmente en reposo y forma un ángulo θ_o con la pared. En $t = 0$, la barra se suelta. Calcule la componente perpendicular a la barra de la fuerza que ejerce la bisagra sobre la barra, cuando el ángulo entre la barra y la vertical es θ. El momento de inercia de la barra con respecto al centro de masa es $I = M\,L^2/12$.

4. – Un panel rígido delgado de masa M, ancho w y longitud l, está suspendido verticalmente desde un eje horizontal, sin roce, en su lado superior. Una bala de masa m, con velocidad V perpendicular al panel, se aloja en su centro.

   a) ¿Cuál es la velocidad de la bala justo después del impacto?

   b) ¿Cuál es el valor del ángulo de giro, θ, que experimenta el panel?



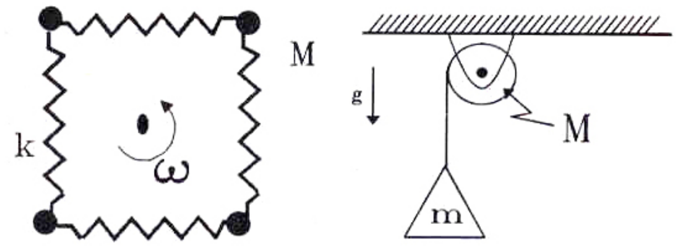


5. – Un hombre se encuentra de pie en el *centro* de una plataforma giratoria con sus brazos extendidos horizontalmente y con una masa de 5 kg en cada mano. Se le pone en rotación alrededor de un eje vertical, con una velocidad angular de una vuelta cada dos segundos. Calcular su nueva velocidad angular si deja caer sus manos a ambos lados del cuerpo. El momento de inercia del hombre puede suponerse constante e igual a $5,9$ kg m^2. La distancia primitiva de los pesos al eje es de 90 cm y su distancia final 15 cm.

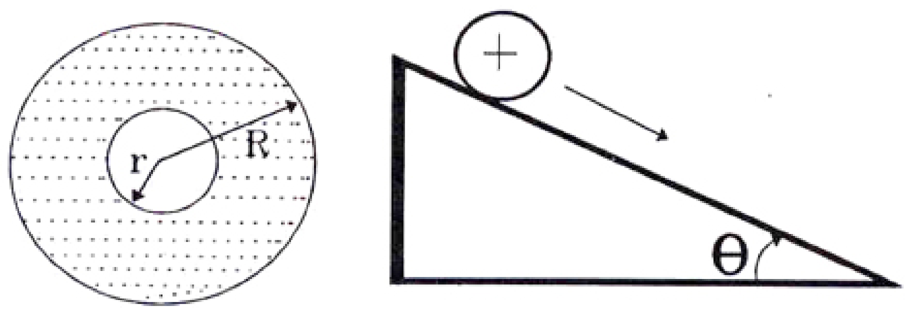
6. – Un cilindro sólido tiene una densidad que varía por cuadrantes, como se indica en la Figura. Los números que allí aparecen reflejan los valores relativos de las densidades en los cuadrantes. Encuentre la ecuación de la recta que cruza el origen y el CM simultáneamente. Tome como referencia el eje x e y, de la Figura.

7. – Cuatro masas M, ubicadas en un mismo plano y sometidas únicamente a la fuerza externa provocada por los resortes de constante K, largo natural L y masa despreciable. Los resortes están girando con velocidad angular W en torno a un eje perpendicular al plano a través de su centro de simetría. Suponiendo que el sistema se mantiene en equilibrio. ¿Cuánto se extienden los resortes?

8. – Una masa m está colgada de una cuerda alrededor de un cilindro sólido circular de masa M y radio R, pivoteado sin roce como se muestra en la Figura. Encontrar la aceleración de m.



9. – Un cascarón esférico de radio externo R, y radio interno r, tiene una masa por unidad de volumen, ρ, constante. Exprese el momento de inercia I de este cascarón, con respecto a un eje que pasa a través del centro, en términos de r, ρ, R y la masa total M.



10. – Una esfera uniforme y sólida, se ubica en reposo sobre un plano inclinado en un ángulo θ. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de roce estático, μ_0, entre la esfera y el plano inclinado, para que ruede sin resbalar?

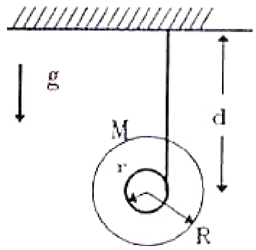
11. – Un yo-yo está formado por dos discos uniformes cada uno de masa M y radio R. Uniendo estos discos hay un eje de radio r y masa despreciable.
Un hilo se enrolla en torno a este eje y su extremo se sostiene desde una cierta altura. En un instante, el yo–yo se deja caer, partiendo del reposo. Inicialmente se encuentra a una distancia D, del extremo superior del hilo.

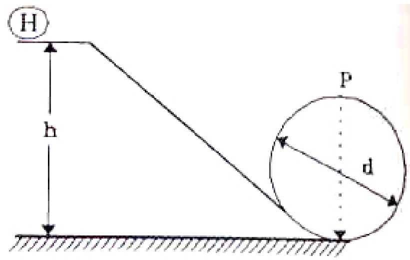
a) Si no hay movimiento pendular, ¿qué ángulo forma el hilo con la vertical cuando se suelta el yo–yo?

b) ¿Cuál es la aceleración del centro del carrete?

12. – El aro H de radio r rueda sin resbalar por el plano inclinado. La altura de partida h, es tal que el aro adquiere una velocidad suficiente para mantenerse en contacto con el riel circular hasta el punto P.

¿Cuál es el valor de la altura h?





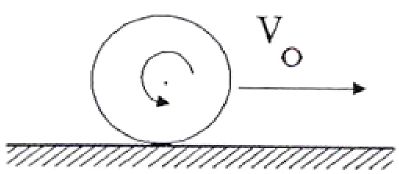
13. – Al presionar una bolita sobre una mesa horizontal, sale proyectada a lo largo de la mesa con velocidad inicial v_0, y velocidad angular w_0, siendo el eje de rotación horizontal y perpendicular a v_0. La bolita tiene radio R, y su coeficiente de fricción con la mesa es constante.

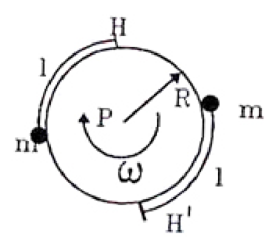
    a) ¿Qué relaciones deben existir entre v_0, R y w_0 para que la bolita se detenga?

    b) Relacione $v_0,\ R$ y w_0 para que la bolita resbale, se detenga y vuelva a su posición inicial con velocidad $V = \frac{3}{7}\,v_0$

14. – Un disco circular uniforme de radio R y masa M, puede girar libremente con velocidad angular ω, en un plano horizontal alrededor de P. Fijas al borde del disco se mantienen dos masas m, unidas –cada una– por una cuerda de largo ℓ.
    En cierto instante, se rompe la traba que las mantenía fijas, sin afectar – en este proceso– el momento angular del sistema. Las masas se extienden y las cuerdas que las sostienen son liberadas de sus ganchos H y H', cuando éstas alcanzan a extenderse radialmente hacia afuera.
    Encontrar ℓ, la longitud de estas cuerdas, tal que el disco sea detenido por esta acción.

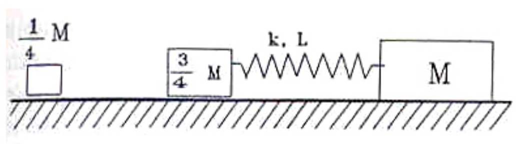
    Nota: Este esquema ha sido usado para reducir el movimiento de giro de algunos satélites.

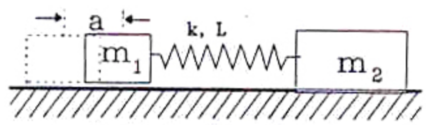




15. – Dos cilindros indistinguibles entre sí ruedan sin deslizar sobre un plano inclinado. Uno de ellos llega al extremo del plano *antes* que el otro. Si ambos tienen la misma masa y radio externo, ¿qué conclusión puede sacar Ud. acerca de la estructura de estos cilindros?

16. – Dos partículas cuyas masas son $\frac{3}{4}M$ y M respectivamente, están conectadas por un resorte de masa despreciable, largo natural L y constante k. Estas partículas se encuentran inicialmente en reposo, a una distancia L sobre una mesa horizontal sin roce. Un objeto cuya masa es $M/4$, se mueve con rapidez v a lo largo de la línea que define el resorte, choca y se adhiere a la partícula de $3M/4$. Encontrar la amplitud y el período con el cual vibra el sistema después del choque.





17. – El sistema de la Figura, consiste de dos masas que se mantienen separadas una distancia $a + \ell$, donde ℓ, es el largo natural del resorte que las une. No existe roce entre las masas y el piso. Repentinamente son abandonadas desde el reposo.

a) Encontrar los períodos de oscilación de m_1 y m_2.

b) Comparar el período con el de un oscilador de masa simple.

c) Encuentre la energía de oscilación del sistema.

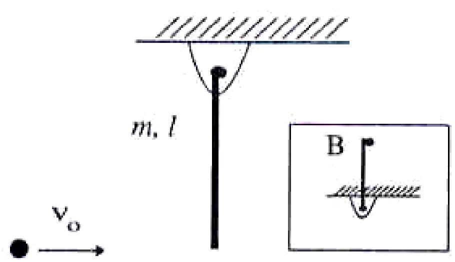
d) ¿Cómo se reparte esta energía entre m_1 y m_2 ?

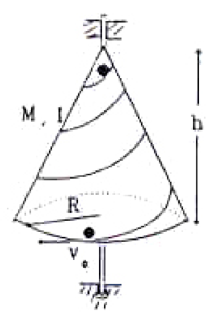
18. – Una barra de largo ℓ y masa m, cuelga verticalmente de un soporte, sin roce, que le permite girar completamente en torno a él.

Por la izquierda se aproxima una masa m que impacta horizontalmente en el extremo de la barra, con velocidad V_o. Inmediatamente después del impacto la masa queda pegada a la barra y comienza a moverse con ella.

a) Calcule la velocidad angular del conjunto barra–masa inmediatamente después del impacto.

b) ¿Qué valor debe tomar V_o para que el sistema barra–masa pueda alcanzar la posición vertical superior con una velocidad angular nula?

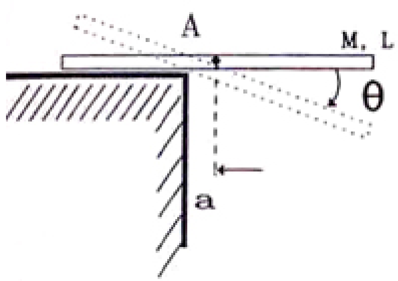


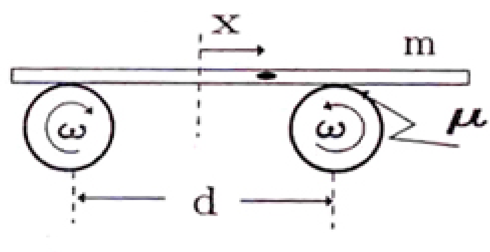


19. – Un cono de masa M, radio basal R, altura h puede girar libremente y sin roce alrededor de su eje de simetría. El momento de inercia con respecto a este eje es I.

Una partícula puntual de masa m, parte del reposo desde su vértice y se desliza por un tubo *sin fricción*, que envuelve el manto del cono y emerge *horizontalmente*, en forma tangente al círculo de su base. Inicialmente el *cono y la partícula se encuentran en reposo*. Encontrar la velocidad angular del cono ω y la velocidad V_o de la partícula con respecto al piso, justo después que ésta sale por la base.

Recuerde que la velocidad V_o es paralela al piso en el momento de la salida.





20. – Una barra recta, uniforme y homogénea de masa M, y longitud L, se encuentra perpendicular al borde de una mesa. Su centro de masa se ubica fuera de la mesa, a una distancia a, como se muestra en la Figura. La barra se suelta desde el reposo en una posición horizontal y *comienza a girar teniendo como centro, el borde de la mesa*. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra y la mesa es μ, encontrar el valor del ángulo θ que forma la barra con la horizontal en el instante que ésta *comienza* a deslizar por el borde.

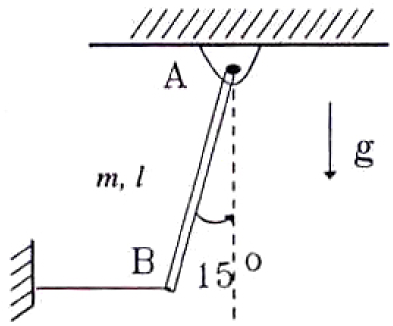
Nota: para encontrar el ángulo θ opere de la siguiente manera:

a) Suponga que la barra comienza a deslizar cuando el ángulo alcanza un valor igual a θ. Escriba la conservación de la energía para dos instantes: cuando la barra adopta el ángulo θ y al comenzar a caer. (Esto genera una ecuación).

b) En la posición de la Figura, escriba las ecuaciones de Newton y el torque con respecto al punto A, para el centro de masa de la barra, esto nos suma tres ecuaciones adicionales.
No olvide incluir la aceleración angular *tangencial y centrípeta* en las ecuaciones de Newton. Recuerde que la aceleración angular α y la aceleración del centro de masa están relacionadas (una ecuación adicional).

c) De estas 5 ecuaciones puede despejar θ. Encuentre que el ángulo θ es:

$$\tan\,\theta = \frac{\mu\,\ell^2}{\ell^2 + 36\,a^2}.$$



21. – La Figura muestra un tablón uniforme de masa m deslizándose horizontalmente sobre dos rodillos que giran en sentidos opuestos y con velocidad angular constante ω. La distancia entre ejes es d y el coeficiente de roce cinético es μ.

a) En la posición de la Figura, con su centro de masa desplazado una distancia x, calcule las reacciones del cilindro sobre el tablón. El origen de la coordenada x es el punto medio de la distancia entre ejes.

b) Demuestre que el tablón describe un movimiento armónico simple. Determine el valor de ω.

c) Si en el instante que el centro de masa del tablón pasa por $x = 0$ tiene una velocidad V_0, encuentre el valor de la amplitud de esta oscilación.

22. – Una barra uniforme de masa m y largo ℓ, puede girar libremente en torno al extremo A. Inicialmente la barra está en equilibrio sostenida por una cuerda unida a su otro extremo B, formando un ángulo $\theta = 15^o$ con la vertical.

a) Calcule la tensión de la cuerda horizontal que sostiene la barra.

b) Si en $t = 0$ se corta la cuerda, calcule el tiempo que demora la barra en retornar por primera vez a su posición inicial. Suponga que el movimiento es armónico simple.

c) Calcule la velocidad del extremo B en cualquier instante t.