INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 2 de noviembre de 2014

Capítulo XI

CENTRO DE MASA

XI.1. CENTRO DE MASA

XI.1.1. Introducción

Las leyes de Newton tratan todos los cuerpos, independiente de su tamaño y forma, como objetos puntuales. Todas las fuerzas se concentran en un punto y es su movimiento el que estudiamos con dichas ecuaciones.

En esta sección, analizaremos en detalle el movimiento de un cuerpo rígido plano. Podemos adelantar nuestra conclusión: al aplicar las leyes de Newton a un cuerpo rígido extendido, existe un punto que lo representa y en el cual podemos aplicar todas las fuerzas que actúan sobre él. Este punto se denomina *centro de masa* y es puramente un lugar *geométrico*: no necesariamente coincide con un punto material del cuerpo.

En lo que sigue mostraremos que el método empleado hasta ahora para resolver un problema mediante las leyes de Newton, se refiere exclusivamente al estudio del movimiento de un punto particular: el centro de masa.

En este capítulo demostraremos que el centro de masa (CM) de un cuerpo homogéneo coincide con el punto de simetría geométrica de este objeto.

Acá estudiaremos el movimiento de un cuerpo extenso pero plano, como un triángulo, un disco, un cuadrado o una barra. El movimiento más general de un cuerpo plano rígido (no sufre deformaciones) es una superposición de una rotación del cuerpo rígido en torno a un punto fijo y un desplazamiento neto.

Para poder estudiar este movimiento debemos recurrir al torque, que definiremos en el

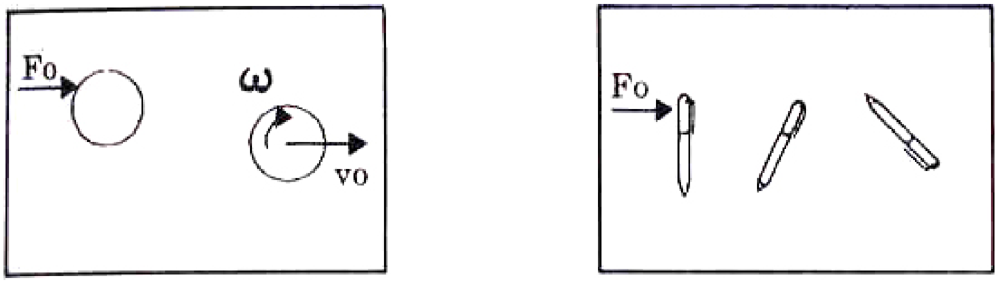


Figura XI.1: Al aplicar una fuerza en una dirección que no atraviesa el centro de masa de un cuerpo, se produce un efecto de traslación y otro de rotación.

capítulo siguiente y no nos detendremos en su definición en este capítulo.

Al introducir el torque, automáticamente se incorporan las dimensiones de los cuerpos estudiados. La experiencia indica que al aplicar *un par de fuerzas*, es decir, dos fuerzas de igual magnitud actuando en puntos diferentes a lo largo de dos rectas paralelas y con sentidos opuestos. En este caso, de acuerdo a las leyes de Newton, la suma de las fuerzas (la fuerza neta) es nula y el centro de masa no se desplaza, pero el cuerpo rígido comienza a rotar en torno de sí mismo.

Dos ejemplos de lo indicado acá se ilustran en la figura [**??**].

En la siguiente sección demostraremos que el centro de masa (CM) de un cuerpo homogéneo coincide con el punto de simetría de este objeto.

Por ejemplo, en el caso de una pelota de fútbol, el centro de masa se ubica en el origen de la esfera. Si al golpearla se le aplica una (y sólo una) fuerza en una dirección cuya línea de acción *no* pasa por el (CM), la pelota se desplaza (porque hay una fuerza neta aplicada durante un cierto intervalo de tiempo) pero también *rota* en torno al CM debido a que la fuerza externa genera un torque con respeto al CM.

Para completar este ejemplo, nos referimos a un fenómeno más complejo y que simplemente nos limitamos a describir por el interés que genera. Si la pelota sale disparada con mucha rapidez y rotando con respecto a su centro, el *roce* con el aire genera una diferencia de presión en caras opuestas de la pelota. Esta diferencia de presión equivale a una fuerza actuando en la dirección perpendicular al plano de movimiento de la pelota, que la desvía de la parábola plana, que era su trayectoria esperada. le da una trayectoria combada. Esto es lo que los jugadores llaman *darle con efecto*.

Otro ejemplo, que se ilustra en la Figura [**??**] en el cual se puede apreciar la existencia de este punto ideal –el centro de masa– es el siguiente: sobre una mesa sin roce descansa un lapicero. Al golpearlo en distintos puntos, notamos que en algunos de ellos el lapicero *rota* notablemente menos que en otros. De hecho podemos verificar que al golpearlo en un cierto punto, sólo sufre un desplazamiento y no aparece rotación. Esto nos indica que la línea de acción de la fuerza aplicada pasó justo por sobre el *centro de masa*, puesto que el lapicero se comportó exactamente como un objeto puntual.

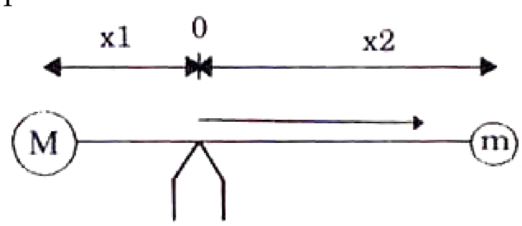
En resumen: Las fuerzas actuando sobre un cuerpo extendido, se aplican concentrando las fuerzas en un punto: el centro de masa. Las leyes de Newton se aplican al centro de masa.
Si el torque neto con respecto a un punto no es nulo, el cuerpo comenzará a rotar. Si la dirección de las fuerzas aplicadas atraviesa el centro de masa, el cuerpo sólo experimenta un desplazamiento.

XI.2. Localización del Centro de Masa

Consideremos el problema de dos masas **M** y **m** por una barra de largo **L**, que se equilibraban sobre un pivote sin roce. De acuerdo a lo establecido en el párrafo anterior el pivote debemos ponerlo justo en el centro de masa del sistema. usando la definición de torque, resolveremos este problema en el capítulo siguiente. Por ahora, de acuerdo a la sugerencia anterior, para equilibrarlas debemos ubicar el pivote a una distancia $\mathbf{x}_1$ de la masa **M**.
Incluyendo los signos, la solución de este problema es

$$-M{\cdot}x_1 = m{\cdot}x_2, \qquad x_1 = -\frac{m}{M+m}\,L$$

$$-x_1 + x_2 = L, \qquad x_2 = \frac{M}{M+m}\,L$$



Con este argumento localizamos la fuerza de reacción del soporte. Su módulo se obtiene ubicando todas las fuerzas en el punto de apoyo e imponiendo $\sum \vec{F} = 0$.

Podemos, además, repetir el experimento descrito para el lapicero ubicado sobre una mesa sin roce, ilustrado en la Figura anterior, utilizando ahora a la barra con las dos masas en su lugar. Con los argumentos desarrollados, sabemos que si le damos un golpe justo en el centro de masa –definido por x_1 ó x_2–, la barra no rotará y sólo saldrá disparada moviéndose paralelamente a sí misma. Si la golpeamos en cualquier otro punto, la barra experimentará simultáneamente una rotación y un desplazamiento.

Restringiéndonos a una dimensión, el centro de masa (CM) para un sistema de partículas, está definido como:

$$x_{CM} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{XI.1}$$

esto es, el CM es el valor medio de la coordenada de cada una de las partículas usando como factor de peso sus respectivas masas.

En el ejemplo anterior de la barra, la fórmula del centro de masa da la siguiente ubicación para el CM:

$$x_{\text{CM}} = \frac{-M\,x_1 + m\,x_2}{M+m} = 0.$$

Debido a que el numerador de esta ecuación es nulo, el CM coincide con el origen de coordenadas.

Una expresión análoga a la del centro de masa se usó en la definición de la *velocidad media* en Cinemática. En ese caso, el factor de peso con respecto al cual se promedió fue el tiempo durante el cual ocurrió cada velocidad. En el caso del CM el factor de peso de la coordenada x_i es la masa asociada con ella.

Así, encontrar el centro de masa de un sistema de partículas puntuales se reduce a ubicar la *distribución espacial media* de las masas que componen un objeto.

Si consideramos un objeto en dos dimensiones, el Centro de Masa, siendo un punto matemático, debe estar representado por dos coordenadas $(x,\, y)$. La coordenada y_{CM} se define en forma idéntica a la coordenada x_{CM} :

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}. \tag{XI.2}$$

La importancia de esta definición queda corroborada por la experiencia. Si calculamos la ubicación del Centro de Masa de un objeto, usando esta fórmula y luego, por ejemplo, se sostiene el cuerpo desde dicho punto, se observará que el cuerpo *no rota*. También, si se le da un impulso, exactamente en dicho punto, se verificará que el cuerpo no experimenta rotación, sólo desplazamiento.

Un modelo muy simple de un cuerpo sólido, consiste de un gran número de partículas puntuales de masa m unidas cada una a su vecina mediante un resorte de constante k. (Este modelo, por ingenuo que parezca, reproduce varias propiedades importantes de un sólido, entre ellas su capacidad calórica.)

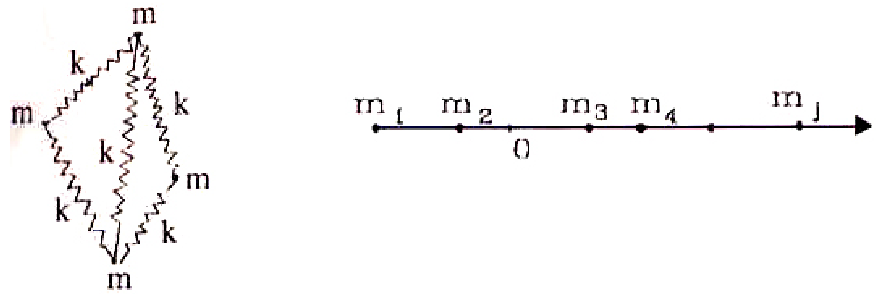


Figura XI.2: Modelo de un sólido unidimensional: masas unidas con resortes (derecha). Un enrejado de resortes, en tres dimensiones, fue utilizado como un modelo de un sólido para para estudiar las propiedades elásticas de un sólido.

Volviendo al caso más simple, aquel de un modelo en una dimensión, el centro de masa –como ya vimos–, se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{M}$$

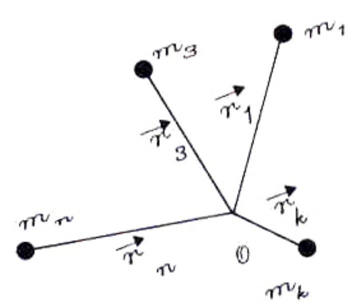
donde $M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i$: Masa total del sistema.

Lo que hemos hecho es *pesar* la posición de cada objeto con su respectiva masa. Vale decir que si una partícula tiene una masa muchísimo mayor que el resto tendrá el centro de masa muy cerca de ella, puesto que en la ecuación anterior la posición de dicha partícula será la de más peso dentro de la suma.

Otro caso donde se emplea un procedimiento similar es en el cálculo del promedio de notas cuando existen pruebas con coeficiente dos. Como su nombre lo indica, estas pruebas *pesan* el doble, comparadas con el resto, en el resultado final.

Generalizando esta expresión al caso de dos dimensiones y escribiéndola en forma vectorial:

$$\vec{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{(XI.3)}$$



o en sus componentes:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Ejemplo

Encontrar el centro de masa de una varilla homogénea de largo ℓ y masa m.

De acuerdo a la afirmación que el centro de masa de un cuerpo homogéneo se encuentra en su centro de simetría, concluimos que el centro de masa de una varilla de espesor despreciable se encuentra justo en su punto medio.

Podemos llegar a este resultado calculándolo directamente o empleando un truco, como explicamos a continuación.

Tomemos el origen de coordenadas en el centro mismo de la barra, procedamos a dividirla en pequeños elementos finitos y sumar las coordenadas de cada uno de ellos en forma *simétrica* con respecto al origen. Debido al cambio de signo de la coordenada x_i al tomar el elemento de barra simétrico en la región $x < 0$, la suma se cancela de a pares: $m_i \cdot x_i + m_j \cdot x_j = 0$ porque $m_i = m_j$, (barra homogénea), y $x_j = -x_i$, al tomar el elemento simétrico con respecto al origen.

Este argumento indica que la coordenada del centro de masa es: $x_{CM} = 0$.

Nota

Al calcular $(\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot x_i)$ debemos considerar siempre las simetrías para acortar el álgebra. De hecho, *si* el cuerpo es *homogéneo* (es decir: tiene las mismas propiedades en todos sus puntos), el centro de masa se ubica en el centro geométrico de la Figura, el punto que contiene mayor número de simetrías.

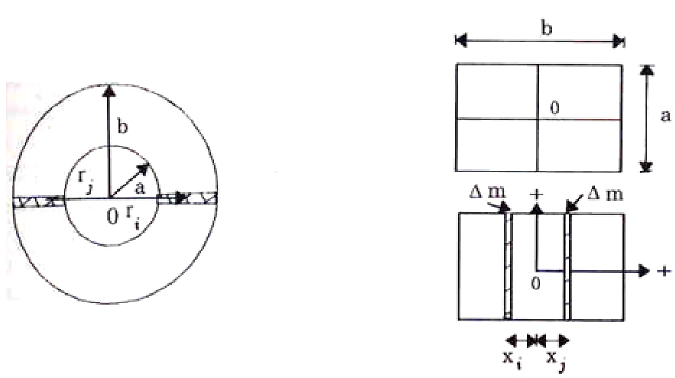


Figura XI.3: Usando las simetrías de cada uno de los dos cuerpos continuos que se incluyen, se puede obtener la posición del centro de masa de ellos, directamente sin tener que calcular explícitamente.

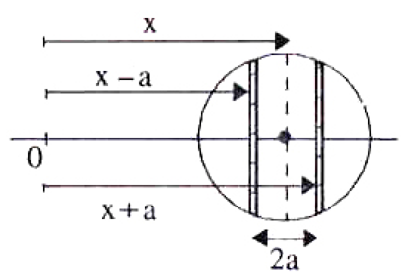
Obviamente el punto O (en los dos casos de la Figura) es el que posee más simetrías. Si queremos verificar este resultado nos conviene tomar ese punto como origen de coordenadas y sumar en torno a él en forma simétrica:

$$
\begin{aligned}
+\Delta m \cdot x_i + \Delta m \cdot x_j &= 0 \quad (x_i < 0,\ x_j > 0,) \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \cdot x_i &= 0,
\end{aligned}
$$

(puesto que los términos se anulan de a pares).□

Ejercicio

Demostrar que el centro de masa de un disco cuyo origen de coordenadas no coincide con su centro, como se indica en la Figura, es precisamente el centro del disco.
Con este ejercicio debe quedar claro que el centro de masa es un punto geométrico y su localización no depende de la ubicación del sistema de coordenadas. □



De la misma forma como dividimos una barra en elementos infinitesimales, podemos descomponer un cuerpo de forma arbitraria. Este debe ser dividido en partes pequeñas, pero simétricas, de manera que su CM sea conocido. Con estos datos y la fórmula del CM podemos encontrar el centro de masa del cuerpo. Para ello debemos sumar sobre todos los elementos en que se subdividió el cuerpo, representados por las masas puntuales ubicadas en su centro de simetría.

Ejemplo

Ubicar el CM del disco de la Figura siguiente.

Por simetría, el centro de masa se debe ubicar en el eje x, es decir con $y_{CM} = 0$. Para demostrarlo, comenzamos por la expresión del CM:

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

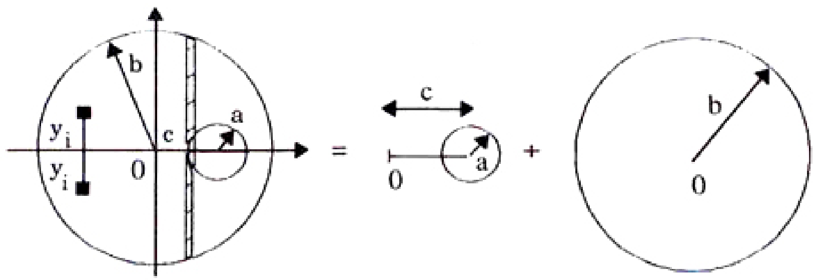


Figura XI.4: El disco original se compone aquí de un disco imaginario de masa negativa y de otro completo. El centro de masa se obtiene con la fórmula usual para el CM. Con esta estrategia, acortamos el cálculo en forma considerable.

Como podemos sumar esta expresión en la forma que más nos convenga, tomamos dos elementos de masa, m_i y m_j, simétricos con respecto al eje x; así se cumple que $y_i + y_j = 0$. Como además el cuerpo es homogéneo, elegimos los elementos con igual masa: $\Delta m_i = \Delta m_j = \Delta m$, de esta forma se cumple $[\Delta m]\, y_i + [\Delta m]\, y_j = 0$. Si sumamos de a pares en esta forma en el resto del disco tenemos $\Delta m \sum_{i=1}^{N} y_i = 0 = y_{CM}$.

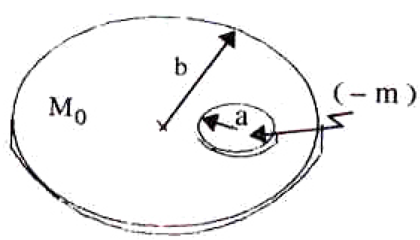
Estos métodos serán abandonados al utilizar el cálculo integral en estos problemas.

¿Cómo evaluamos x_{CM}?

Debido al orificio de radio $r = a$, *no* existe simetría con respecto al eje y.

Para resolver este problema utilizamos un *truco*: Las ecuaciones *no* pueden saber que no existen masas negativas. Nos aprovechamos de esto y consideramos el problema como la superposición de dos masas imaginarias que al sumarlas nos dan el disco original, con la sección que le falta. Estos dos objetos son:

- Disco *lleno* de radio b y masa M_0.
- Disco de radio a y masa $-m$ (negativa), ubicado justo donde falta el pedazo en el disco original.



Al superponerlas se obtiene la geometría propuesta, ya que la masa negativa cancela su equivalente de masa positiva en el disco lleno.

¿Qué valor toma la masa $-m$, que debemos superponer sobre el disco completo?

En primer lugar, deberá tener las mismas dimensiones que el disco que falta en el original. Además, el valor de su masa debe ser igual (en magnitud) a la masa de un disco del mismo tamaño.

Note que $M = -m + M_o$, el disco original es igual al disco de masa M_o menos el disco de masa negativa. M *es la masa total del disco original, con el forado*.

Como la densidad de ambos discos debe ser la misma, tenemos:

$$\rho = \frac{M_0}{\pi\, b^2\, h} = \frac{m}{\pi\, a^2\, h} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a^2}{b^2} M_0.$$

Donde ρ es la masa del disco y h su espesor. La masa del disco imaginario es:

$$m = -\frac{a^2}{b^2} M_0.$$

Puesto que el centro de masa es una sumatoria, siempre es posible sumarla en el orden que más nos convenga. Lo único relevante es no dejar fuera ninguna de las componentes de la suma.

Por simetría, podemos deducir rápidamente que el centro de masa de un disco lleno homogéneo, M_o, se ubica en su centro (ver Ejemplo anterior). El centro de masa del disco con el orificio se calcula entonces como la suma de los centros de masa de dos cuerpos: el disco lleno y el de masa negativa. Este último se superpone a M_0 de forma que su centro coincida con el centro del disco que falta en el problema original. El resultado se puede obtener considerando ambos como partículas puntuales de masa M y $-m$, respectivamente, ubicadas en su centro correspondiente. La expresión que resulta es:

$$x_{CM} = \frac{0 \cdot M_0 + c\left(-\dfrac{a^2}{b^2} M_0\right)}{M_0 - \dfrac{a^2}{b^2} M_0} = \frac{-a^2 \cdot c}{b^2 - a^2} = (-1)\left[\frac{c \cdot a^2}{b^2 - a^2}\right].$$

La ubicación del centro de masa no depende de la masa M_0 ni de su densidad. Este resultado era esperado puesto que –en los cuerpos homogéneos– el CM es un punto que depende de la geometría del sistema.□

Ejercicio

La expresión obtenida anteriormente es válida si (a + c) $\leq$ b. Explique porqué debe cumplirse esta desigualdad. ¿Es válido este método si $(a + c) > b$?

Resumiendo:

• En la expresión de x_{cm}, el primer término de la suma es $0 \cdot M_0$, porque la masa del disco lleno es M_0 y su centro de masa se ubica en el origen de coordenadas, por lo tanto $x = 0$.

El otro término corresponde al producto de la masa del disco imaginario por la distancia desde el origen hasta el centro de este disco que, obviamente, coincide con su centro geométrico.

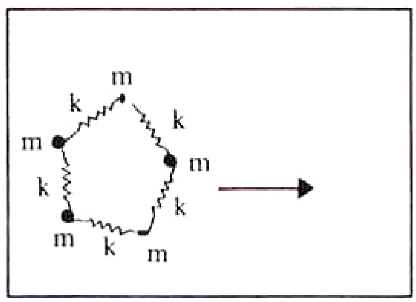
• Hemos resuelto el problema del disco con un agujero circular como una superposición de dos discos. Hemos reemplazado cada uno de los discos por una masa puntual ubicada en su centro, que corresponde al Centro de Masa de cada uno de los discos.□

XI.2.1. Movimiento del centro de masa

Estudiemos la dinámica del centro de masa. El resultado que obtendremos fue ya adelantado: el centro de masa se mueve como un punto que concentra toda la masa y está sometido a la suma de todas las fuerzas externas.

Supongamos que las masas de la Figura descansan sobre una mesa sin roce y están oscilando en direcciones al azar. Simultáneamente, están moviéndose como un todo en una dirección arbitraria. Esto último quiere decir que si se suprimieran las oscilaciones de cada punto, el cuerpo se desplazaría como un sólido rígido en una cierta dirección.

Supongamos que el sistema consta de un número mucho mayor de partículas que las que aparecen en la Figura: ¿Cómo podemos extraer alguna información general acerca de este sistema?
Conviene recurrir, en primer lugar, a las propiedades del centro de masa. Sin duda es el más fácil estudiar:



$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

Estudiemos en detalle la coordenada x. El resultado obtenido será similar a lo que suceda con la coordenada y. Ordenemos primero la ecuación del centro de masa:

$$\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\right] x_{CM}(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot x_i(t).$$

Ahora hacemos lo usual en cualquier problema en que exista movimiento, tomamos la diferencia entre dos instantes t_1 y t_2 separados por un intervalo Δt y simultáneamente, tomamos el límite $\Delta t \to 0$, para poder aplicar las leyes de Newton al movimiento de cada una de las partículas:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \frac{x_{CM}(t+\Delta t) - x_{CM}(t)}{\Delta t} \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \right] \right),$$

$$\text{pero} \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \equiv M \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x_{CM}(t+\Delta t) - x_{CM}(t)}{\Delta t} \right) \equiv v_{CM}|_x,$$

$$\text{con} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x_i(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) \equiv v_i|_x,$$

la componente x de la velocidad de la partícula *i–ésima*.

Reemplazando en las ecuaciones anteriores, tenemos:

$$M \ \vec{v}_{CM}(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i(t).$$

Definiendo el término de la izquierda de la ecuación como la cantidad de movimiento del centro de masa y la expresión de la derecha como la cantidad de movimiento de cada una de las partículas, obtenemos la siguiente expresión:

$$\vec{P}_{CM}(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i(t)$$

Derivando esta expresión para extraer la fuerza que actúa sobre cada una de las partículas, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{P}_{CM}(t+\Delta t) - P_{CM}(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i(t+\Delta t) - \vec{p}_i(t)}{\Delta t} \right), \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{P}_{CM}}{\Delta t} &= \sum_{i=1}^{N} \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} \right]. \end{aligned}$$

En este último paso, hemos usado –entre otras propiedades– que el límite de una suma es igual a la suma de los límites de cada una de sus componentes.

A continuación tomamos el paso más importante: introducimos la física al problema, incorporando las leyes de Newton en estas expresiones:

$$\frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} \equiv \vec{F}^{(i)}_{ext},$$

donde $\vec{F}^{(i)}_{ext}$ *es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula i-ésima*: esta es la segunda ley de Newton. La aceleración de una partícula puntual es proporcional a la fuerza *neta* que actúa sobre ella. En este caso $\vec{F}^{(i)}_{ext}$, identifica la suma de las fuerzas que las otras partículas, a través de los resortes, ejercen sobre la masa i–ésima, más las fuerzas externas –como la gravitación u otras– que actúan sobre la partícula.

El primer grupo de fuerzas: aquellas que son generadas por las otras partículas del sistema, se denominan *internas*. Es conveniente distinguirlas del resto porque –como demostraremos a continuación–, a partir de la tercera ley de Newton de acción y reacción, estas fuerzas internas se anulan entre sí .

Introduciendo estos resultados en la ecuación anterior:

$$\frac{\Delta P_{CM}}{\Delta t} = \sum_i \frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} = \sum_i F^i$$

La fuerza F^i se descompone, como ya se indicó, de la siguiente forma:

$$F^i \equiv \underbrace{F^i_{\text{ext}}}_{\substack{\text{fuerzas externas}\\ \text{actuando sobre la}\\ \text{partícula i–ésima.}}} + \underbrace{F^i_{\text{int}}}_{\substack{\text{fuerzas internas,}\\ \text{provenientes del resto}\\ \text{de las partículas,}\\ \text{actuando sobre la}\\ \text{partícula i–ésima.}}}$$

Las fuerzas internas que actúan sobre la partícula $i-$ésima, que provienen del resto de las partículas, se escriben como:

$$F^i_{\text{int}} = \sum_{j \neq i}^{N} F^{j\,i}.$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$\frac{\Delta P_{CM}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{i=N} \left(F^i_{\text{ext.}} + F^i_{\text{int}}\right) = \sum_i F^i_{\text{ext}} + \sum_i F^i_{\text{int}} = \sum_i F^i_{\text{ext}} + \sum_i \left(\sum_{j,\text{con}\, i\neq j} F^{ij}_{\text{int}}\right).$$

Por el principio de acción y reacción, todas las fuerzas internas se anulan de a pares entre sí , por lo tanto:

$$\sum_i \sum_{j,i\neq j} F^{i,j}_{\text{int}} = 0, \quad \text{puesto que} \quad F^{i\,j} + F^{j\,i} = 0, \ \ \forall\, i \neq j, \tag{XI.4}$$

la fuerza con que la partícula identificada con la letra i actúa sobre la partícula j, es idéntica pero de sentido opuesto a la fuerza que esta misma partícula, j ejerce sobre la i, y por lo tanto se cancelan de a pares. Finalmente, después de esta simplificación, la ecuación de movimiento del centro de masa queda:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta \vec{P}_i}{\Delta t} = \vec{F}_{ext}, \Rightarrow \quad \text{sólo sobreviven las fuerzas externas al sistema.}$$

Resumen:

$$\frac{\Delta \vec{P}_{CM}}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{externas al sistema}},$$

$$\text{Escrito de otra forma:} \qquad \Delta \vec{P}_{CM} = \vec{F}_{ext.}\, \Delta t. \qquad \text{(XI.5)}$$

Se desprende de este resultado que si no existen fuerzas externas sobre el sistema, $\vec{F}_{ext} = 0$, el *centro de masa* se mueve con *momentum*:

$$\vec{P}_{CM} = \text{constante}.$$

Este es un resultado importante. Se utiliza especialmente en el estudio de choques de partículas.

En el caso de las masas unidas por resortes, referidas al comienzo de esta sección, por arbitrarias que parezcan allí las vibraciones del sistema, éstas deben ser de tal forma que el centro de masa viaje en línea recta y no oscile, puesto que *no* existen fuerzas externas al sistema. Todas las fuerzas son internas.

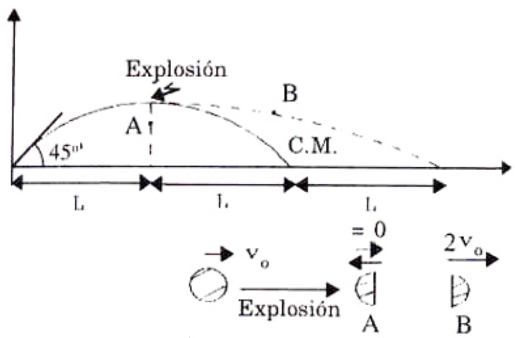
Ejemplo

Se tienen dos partículas de igual masa que, mediante un hilo, comprimen un resorte que las separa. El sistema se lanza con velocidad $v_x(0) = v_0,\ v_y(0) = v_0$; al llegar a su máxima altura, el hilo se corta, y en ese instante las masas se separan con una velocidad v_0 *con respecto al centro de masa*. Ubique el lugar donde caen las dos masas. Encuentre el lugar donde se encuentra el CM del sistema cuando ambas partículas tocan el suelo.

Nota

Suponemos que al separarse las partículas sólo adquieren velocidades en la dirección horizontal.

Hemos elegido la velocidad con que se separan las masas, medidas con respecto al CM, igual a la velocidad inicial v_0, para disminuir el álgebra del problema.



Como ambas componentes de la velocidad son iguales, entonces el ángulo de lanzamiento fue de $45°$.

Al llegar a su máxima altura h:

$$2g \cdot h = v_0^2, \qquad\qquad h = \left(\frac{v_0^2}{2g}\right),$$

el objeto explota. La semiesfera A queda en reposo con respecto a la tierra, puesto que en el enunciado se afirma que su velocidad después de la explosión es precisamente $(-v_0)$ con respecto al Centro de Masa. Al sumar las velocidades se cancelan y, en consecuencia M$_A$ cae verticalmente.

La semiesfera B sale disparada en la dirección horizontal con una velocidad $2\,v_0$ y por lo tanto alcanza una distancia $2\,L$ (ver Figura), ya que B –o cualquier otro cuerpo– demora lo mismo en caer una altura h que en elevarse *hasta* esa misma altura.

Recordemos que ambos movimientos (horizontal y vertical) son independientes y que por lo tanto A y B tocan el suelo simultáneamente. El centro de masa viaja como si nada hubiera ocurrido, porque la *explosión origina sólo fuerzas internas* y este punto matemático cae justo en el punto medio del trazo que separa ambas partículas al tocar tierra.

Este ejemplo muestra que el centro de masa es un *punto matemático* que no necesariamente coincide con un punto material del cuerpo que representa. □

Ejemplo

Un estudiante de masa m está sentado en un extremo de un bote de masa M. El mar está tranquilo y no hay viento. Al acomodarse, el estudiante realiza un movimiento brusco y la bolsa con la merienda, ubicada al otro extremo del bote, cae al mar. De inmediato corre hacia el otro extremo –con una velocidad v *con respecto al bote*– para recuperarla. Si el

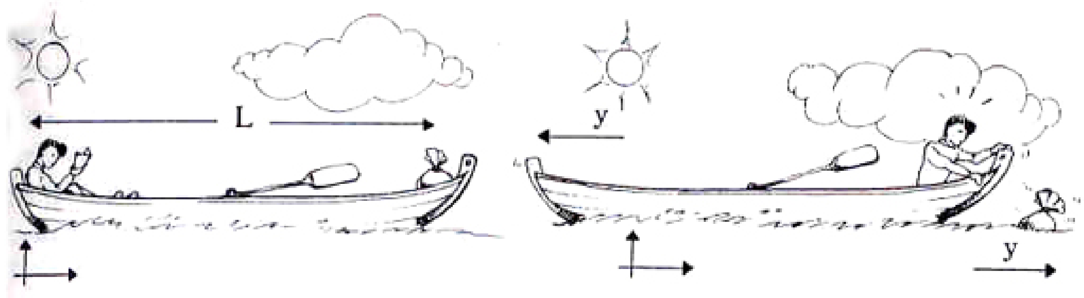


Figura XI.5: Designamos por y la distancia que se ha desplazado el centro de masa del bote.

largo del bote es L metros, ¿a qué distancia de la bolsa se encontrará el estudiante cuando logra alcanzar la otro punta del bote?

Puesto que en la dirección horizontal no existe ninguna fuerza externa, el momentum del sistema *estudiante–bote* se conserva. Como inicialmente el bote estaba en reposo, el momentum inicial es nulo. Supondremos que las velocidades son constantes, tanto del bote como del estudiante. Esta suposición no es esencial, sólo simplifica los cálculos.

$$P_{CM} = 0 = P_{\text{estudiante}} + P_{\text{bote}} = m\,(v - V) - M\,V,$$

donde $(v - V)$ representa la velocidad relativa del estudiante con respecto al mar. Hemos supuesto, como es natural, que el bote se mueve en sentido opuesto al estudiante. La velocidad del bote es:

$$V = \frac{m}{(m+M)}\,v.$$

Todo esto transcurrió en un intervalo de $T = L/v$ segundos. (Recordemos que v es la velocidad del estudiante con respecto al bote.)

Como el bolso permaneció sin moverse en el agua, cuando el estudiante llegó al otro extremo, la distancia que los separaba era el desplazamiento del bote con respecto al agua, y:

$$y = V\,T = \frac{m}{(m+M)}\,v\,\frac{L}{v}, \implies y = \frac{m}{(m+M)}\,L.$$

En este resultado no figura la velocidad que llevaba el estudiante; sólo depende de las masas y el largo L del bote.

Lo que sucede es lo siguiente: si el estudiante trata de ir más rápido, debe empujar con mayor fuerza con su pie en el piso para darse más impulso, esto genera –a través del principio de acción y reacción– una mayor velocidad para el bote. El estudiante se demora menos en llegar al otro extremo, pero el bote viaja más rápido, compensándose un efecto con otro.

Resolvamos este problema empleando solamente las propiedades del CM. Como no hay fuerzas externas y el sistema está inicialmente en reposo, el CM no puede desplazarse: debe permanecer en el mismo lugar desde el comienzo hasta el final de la carrera.

Tomemos como origen de coordenadas un punto –*en el mar*– que coincida con el extremo del bote donde se encuentra inicialmente el estudiante. A continuación escribamos la ecuación del CM para los instantes $t = 0$, cuando la merienda cae al mar y $t = T$, cuando el estudiante llega al otro extremo:

$$x_{cm} = \left. \frac{m \cdot 0 + M \cdot L/2}{m + M} \right|_{t=0} = \left. \frac{m \cdot (L - y) + M \cdot (L/2 - y)}{m + M} \right|_{t=T},$$

despejando y de la segunda igualdad, se obtiene el resultado anterior, sin necesidad de hacer ninguna suposición con respecto a las velocidades.

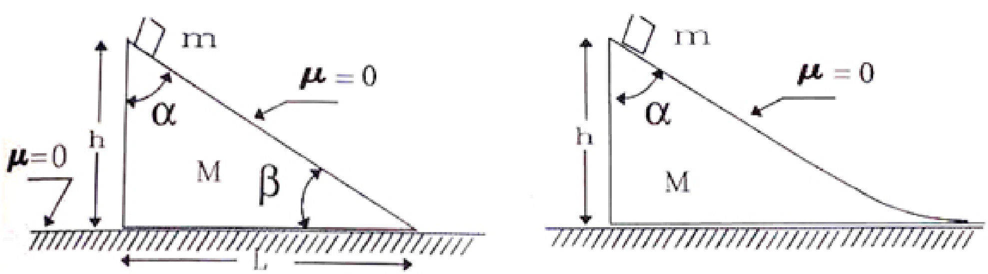


Figura XI.6: Los ángulos de la cuña son α y β. No existe roce en ninguna de las superficies de contacto, incluyendo el piso. A la derecha, se ha suavizado el ángulo β de manera que la masa m tenga, al tocar el piso, sólo una componente horizontal para la velocidad.

Ejemplo

Las superficies de los objetos de la figura: la cuña, el bloque y el piso, no tienen roce. La cuña tiene una masa M, altura h y el lado que está en contacto con el piso, largo L.

Si el bloque de masa m se deja caer desde el vértice superior de la cuña y $\beta > 0$:

a) ¿cuál es la posición de la masa m, al llegar al piso? En esta pregunta y en las siguientes suponga que el bloque es una masa puntual, con el objeto de reducir los cálculos.

b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad de la cuña y la velocidad de la masa m? Escriba la ecuación de la conservación de la energía para este caso.

c) Para el caso en que $\beta = 0$ (ver Figura), ¿cuál es la velocidad de la cuña y la masa m cuando esta última toca el piso?

a) Como la componente **x** del CM del sistema debe permanecer fijo debido a que no hay fuerzas externas en la dirección **x**, se tiene que:

$$X_{cm} = \left.\frac{m \cdot 0 + M \cdot L/3}{m + M}\right|_{t=0} = \left.\frac{M \ \cdot \ L + M \cdot (L}{m + M}\right|_{t=T},$$

donde establecimos el origen de coordenadas en un punto fijo al piso pero que coincide, en el instante inicial $t = 0$, con el vértice recto de la cuña. Supusimos, además, que su centro de masa se desplaza una cantidad y durante la caída de la masa m.

Nota: El centro de masa de un triángulo es: $x_{\text{triángulo}} = L/3$. (**Ejercicio**).

La situación en el eje **y** es diferente. la componente del centro de masa en esta dirección cambia a medida que la masa **m** desliza sobre la cuña.

$$Y_{cm} = \frac{m \cdot y + M \cdot h/3}{m + M}.$$

b) La velocidad de la cuña tiene sólo una componente horizontal y la designamos por V_x. La masa m tiene velocidad u_x y u_y. Por conservación del momentum en el eje **x**, se cumple que:

$$P_{CM} = 0 \implies -M\, V_x + m\, u_x = 0.$$

Hemos supuesto que la masa **M** se desplaza hacia la izquierda de la Figura.

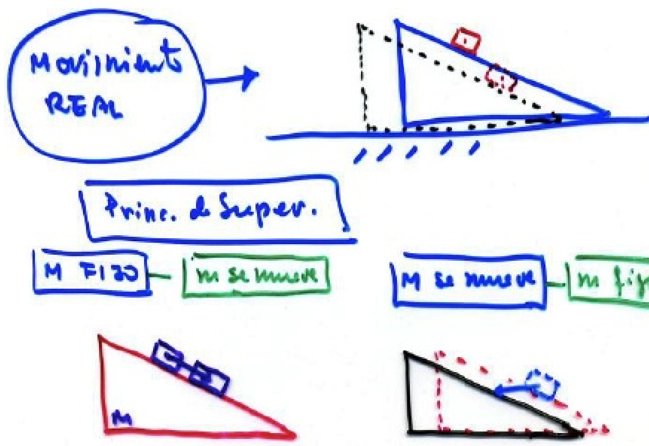
La conservación de la energía mecánica en este ejemplo, genera la siguiente ecuación:

$$m\, g\, h = \frac{1}{2}\, M\, V_x^2 + \frac{1}{2}\, m\, u_x^2 + \frac{1}{2}\, m\, u_y^2,$$

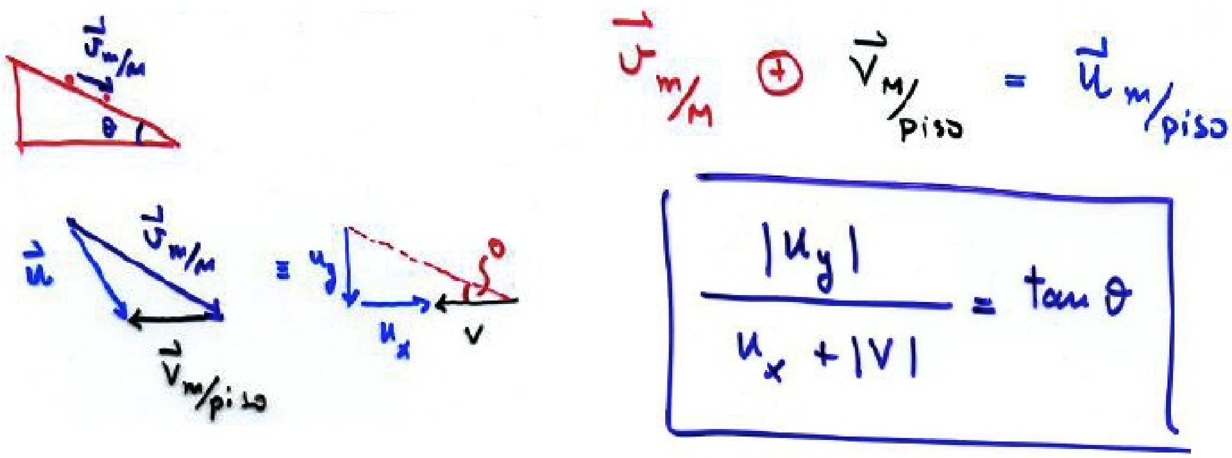
si reemplazamos el valor de V_x en esta ecuación, se llega a:

$$m\, g\, h = \frac{1}{2}\, m \, \left(\frac{m}{M} + 1\right)\, u_x^2 + \frac{1}{2}\, m\, u_y^2.$$

Geométricamente podemos encontrar la relación entre las distintas velocidades $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ y $\mathbf{V}_x$. Se requiere usar el principio de Superposición, dejamos fija la cuña y desplazamos la masa **m** y después superponemos el movimiento de la cuña hacia la izquierda. la suma de estos dos movimientos nos da el desplazamiento efectivo de la masa **m**. este procedimiento se ilustra en las figuras siguientes [**??**].



A partir de esta relación geométrica podemos obtener una ecuación que relaciona las tres componentes de las velocidades de la cuña y de la masa que se desliza sobre ella. Hemos designado el ángulo de la base como θ en lugar de β que aparece en la figura anterior.



c) Cuando la cuña se deforma y el ángulo β se anula, desaparece la componente vertical de la velocidad y en este caso podemos encontrar, con estos métodos, la velocidad de ambos cuerpos M y m. La velocidad de m se obtiene despejando de la ecuación de conservación de la energía mecánica, la velocidad u_x:

$$u_x = \sqrt{\left[\frac{2\,M\,g\,h}{m+M}\right]}, \qquad V_x = \frac{m}{M}\sqrt{\left[\frac{2\,M\,g\,h}{m+M}\right]}.$$

Ejemplo

Dos masas m_1 y m_2, descansan sobre una mesa sin roce. Un resorte de constante k es comprimido una distancia d, con m_2 pegado a la pared y enseguida el sistema es abandonado desde el reposo.

a) Encontrar qué distancia viaja m_1 antes que m_2 comience a moverse.

b) En el instante que m_2 ha perdido el contacto con la pared, ¿cuál es la velocidad del CM? ¿Cuál es la velocidad de cada una de las masas?.

a) Siempre que el resorte esté comprimido la masa m_2 permanecerá apoyada en la pared. Cuando el resorte alcance su largo natural, no habrá fuerza sobre m_2, y por lo tanto, tampoco contra la pared. Esto ocurre cuando m_1 ha recorrido una distancia d.

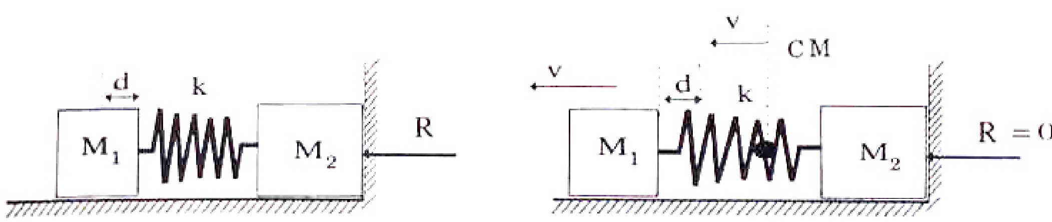


Figura XI.7: No hay roce entre los bloques y el piso. El resorte no tiene masa.

b) Cuando la masa m_2 deja de presionar a la pared, no hay ninguna fuerza horizontal actuando sobre el sistema. A partir de ese instante el CM se desplazará con una velocidad constante igual a:

$$V_{cm} = \frac{m_1\, v_1 + 0}{m_1 + m_2}.$$

Por conservación de la energía, tenemos:

$$E_i = E_f \implies \frac{m_1\, v_1^2}{2} = \frac{k\, d^2}{2}, \implies v_1 = \sqrt{\frac{k\, d^2}{m_1}},$$

de esta forma la velocidad del CM es:

$$V_{cm} = \frac{\sqrt{k\, d^2\, m_1}}{m_1 + m_2}.$$

A continuación nos ubicamos en un sistema de referencia que se mueva con el CM. En este sistema las velocidades de la masas son:

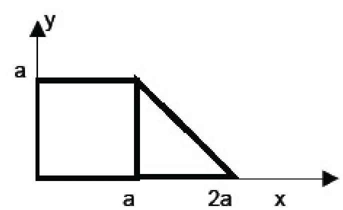
$$u_1 \equiv v_1 - V_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{k\, d^2}{m_1}}, \qquad u_2 \equiv -V_{cm} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{k\, d^2}{m_1}},$$

donde u_1 y u_2 son las velocidades relativas al CM de m_1 y m_2 respectivamente.

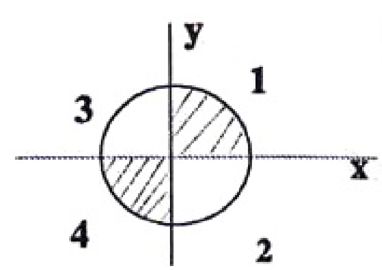
Al despegarse de la pared, las dos masas continuarán oscilando con respecto al CM. Las condiciones iniciales para describir esta oscilación en el sistema CM, son las siguientes: el resorte adopta su largo natural en ese instante y u_1 y u_2 representan las velocidades iniciales de cada una de las masas. □

XI.3. EJERCICIOS

1. – Determine la ubicación del Centro de Masa de la placa que se muestra en la figura y cuya masa total es **M** y densidad constante **d**.



2. – Un cilindro sólido tiene una densidad que varía por cuadrantes, como se indica en la Figura. Los números que allí aparecen reflejan los valores relativos de las densidades en los cuadrantes. Encuentre la ecuación de la recta que cruza el origen y el CM simultáneamente. Tome como referencia el eje x e y, de la Figura.

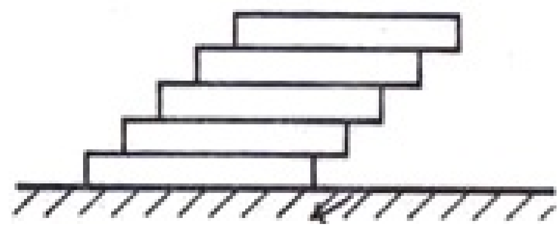


3. – Encontrar el centro de masa de un arco de circunferencia que subtiende un ángulo central de α radianes medidos desde el centro de la circunferencia de radio **R**.

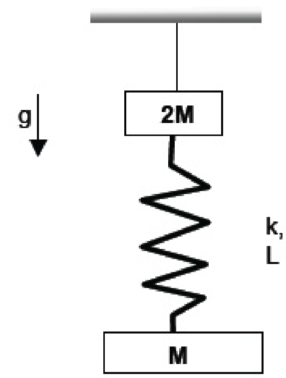
4. – Un bloque homogéneo de largo ℓ, descansa sobre una superficie horizontal. Otros bloques, todos exactamente iguales al anterior, se colocan sucesivamente uno sobre otro, dejando que sobresalga –siempre en el mismo lado– un largo ℓ/k del bloque, con **k** un número entero, en la forma que indica la Figura.

a.- Encuentre el centro de masa de un conjunto de n bloques ordenados como se indicó en el párrafo anterior.
. Suponga que todos tienen una sección cuadrada de lado **a**.

b.- Calcule el máximo número de bloques que se pueden apilar de esta forma, sin que el conjunto se derrumbe.



5. – El resorte de la figura se suspende desde la masa **2M** y se mantiene en reposo sin oscilar. Repentinamente, se corta la cuerda que lo sostiene.
   a.- Encuentre la ecuación de movimiento del centro de masa del sistema de masas y resorte.
   b.- Encuentre la ecuación de movimiento de cada una de las dos masas.



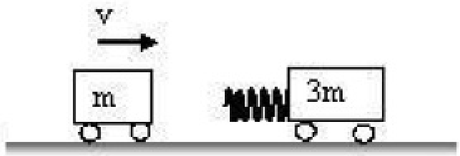
6. – Se coloca una cadena sobre una mesa con roce despreciable, de forma que la mitad de ella cuelga del borde. Si el largo de la cadena es **2L** y su masa **2m**:

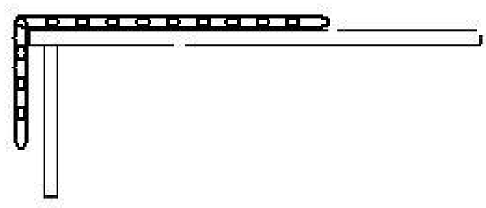
   a.- ¿Cuánto trabajo se requiere para subir totalmente la cadena sobre la mesa? Suponga que la fuerza aplicada para arrastrar la cadena es la justa y necesaria para subir (muy lentamente) la cadena. Compare el trabajo realizado sobre la cadena con la variación de la energía potencial del centro de masa de la cadena.

   b.- Si una vez que la cadena está sobre la mesa en reposo, se la deja resbalar por el borde con un pequeñísimo impulso. Usando la conservación de la energía y refiriéndose al centro de masa de la cadena compare el trabajo realizado para dejar la cadena sobre la mesa. Comente cualquier diferencia.

   c.- Considere ahora la situación inicial. En esta ocasión se quiere subir la cadena y dejarla extendida sobre la mesa en **T** segundos. ¿Cuál es el trabajo por unidad de tiempo (Potencia) que debe ser capaz de realizar el agente externo para cumplir con este requerimiento?

7. – Un carrito de masa **m** se acerca por la izquierda con velocidad **V** y choca con otro de masa **3 m**. Hay un resorte de constante **k**, largo natural ℓ y masa nula, que





transmite y absorbe el impacto entre los carros y que siempre permanece unido al más masivo.

a.- ¿Cuál es la rapidez del carro más masivo **3m** en el instante que el resorte alcanza su máxima compresión?

b.- ¿Cuál es la velocidad final que alcanza el carro mayor después que ha transcurrido un tiempo después del choque? Suponga que la energía se conserva. Recuerde que la masa del resorte es nula y que las masas se separan después del choque.

c.- ¿Cuál es la velocidad del carro mayor si el choque es totalmente inelástico (ambas quedan unidas)? Para este efecto, suponga que el resorte se comprime una distancia Δ y después de eso permanece rígido (no recupera su forma inicial ni prosigue deformándose).

8. – Un cuerpo de masa **M** permanece en un plano horizontal. Esta superficie es rugosa y la caracterizamos por un coeficiente de fricción cinética μ.

En un cierto instante esta masa **M** violentamente se parte en dos fragmentos de masas **m** y **M-m** . Los dos fragmentos resbalan en la misma dirección pero en sentidos opuestos, obviamente alejándose del punto de la explosión. La explosión aporta una energía **E**.

a.- Calcule el valor de la velocidad del centro de masa inmediatamente después del choque y **t** segundos después del choque.

b.- Calcule en qué instante el momentum del centro de masa es máximo. Expréselo en función de la Energía **E** y la razón entre las masas, $\lambda \equiv \frac{M-m}{M}$.

c.- Demuestre que la razón entre las distancias recorridas por cada una de las masas $\frac{d_1}{d_2} = \lambda^2$

d.- Utilizando el resultado obtenido para el valor máximo del momentum del centro de masa (parte b), calcule para qué valor de λ el momentum alcanza su máximo valor.