INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 3 de julio de 2016

Índice general

Capítulo IX

COLISIONES BINARIAS

IX.1. INTRODUCCIÓN

IX.1.1. Definición de Choque

Al establecer la segunda ley de Newton, hicimos notar que la fuerza representa la interacción entre dos cuerpos. Un determinado tipo de fuerza se define a partir de la observación de un experimento en que esta fuerza se destaca y una propuesta posterior para modelar dicha fuerza. La puesta a prueba del modelo, en diferentes circunstancias, debe confirmar que es una ley de interacción razonable y que -dadas las aproximaciones establecidas- describe en forma aceptable la realidad. Entonces la podemos usar.

Las colisiones , o choques, es otro tipo de interacción que se suma a las analizadas anteriormente. A continuación describimos las características que distinguen lo que llamaremos choque y el protocolo que debemos aplicar para resolverlas.

IX.1.2. Características de un Choque

Lo que definimos como choque debe tener las siguientes características:

1.- El contacto entre los dos cuerpos Debe ocurrir en un tiempo muy corto comparado con cualquier otra escala de tiempo asociada al fenómeno físico.

2.- El par de fuerzas de interacción (Acción y Reacción) que aparece durante el choque de estos dos cuerpos, debe ser mucho mayor que cualquiera de las otras fuerzas que co-existen en dicho intervalo. Por ejemplo, en el choque de dos esferas sobre un piso, la fuerza de gravedad sobre las masas, o la reacción del piso sobre cada una de las masas en reposo, DEBEN ser mucho menores que la fuerza generada durante el choque.

3.- Como todo ocurre en un tiempo muy corto, suponemos que los cuerpos NO cambian su posición durante el choque. La energía potencial no interviene acá porque hemos supuesto que los cuerpos no cambian de posición y por tanto la energía potencial permanece igual antes y después del choque.

4.- Como se genera un par de fuerzas (Acción y Reacción) el **momentum del sistema de los dos cuerpos** se conserva siempre. La fuerza neta proveniente del choque es nula si consideramos el sistema de los dos cuerpos.

5.- Como la magnitud de las fuerzas del choque son muy grandes, generan una aceleración, de acuerdo a la segunda ley de Newton. Esta aceleración produce un cambio abrupto en la velocidad de los cuerpos. Existe entonces una velocidad inmediatamente antes del choque y otra -diferente-, inmediatamente después para cad uno de los dos cuerpos.

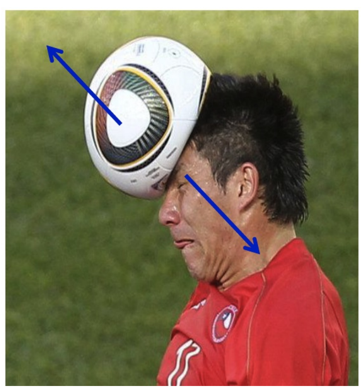


Figura IX.1: *El cabezazo del jugador es un ejemplo de choque. Lo que observamos es una foto profesional con una cámara que debe tomar 1000 fotos por segundo. El fenómeno ocurre en un tiempo muy corto. El par de fuerzas señaladas corresponden a la acción y reacción. No se considera ninguna otra fuerza: el peso de la pelota o del jugador. El notorio esfuerzo y coordinación del jugador le permite que todo su cuerpo se comporte como un elemento rígido contra el cual choca la pelota. (La fuente de la foto es desconocida para nosotros.)*

6.- Si el choque es ELÁSTICO, la energía cinética del sistema de dos partículas se conserva. Si no es elástico debemos conocer el **coeficiente de restitución e** con $0 \leq e \leq 1$. Este coeficiente relaciona el módulo de la velocidad relativa antes y después del choque.

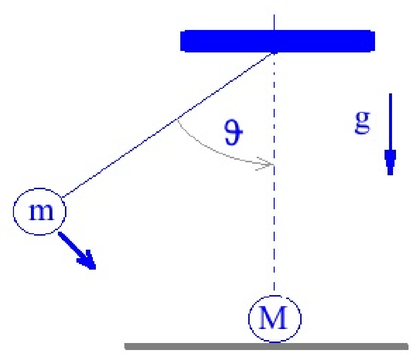
Es un dato empírico, obtenido mediante experimentos.

En la foto (Figura IX.1), podemos concretar varios de las afirmaciones previas: el choque ocurre en un intervalo muy corto: nunca vemos con nuestros propios ojos lo que la cámara de alta velocidad nos muestra. La velocidad de la pelota antes y después del golpe de cabeza es diferente y cambió abruptamente. Durante el choque no cambió su altura de modo que su energía potencial antes y después del choque permanece igual. Podemos considerar al jugador como una masa infinita y la pelota como un cuerpo que rebota elásticamente en su cabeza. Este es un modelo posible para esta situación. Después del golpe de cabeza la pelota recupera su forma original.

IX.1.3. Análisis por Etapas en el Transcurso de un Choque.

Ilustraremos las características a través de un ejemplo: la colisión de un péndulo matemático (un hilo sin masa que sostiene una esfera en su extremo) y otra esfera en reposo, ubicada en el punto más bajo donde el péndulo pasa apenas sobre el piso. Dividimos el choque en cuatro etapas. Sólo la segunda y la tercera están directamente ligadas al choque propiamente tal. Estas dos son comunes en casi todos los choques, sean péndulos, masas en una mesa... . (Ver Figura IX.1.3) .

Primera Etapa: El péndulo se suelta desde una cierta altura y comienza a caer. Usando la conservación de la energía podemos calcular la velocidad del péndulo en cualquier instante, antes de tocar la esfera que está en reposo. Conociendo la velocidad es posible calcular la tensión de la cuerda, la aceleración centrípeta, la aceleración tangencial... para cualquier ángulo antes del choque. Esta es la etapa previa al choque donde se utiliza la física de los capítulos anteriores. La otra masa está en reposo. Esas son las condiciones previas al choque., de modo que no requiere ser analizado.



Choque de un péndulo con una masa en reposo.

Segunda Etapa (Justo antes del choque): Este es un instante y lo denominamos (notación arbitraria...)$t = 0^{-}$. Las dos esferas están a punto de tocarse e interactuar con una fuerza. La masa del péndulo tiene una rapidez horizontal $V = \sqrt{2\,L\,g\,(1-\cos\theta)}$.

Tercera Etapa: (Inmediatamente después del choque choque: $t = 0_+$). Ambas esferas permanecen en el mismo lugar, pero han cambiado (abruptamente) la magnitud de sus velocidades respectivas. Estos cambios dependen de la naturaleza del choque (el valor de **e**, elástico o inelástico) , el valor de las masas de las esferas...

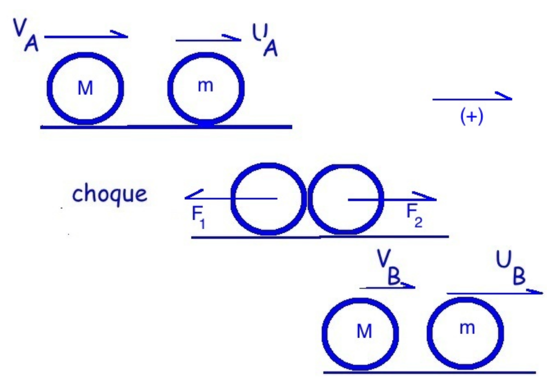
Cuarta Etapa: (Ya transcurrido el choque). Las esferas evolucionan de acuerdo a las nuevas condiciones iniciales que fueron fijadas en $t = 0_+$.

Veamos las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los choques.

IX.1.4. Conservación del Momentum

Debido a que en este modelo el choque es instantáneo y debido a la gran intensidad de la fuerza de contacto que se produce en el impacto, se desprecian todas las otras fuerzas presentes (por ejemplo, según el caso: tensión del hilo, peso de las esferas, roce si existe...) cualquier choque binario sigue las mismas reglas del choque entre dos esferas estudiado. Mostraremos a continuación que el momentum se conserva durante el choque en este caso, el de dos esferas (Ver IX.1.4) y por lo mencionado en el párrafo anterior, este será un resultado válido para cualquier colisión.

Consideramos dos esferas como las que aparecen en la figura (IX.1.4). Tenemos dos incógnitas $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{u}_B$. Conocemos las velocidades antes del choque. Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección horizontal, la única relevante y tenemos:



Choque de dos masas

$$M\,\frac{\Delta V}{\Delta t} = -F_1,$$

$$m\,\frac{\Delta u}{\Delta t} = F_2.$$

En la última ecuación, pusimos $-F_1$, y F_2, como las fuerzas actuando sobre cada una de las masas durante el choque. El principio de acción y reacción aplicado al punto de contacto de las masas m y M indica que $\vec{F_1} + \vec{F_2}$=0.

Sumando las dos ecuaciones de movimiento de m y M y reemplazando este último resultado, obtenemos:

$$M\,\frac{\Delta V}{\Delta t} + m\,\frac{\Delta u}{\Delta t} = 0.$$

Como este resultado es válido durante el intervalo que dura el choque, designamos como A y B dos instantes, uno inmediatamente antes del choque t_0^+, el primero, e inmediatamente después del choque t_0^- el otro. Estos instantes corresponden a la segunda y tercera etapa del choque descrito en el párrafo anterior.
Definiendo $\Delta\, t \,=\, t_0^+ \,-t_0^-$, entonces:

$$
\begin{aligned}
M\,\frac{[V_B - V_A]}{\Delta t} + m\,\frac{[u_B - u_A]}{\Delta t} &= 0, \\
M\,[V_B - V_A] + m\,[u_B - u_A] &= 0, \quad \text{ordenando,} \\
M\,V_B + m\,u_B = M\,V_A + m\,u_A, & \qquad \text{para los instantes } t_0^+ \text{ y } t_o^-, \\
\text{de este modo se tiene que :} & \\
M\,V + m\,u &= \text{constante.}
\end{aligned}
$$

Después del choque las esferas siguen con una velocidad V_B y u_B. podemos re-escribir el resultado anterior como:

$$M\,V_B + m\,u_B \;=\; M\,V_A + m\,u_A.$$

Este es un resultado general: se denomina *conservación del momentum*. En ausencia de fuerzas externas actuando sobre un sistema, la siguiente expresión permanece constante:

$$\sum_{i=1}^{N} M_i\,V_i = \text{constante}, \tag{IX.1}$$

M_i identifica a cada una de las masas del sistema y V_i su velocidad respectiva.

Este mismo resultado es válido durante el choque de dos partículas, puesto que todas las otras fuerzas externas no son consideradas dada la magnitud de la fuerza de choque. Este resultado es siempre válido y se desprende directamente de la segunda y tercera ley de newton.
En el inmediatamente antes y después del choque, el momento de ambas partículas se conserva.
□

IX.2. CHOQUE BINARIO EN UNA DIMENSIÓN

Estudiaremos el choque de dos masas. No conocemos -en general-, el comportamiento instante a instante del par de fuerzas de interacción. Sin embargo, podemos recurrir a las

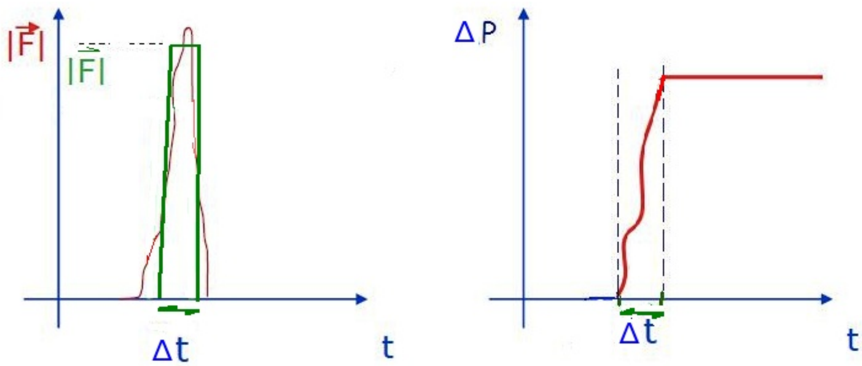


Figura IX.2: *La figura muestra el comportamiento imaginado de una fuerza irregular, impredecible que ocurre durante un choque. La modelamos como una fuerza constante, promedio, actuando en un intervalo Δt. Este es el rectángulo sobrepuesto al gráfico de la fuerza real. Considerando la fuerza constante (figura de la izquierda) la aceleración sobre uno de los cuerpos, inicialmente reposo, genera una aceleración constante y un aumento lineal en el momentum de esta partícula (Figura de la derecha). Esto ocurre hasta que las masas se separan.*

cantidades conservadas.

En la Figura IX.2 se propone un modelo simple de la Fuerza que actúa durante el choque. Suponemos que es una fuerza constante actuando por un intervalo $\Delta\, t\, =\, [t_0^+\, -\, t_0^-]$. El área bajo la curva (un rectángulo en este caso) se denomina el *Impulso* $\equiv$ **J**, y es igual al cambio de momentum $\Delta\, p$, que experimenta *una de las partículas* que participan en el choque.

Por ejemplo, el impulso sobre la partícula **B** del ejemplo anterior es: $J_B\, =\, m\,[u_B\, -\, u_A]$.

IX.2.1. Choques Elásticos e Inelásticos

Demostramos que el *momentum* en el choque de dos masas siempre se conserva.
La otra ley que conocemos es la ley de conservación de la energía mecánica. En el intervalo del choque sólo la energía cinética es relevante dado que no hay cambio de posición durante el choque.

Veremos que no siempre se conserva la energía cinética. Existe la posibilidad de una deformación permanente de los cuerpos o que uno de ellos se incruste en el otro y pierda parte de su energía mecánica en este proceso.

En esta sección **supondremos** que la energía cinética se conserva durante el choque. Este es un dato externo, que se obtiene a través de la experimentación. Estos choques se denominan **elásticos**.
Por ejemplo si una esfera de vidrio se suelta desde 1 metro de altura y rebota sobre una placa de acero ubicada en el piso, alcanzando 97 cm de altura en su rebote, consideraremos este choque como elástico. Es una buena aproximación. En cualquier choque, basta que Ud. lo escuche indica que parte de su energía se evaporó en la forma de ondas sonoras. Si este factor es muy pequeño, se desprecia y se tarar el problema como totalmente elástico y en consecuencia la energía cinética se conserva.

Leyes de conservación en los choques elásticos

Las leyes de conservación son:

- La Conservación del Momento, proveniente de la segunda ley de Newton. Se conserva en todos los choques sin excepción.
- La conservación de la Energía Cinética. Esta ley de conservación se aplica sólo a los choques elásticos.

Solución general del choque elástico, binario y unidimensional.

Estudiaremos el problema más simple primero: choque en una dimensión entre dos masas m_1 y m_2 con sus respectivas velocidades. Debemos distinguir antes del choque donde tienen los valores V_1 y V_2 y, las correspondientes después del choque V_1' y V_2'.

La conservación del momentum genera la siguiente ecuación

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2', \tag{IX.2}$$

donde aparece el momentum de ambas partículas justo antes del choque y justo después del choque a la derecha de la ecuación.

Como consideramos un choque elástico, se conserva la energía cinética,

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2. \tag{IX.3}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Para resolver este sistema nos conviene ordenar las ecuaciones separando las correspondientes a cada una de las masas. Para el momentum tenemos

$$m_1(V_1 - V_1') = -m_2(V_2 - V_2'), \tag{IX.4}$$

y para la energía cinética

$$\frac{1}{2}m_1(V_1^2 - V_1'^2) = -\frac{1}{2}m_2(V_2^2 - V_2'^2). \tag{IX.5}$$

Dividiendo la ecuación IX.5 por la ecuación IX.4 se obtiene:

$$V_1 + V_1' = V_2 + V_2', \qquad \text{y ordenando} \qquad V_1 - V_2 = -V_1' + V_2' = -(V_1' - V_2'). \tag{IX.6}$$

Recordando la definición de velocidad relativa

$$V = V_{1/\text{Lab}} - V_{2/\text{Lab}} = V_{1/\text{Lab}} + V_{\text{Lab}/2} = V_{1/2} \tag{IX.7}$$

donde $V_{1/2}$ es la velocidad relativa del cuerpo 1 con respecto al cuerpo 2.
Interpretamos la ecuación IX.6 como la velocidad relativa de la masa m_1 con respecto a m_2, antes del choque (aproximándose) y después del choque (alejándose) son iguales en magnitud y cambian de signo. Las masas se acercan antes del choque y se alejan la una de la otra después del choque. Este es el cambio de signo que se observa en IX.6.

Veamos un par de ejemplos. Nos daremos las velocidades inicial y final del par de partículas y veremos si es una solución con sentido físico.
Supongamos que V_1 es un valor dado y $V_2 = 0$, $V_1' = 0$. A partir de la la ecuación para la velocidad relativa, tenemos: $V_2' = V_1$. Si reemplazams estos valores en la ecuación del momentum, nos da una relación entre las masas de las partículas: $m_2 = m_1$. Esta es la relación esperada, en el choque elástico entre dos masas iguales: la incidente queda en reposo, y aquella inicialmente en reposo toma toda la velocidad de la incidente.

La ecuación IX.6 es muy importante. Por un lado resuelve en forma muy simple el problema general de un choque binario, elástico y unidimensional. Expresa que las dos ecuaciones relevantes son la conservación del momentum (IX.4) y, cuando el choque es elástico, la velocidad de aproximación de las partículas que chocan es igual a la velocidad de separación después del choque con el signo cambiado.

Por otra parte la ecuación IX.6 nos permite extender la validez de estas ecuaciones al caso en el cual no se conserva la energía cinética.

Extensión al caso del choque inelástico.

Las expresiones anteriores se cumplen para el caso en que la energía cinética se conserva durante el choque. Este no es el caso general. En otros casos (la mayoría, en la realidad) la energía se disipa, por ejemplo por deformación permanente de los cuerpos después del choque, por radiación de energía... . Estos fenómenos disminuyen la energía cinética del sistema.

Cuando se disipa energía cinética durante el choque, obviamente la energía disponible para mover las masas es menor, en consecuencia la velocidad de separación de los cuerpos es menor (en módulo) que la velocidad inicial de aproximación. Un ejemplo recurrente, considera uno de ellos incrustado en el otro después del choque, como bajo estas condiciones no se separan, la velocidad relativa es nula.

Para incluir estos casos, basta generalizar la ecuación IX.6 incluyendo un factor, que llamamos coeficiente de restitución y lo designamos con el símbolo **e**, y que puede tomar los valores: $0 \leq e \leq 1$. Usando este parámetro, generalizamos la ecuación IX.6

$$\mid V_1' - V_2' \mid = \mathbf{e} \mid V_1 - V_2 \mid, \qquad \text{(IX.8)}$$

donde:

Si **e = 1 es un choque elástico**, se conserva la energía cinética durante el choque.

Si **e = 0 es choque totalmente inelástico**, no se conserva la energía cinética y ambos cuerpos permanecen unidos después del choque.

Obviamente los dos casos mencionados son los casos extremos, existe una gama de situaciones que son consideradas con el rango de los distintos valores que puede adoptar el parámetro **e**.

El valor de **e** es un dato proveniente de los experimentos realizados. En general es un dato del problema.

De esta forma las bases para estudiar los choques elásticos e inelásticos están establecidas. Corresponde aplicar este formalismo.

IX.2.2. Resumen de las Ecuaciones Relevantes

$$
\begin{array}{l}
\text{CHOQUE} \\
\text{ELÁSTICO}
\end{array}
\Rightarrow
\left\{
\begin{array}{l}
\bullet \text{ CONSERVACIÓN DEL MOMENTUM} \\[1em]
\qquad m_1\,V_1 + m_2\,V_2 \;=\; m_1\,V_1' + m_2\,V_2'. \\[1em]
\bullet \text{ CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA} \\[1em]
\qquad \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V_2'^2, \\[1em]
\qquad \text{o } \; (V_1 - V_2) = -(V_1' - V_2')
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{CHOQUE} \\
\text{INELÁSTICO}
\end{array}
\Rightarrow
\left\{
\begin{array}{l}
\bullet \text{ CONSERVACIÓN DEL MOMENTUM} \\[1em]
\qquad m_1\,V_1 + m_2\,V_2 \;=\; m_1\,V_1' + m_2\,V_2'. \\[1em]
\bullet \text{ COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN e} \\
\qquad |V_1 - V_2| \;=\; e\,|V_1' - V_2'|\,.
\end{array}
\right.
$$

IX.3. Ejemplos

IX.4. La Velocidad del Centro de Masa

A continuación, utilizando un poco de álgebra modificaremos las expresiones anteriores para hacer aparecer lo que se conoce como el centro de masa. El centro de masa es un punto matemático que representa al sistema y que no se altere por el choque. Antes y después del choque este punto viaja con la misma velocidad.

El centro de masa es un punto que representa -en este caso-, el sistema de dos partículas. Es fácil ver cómo se puede generalizar al caso de muchos cuerpos puntuales. Este es un primer paso hacia la descripción de un cuerpo extendido.
La velocidad del centro de masa es el promedio de las velocidades de todas las partículas consideradas, donde el factor de peso utilizado para obtener el promedio es la masa de cada uno de los puntos.

De vuelta a las ecuaciones obtenidas para $\mathbf{V}_1'$ y $\mathbf{V}_2'$, obtenemos, respectivamente

$$V_1' = \frac{(m_1 V_1 + m_2 V_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(V_2 - V_1),$$

$$V_2' = \frac{(m_1 V_1 + m_2 V_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2),$$

definiendo la velocidad del centro masa a partir de estas ecuaciones, tenemos

$$V_1' = V_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_{\text{rel}}, \tag{IX.9}$$

$$V_2' = V_{CM} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{\text{rel}}. \tag{IX.10}$$

Podemos comprobar que

$$m_1 V_1' + m_2 V_2' = (m_1 + m_2) V_{CM} = m_1 v_1 + m_2 V_2$$

Esta expresión se puede simplificar mediante un poco de álgebra

$$V_1' = V_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(V_2 - V1) + \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

y reordenando, tenemos

$$V_1' = V_{CM} + \frac{m_2 v_2 + m_1 V_1}{m_1 + m_2} - \frac{(m_1 + m_2) V_1}{m_1 + m_2} = 2\, V_{CM} - V_1 \tag{IX.11}$$

$$V_{CM} = \frac{1}{2}(V_1 + V_1') \quad \text{Análogamente} \quad V_{CM} = \frac{1}{2}(V_2 + V_2'). \tag{IX.12}$$

La velocidad del centro de masa (es el promedio de la velocidad inicial y final). Esto ocurre en un choque elástico, con conservación de la energía, y donde las masas conservan su identidad (no se dividen, por ejemplo).

Ejercicio (The Physics Teacher, Vol. 35, Nov. 1997)

Un cuerpo de masa M permanece en un plano horizontal. Esta superficie es rugosa y las caracterizamos por un coeficiente de fricción cinética. Si esta masa M se divide repentina y violentamente en dos fragmentos caracterizados por m y $(M - m)$. Los dos fragmentos resbalan en la misma dirección pero en sentidos opuestos, obviamente alejándose del punto de la explosión.

La explosión libera una energía E.

a.- Calcule el valor de la velocidad del centro de masa inmediatamente después del choque y **t** segundos después del choque

b.- Calcule en qué instante el momentum del centro de masa es máximo. Expréselo en función de la Energía E y la razón entre las masas, $\lambda \equiv \frac{M-m}{M}$

c.- Demuestre que la razón entre las distancias recorridas por cada una de las masas $\dfrac{d_1}{d_2} = \lambda^2$

d.- Utilizando el resultado obtenido para el valor máximo del momentum del centro de masa (parte b), calcule para qué valor de λ el momentum alcanza su máximo valor.

IX.4.1. Choques en dos dimensiones

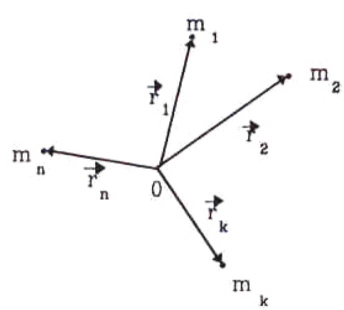


Figura IX.3:

Analicemos brevemente qué sucede con un choque de dos partículas puntuales en un plano. El desarrollo en este caso es idéntico al realizado anteriormente salvo una diferencia: las ecuaciones son vectoriales.

La conservación del momentum genera dos ecuaciones. La conservación de la energía, una ecuación adicional. En total, para el *choque elástico* tenemos tres ecuaciones, de esta forma podemos calcular una velocidad con sus dos componentes y una componente de la otra velocidad, o sólo su dirección, por ejemplo, pero no su magnitud.

Supongamos ahora un *choque inelástico*. Del párrafo anterior, sabemos que hay dos ecuaciones a nuestra disposición. Para poder resolver un problema de este tipo (choque entre dos partículas) debemos conocer, además de los vectores velocidad de las dos partículas con su dirección y magnitud, el vector velocidad de una de las partículas *después del choque*.

A continuación, procedemos a calcular el valor de la velocidad de la partícula restante, con estos datos.

El momentum se conserva en cada una de las dimensiones en forma independiente. Esto es:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_3 + m_2 \cdot \vec{v}_4,$$

la cantidad a la izquierda del signo igual, representa $\vec{P}_i$, el momentum inicial. $\vec{P}_f$ representa el momentum final, después del choque. De aquí tenemos:

$$\vec{v}_4 = \frac{1}{m_2}[m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_3) + m_2 \cdot \vec{v}_2]$$

Ejemplo

Dos masas M y m descansan sobre un piso sin roce y están *apoyadas (no unidas)* al resorte de constante k y largo natural L_0.

Inicialmente el resorte se comprime un largo x_0 manteniendo las masas pegadas a su extremo. Repentinamente se libera el sistema y las masas M y m salen disparadas en direcciones opuestas.

Calcular la velocidad final de cada una de las masas.

Como no existe roce en el piso y se trata de un resorte ideal, se conserva la energía.

Nota: El peso *no* realiza trabajo, porque:

$$\Delta W|_A^B = M\,\vec{g} \cdot \Delta\vec{x} = 0, \qquad \text{puesto que,}$$

$$\Delta\vec{x} \cdot \vec{g} = |\Delta\vec{x}| \cdot |\vec{g}| cos\ 90^\circ = 0.$$

De esta forma, aquí co–existen sólo dos tipos de energía, la energía cinética de cada una de las masas M y m y la energía potencial del resorte.

Si la energía del sistema se conserva, debemos calcularla en algún instante en que sea particularmente fácil.

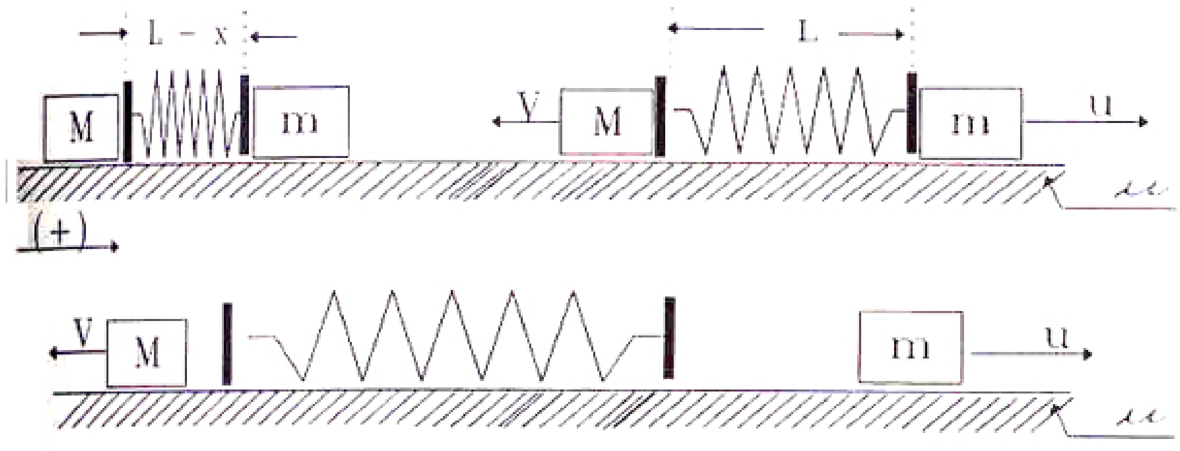


Figura IX.4: El resorte está inicialmente comprimido, al soltarlo empuja ambas masas con la misma fuerza, por lo tanto aquella con menor masa adquiere más velocidad. El resorte y las placas que empujan a la masa tienen una masa despreciable comparada con m y M.

En este caso conviene evaluar la constante E_0, justo en el momento en que se liberan las masas. Su valor es:

$$E_i = \frac{1}{2}k \cdot {x_0}^2 = E_0,$$

ya que en ese instante ambas están en reposo. Como E_0 se conserva a lo largo de la trayectoria, es válido considerar el otro punto de referencia donde más nos convenga. Este punto resulta ser el instante cuando el resorte adquiere por primera vez su largo natural L_0. En ese punto los extremos del resorte tienen su máxima velocidad, puesto que a continuación el largo será mayor que el natural y aparece instantáneamente una fuerza $(-kx)$ que comienza a frenar el extremo del resorte. Por otra parte las masas M y m *no están atadas* al resorte y por tanto una vez que adquieren la velocidad máxima del resorte, *continúan* con la misma velocidad, porque no hay roce con el piso.

En el instante en el cual el resorte alcanzó su largo natural L_0 la energía E_f es [**??**]

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{1}{2}\, M\, V^2 + \frac{1}{2}\, m\, u^2 + 0, \text{ pero como:} \\ E_i &= \frac{1}{2}\, k\, x_0^2, \\ \text{y la energía se conserva } &\Rightarrow E_i = E_f, \\ \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\, k\, x_0^2 &= \frac{1}{2}\, M\, V^2 + \frac{1}{2}\, m\, u^2. \end{aligned}$$

Tenemos dos incógnitas V y u, y una sola ecuación. La otra ecuación que necesitamos proviene de la segunda y tercera ley de Newton. En la dirección horizontal se cumple:

$$M\,\frac{\Delta\,V}{\Delta\,t} = F_1, \qquad \text{segunda ley de Newton para la partícula M,}$$

$$m\,\frac{\Delta\,u}{\Delta\,t} = F_2, \qquad \text{segunda ley de Newton para la partícula m,}$$

$$m_{\text{resorte}}\,\frac{\Delta v}{\Delta t} = -F_1 - F_2, \qquad \text{segunda ley de Newton para el resorte.}$$

En la última ecuación, pusimos $-F_1$, y $-F_2$, como las fuerzas actuando sobre el resorte, utilizando el principio de acción y reacción en cada uno de los puntos de contacto con las masas m y M.

Como la masa del resorte es despreciable comparada con las masas m y M, esta última ecuación se transforma en:

$$0\,\cdot\,\frac{\Delta v}{\Delta t} \equiv 0 = F_1 + F_2.$$

Sumando las dos ecuaciones de movimiento de m y M y reemplazando este último resultado, obtenemos:

$$M\,\frac{\Delta\,V}{\Delta\,t} + m\,\frac{\Delta\,u}{\Delta\,t} = 0.$$

Como esta ecuación es válida en todo instante, designemos A y B como dos instantes de tiempo arbitrarios, con $\Delta\,t = t_B - t_A$, entonces:

$$\begin{aligned}
M\,\frac{[V_B - V_A]}{\Delta t} + m\,\frac{[u_B - u_A]}{\Delta t} &= 0, \\
M\,[V_B - V_A] + m\,[u_B - u_A] &= 0, \quad \text{ordenando,} \\
M\,V_B + m\,u_B = M\,V_A + m\,u_A, & \qquad \text{para cualquier punto A y B,} \\
\text{de este modo se tiene que:} & \\
M\,V + m\,u &= \text{constante.}
\end{aligned}$$

Como en nuestro caso, ninguna de las masas tenía velocidad en el instante inicial, entonces la constante es igual a cero:

$$M\,V + m\,u = 0.$$

Esta es la segunda ecuación que necesitábamos para resolver el problema.

Nota:

Este es un resultado general y como tal tiene un nombre: se denomina *conservación del momentum*. Cada vez que no existan fuerzas externas actuando sobre el sistema, la siguiente expresión permanece constante:

$$\sum_{i=1}^{N} M_i\, V_i = \text{constante}, \tag{IX.13}$$

M_i identifica a cada una de las masas del sistema y V_i su velocidad respectiva.□

Volviendo a nuestro problema inicial, los datos eran: M, m, x_0 y k, las incógnitas V y v. Disponemos de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} M\,V^2 + m\,u^2 &= k\,x_0^2, \quad (1) \\ M\,V + m\,u &= 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones se obtiene:

$$u = \pm\sqrt{\frac{M}{m(M+m)}\,k\,x_0^2}, \tag{IX.14}$$

$$V = \mp\sqrt{\frac{m}{M(M+m)}\,k\,x_0^2}. \tag{IX.15}$$

Si u se desplaza en el sentido positivo del eje horizontal, entonces V se mueve en el sentido negativo. De esta forma elegimos los signos correspondientes a cada uno de los movimientos de M y m.

Podemos verificar estos resultados comparando con una situación real de la vida diaria: supongamos que la masa M es muy grande, por ejemplo, que este ejercicio representa en realidad un resorte apoyado en una pared de masa M, en cuyo extremo opuesto hemos comprimido una masa m. Por experiencia sabemos que al soltar el resorte la masa m sale disparada y M se queda en su mismo lugar. En las ecuaciones, este caso se representa como $M \to \infty$. Reemplazando este valor en las expresiones de la velocidad tenemos:

$$u^2 \approx \frac{1}{m}\,k\,x_0^2, \qquad V^2 \approx \frac{m}{M^2}\,kx_0^2 \approx 0.$$

□

Ejemplo

Suponga un choque *perfectamente elástico* entre la masa m que se acerca por la izquierda con velocidad V_0 y la esfera, idéntica en tamaño, pero de masa M que se encuentra detenida antes del choque.

Calcule la velocidad de ambas después del choque.

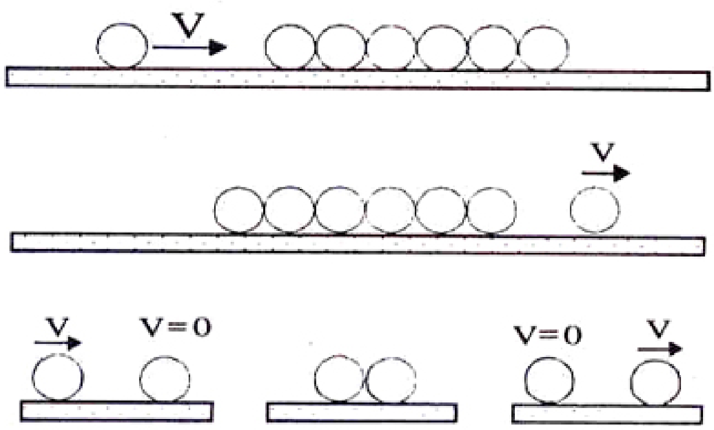


Figura IX.5: Todas las masas son iguales y perfectamente elásticas. Al chocar, la bola que avanza por la izquierda queda en reposo y la última recupera la velocidad incidente. En el texto se analiza el caso más simple del choque de dos bolas en una dimensión.

El afirmar que el choque es perfectamente elástico es otra forma de decir que la energía se conserva en este proceso.

Como se conserva la energía y el momentum, tenemos dos ecuaciones. A la izquierda de estas ecuaciones escribimos el momentum (y la energía) justo antes del choque y a la derecha justo después del choque:

$$m\,V_0 = m\,u_0 + M\,v \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}\,m\,V_0^2 = \frac{1}{2}\,m\,u_0^2 + \frac{1}{2}\,M\,v^2. \qquad (2)$$

Elevando al cuadrado la primera ecuación y reemplazándola en la segunda, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left(u_0 + \frac{M}{m}\,v\right)^2 &= u_0^2 + \frac{M}{m}v^2, \\
u_0^2 + 2\frac{M}{m}\,v\,u_0 + \left(\frac{M}{m}\right)^2\,v^2 &= u_0^2 + \frac{M}{m}\,v^2, \\
2\,u_0 + \left(\frac{M}{m}\right)\,v &= v, \\
u_0 &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{M}{m}\right)\,v.
\end{aligned}$$

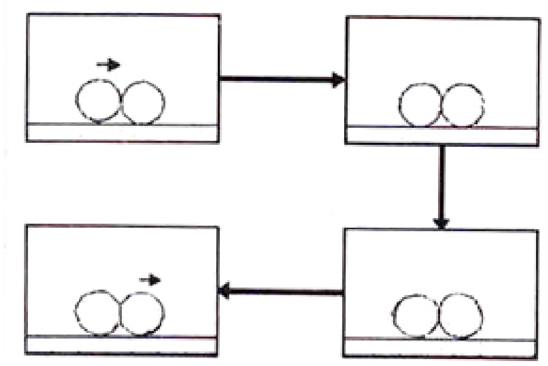


Figura IX.6: *El diagrama indica cualitativamente cómo se transmite el momentum. La fuerza de acción empuja a su vecina y la de reacción frena a la incidente. Como la energía se conserva las esferas no vibran, no aumentan su temperatura ni quedan deformadas.*

Finalmente notamos que si $m = M$, entonces $u_0 = 0$: es decir, la masa que venía con velocidad V_0 se detiene y la masa M, que se encontraba inicialmente en reposo, adquiere toda la velocidad V_0.

IX.4.2. Choque inelástico

Ocurre cuando la energía no se conserva durante el choque.

Existe un tipo de choque que se aparta del caso anterior, se caracteriza porque ambas partículas permanecen unidas después de colisionar. Cuando esto ocurre, existe sólo una velocidad por determinar en el problema y ésta se puede calcular a partir de la conservación de momentum que, como hemos enfatizado, siempre se conserva .

Este último tipo de choque se denomina *totalmente inelástico*. Queda caracterizado por provocar una *deformación permanente* de uno (o ambos) de los objetos participantes. Para ilustrar esta idea analizaremos el caso del choque totalmente inelástico de dos bloques, infinitamente rígidos, separados por un trozo de plasticina. El comportamiento final es que ambos cuerpos continúan viajando unidos. La plasticina se encarga de absorber la deformación mencionada y también de evitar la separación de las dos masas después del choque.

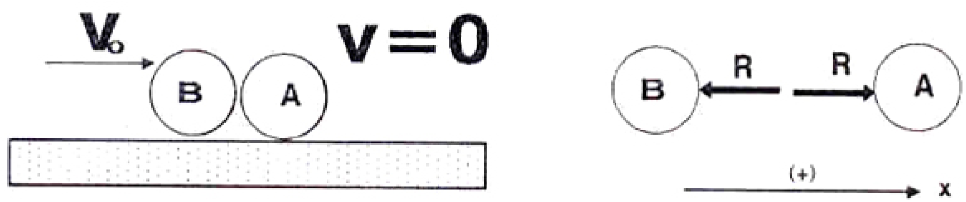


Figura IX.7: *Durante el choque sólo actúan fuerzas internas, de acción y reacción entre las dos masas que se anulan mutuamente. A partir de este resultado se demuestra que el momento total, es decir, la suma del momentum de cada una de las partículas permanece constante durante la colisión.*

En la Figura [IX.7], la fuerza $-R$ indica la reacción de la masa M_A sobre M_B y R la acción de M_B sobre M_A. El sentido que se les dió a los vectores, obedece la tercera ley de Newton. Aplicando, la segunda ley de Newton y considerando sólo el eje x, tenemos:

$$
\begin{aligned}
M_A \cdot a_A &= +R, \\
M_B \cdot a_B &= -R, \\
\text{sumando ambas ecuaciones:} & \\
M_A \cdot a_A + M_B \cdot a_B &= 0. \qquad \text{(IX.16)}
\end{aligned}
$$

Suponiendo ambas masas iguales ($M_A = M_B$), con el único objeto de simplificar el algebra, tenemos que $a_A + a_B = 0$.

La aceleración de uno de los cuerpos es exactamente igual a la desaceleración del otro durante el choque. Como uno de ellos tiene velocidad inicial distinta de cero (v_0), el cuerpo B avanza más rápidamente que A. Esto es posible sólo si la plasticina comienza a deformarse, como se aprecia en el gráfico de velocidad *versus* tiempo de cada una de las partículas.

Hemos achurado el área velocidad vs. tiempo en el primer intervalo Δt. Como sabemos, esta área representa el espacio recorrido por cada uno de los objetos.

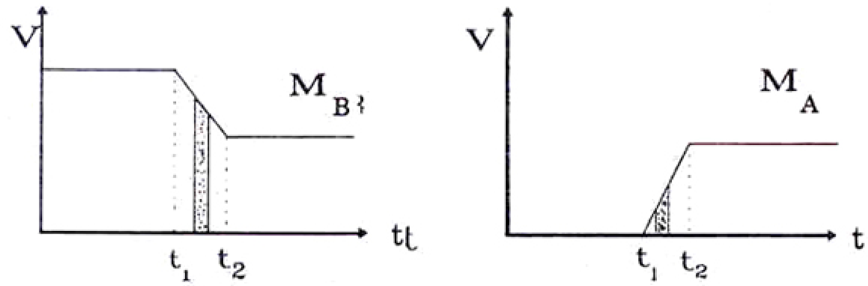


Figura IX.8: *El área achurada corresponde al camino recorrido, en el mismo intervalo de tiempo, por ambos objetos durante el choque. La diferencia en el valor del área corresponde a la deformación que sufren los cuerpos.*

Se ve de inmediato que M_B recorre una distancia mayor que M_A y por lo tanto la plasticina se deforma. Esta se debe deformar hasta el instante t_2, a partir del cual las distancias recorridas por ambos cuerpos son las mismas y por lo tanto viajan a la misma velocidad.

Calculemos el valor de la velocidad $\bar{v}$ del sistema M_A y M_B. La masa M_B avanza con velocidad v_0 sobre M_A. El piso **no** tiene roce y por lo tanto no existe ninguna fuerza horizontal (dirección x).

Reformulamos la ecuación [IX.16] de forma que aparezca el momentum de ambas partículas explícitamente:

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta t} \equiv \frac{P_f|_x - P_i|_x}{\Delta t} = 0,$$

donde $P_x \equiv (P_A + P_B)$. El momentum total del sistema es la suma del momentum de cada una de las partículas. Esta es una suposición que no parece contradecir los resultados experimentales.

$P_f|_x$ representa el valor del momentum de ambas partículas después del choque: $P_f|_x = P_{A+B}$, puesto que viajan juntas.

De esta última ecuación obtenemos:

$$\Delta P_x \equiv [P_f|_x - P_i|_x] = 0. \tag{IX.17}$$

Antes del choque, la cantidad de movimiento era:

$$(P_i)_x = M_B \cdot v_0 + M_A \cdot 0.$$

Después del choque,

$$(P_f)_x = [M_B + M_A]\,\bar{v}.$$

Usamos la definición de un choque *totalmente inelástico: las dos partículas quedan unidas en el choque y posteriormente se mueven con la misma velocidad*. Esta situación es un caso especial. Lo usual es que las partículas después del choque se separen y viajen a velocidades diferentes.

Por la conservación del momentum,

$$M_B\,\bar{v} + M_A\,\bar{v} = M_B\,v_0$$

$$\bar{v} = \frac{M_B}{M_A + M_B}\cdot v_0.$$

Si $M_B \to \infty$, entonces $\bar{v} = v_0$, como era de esperar de acuerdo a lo que se observa en la vida diaria. Si un camión muy pesado colisiona con un auto pequeño, el primero casi no se afecta por el choque.

Otro caso límite ocurre cuando $M_B \to 0$, la velocidad $\bar{v} \to 0$, que es lo que sucede al tirar un pedazo de plasticina contra un objeto mucho más pesado. En realidad, cuando indicamos que M_B tiende a cero, físicamente estamos indicando que M$_A$ es mucho mayor que M$_B$. El concepto de grande o pequeño en física es relativo.

Analicemos lo que sucede paso a paso durante el choque totalmente inelástico.

Choques de Masas Idénticas

Absolutamente Inelástico	$\longleftrightarrow$	Elástico
Las dos masas viajan unidas despues del choque.		Una masa se detiene y la otra obtiene la velocidad de la primera.

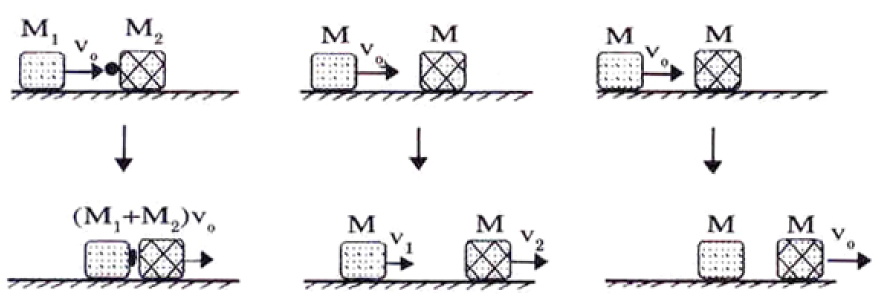


Figura IX.9: *Se ilustra la diferencia entre un choque elástico y uno inelástico entre dos masas iguales. La línea superior indica la situación antes del choque y la inferior el movimiento después del choque. El momentum se conserva siempre, en todos los choques.*

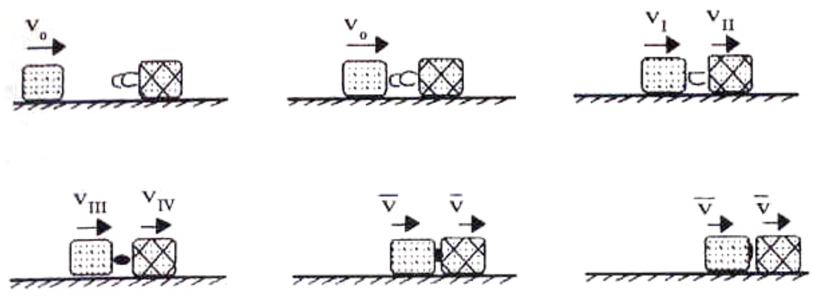
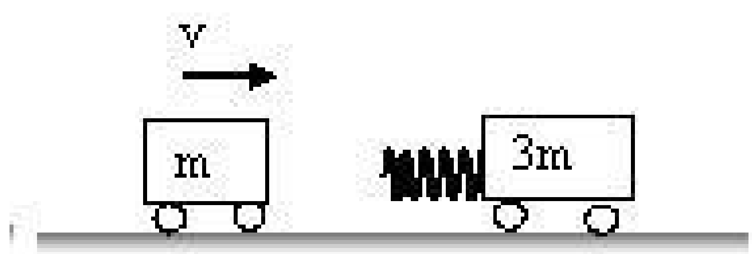


Figura IX.10: *Aquí se detalla, en etapas, lo que sucede durante un choque inelástico. En este choque hay un material que se deforma permanentemente absorbiendo parte de la energía del sistema. En consecuencia no hay conservación de la energía en este tipo de choques.*

Ejemplo

Un carrito de masa m se acerca por la izquierda y choca con otro de masa $3\,m$. Hay un resorte de constante k, largo natural ℓ y masa nula, que transmite y absorbe el impacto entre los carros y que siempre permanece unido al más masivo.

a.- ¿Cuál es la rapidez del carro más masivo $(3m)$, en el instante que el resorte alcanza su máxima compresión? Ojo, piense bien qué significa físicamente para ambos carros que el resorte está en su máxima compresión.



b.- ¿Cuál es la velocidad final que alcanza el carro mayor después que ha transcurrido suficiente tiempo después del choque? Suponga que la energía se conserva. Recuerde que la masa del resorte es nula y que las masas no están ni quedan ligadas al resorte después del choque.

c.- ¿Cuál es la velocidad del carro mayor si el choque es totalmente inelástico (ambas quedan unidas)? Para este efecto, suponga que el resorte se comprime un largo Δ y no recupera su forma inicial, ni prosigue deformándose y engancha ambas masas.

- a.- En el instante de máxima compresión, la velocidad de ambos carros es la misma.

¿Por qué? Unos segundos antes, el resorte aún está expandiéndose. Unos segundos después de la máxima extensión, se está comprimiendo. Por ende, en el instante de máxima compresión tiene velocidad relativa nula, luego ambos carros se mueven con igual velocidad.

Como el momentum se conserva si no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, entonces

$P_i = P_f$ de modo que: $mv_0 = (m{+}3m)v_{CM}$. Despejando obtenemos $v_{CM} = \frac{1}{4}v_0$.

- b.- No. El momentum se conserva durante este choque.

- c.- La conservación del momentum es: $mv_0 \;=\; m\,v_1 + 3\,m\,v_2$.

Por otra parte, la conservación de la Energía es $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{3m}{2}v_2^2$.
Manipulando estas ecuaciones obtenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} v_0 - v_1 &=& 3v_2 \\ v_0^2 - v_1^2 &=& 3v_2^2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rcll} v_0 - v_1 &=& 3v_2 & (1) \\ 3v_2(v_0 + v_1) &=& 3v_2^2 & \\ v_0 + v_1 &=& v_2 & (2) \end{array}$$

De la ecuación (1) y (2) obtenemos

$$2v_0 = 4v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2}v_0$$

$$2v_1 = v_2 - 3v_2 = -2v_2 = -v_0$$

$$v_1 = -\frac{1}{2}v_0$$

Comprobar la Ec. de la energía:$\frac{1}{2}m(\frac{1}{2}v_0)^2 + \frac{3m}{2}(\frac{v_0}{2})^2$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{3m}{8}v_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2$$

- d.- Es la misma respuesta que a.

IX.5. Ejemplos con Masa Variable

En las secciones anteriores estudiamos las consecuencias de un choque como un evento único en la trayectoria de las dos partículas involucradas.

Ahora estudiaremos el caso donde ocurre una sucesión de choques. Un caso típico es aquel donde la masa de un sistema varía (aumenta o disminuye) en el tiempo en forma regular.

Ilustraremos este caso con dos ejemplos. Uno es una correo transportadora sobre la cual se va depositando material y nos interesa saber qué fuerza debemos ejercer para mantener su desplazamiento con velocidad constante. El otro es una cadena que inicialmente mantenemos colgando con uno de sus extremos apenas tocando el piso. Repentinamente la soltamos. Nos interesa calcular la reacción del piso (bajo ciertas hipótesis que simplifican el problema) a medida que cada eslabón de la cadena cae y choca contra el piso.

Lo que calcularemos es una fuerza promedio. Suponemos que las masas se van depositando con regularidad en el tiempo y así transformamos estos choques individuales en un continuo.

Como la variación de la magnitud de la fuerza durante cada choque es imposible de analizar, modelaremos estos problemas a través de una fuerza promedio que actúa durante cada uno de los choques. Definiremos el Impulso, como la variación del momentum durante un coque que transcurre en un intervalo Δ t. Esto es lo mismo que suponer que existe una *fuerza promedio*, supuestamente constante durante el intervalo Δ t.

Si analizamos lo que sucede con la segunda ley de Newton en este caso, tenemos:

$$\vec{F}_{\text{impulsiva}} = \frac{\Delta\, \vec{p}}{\Delta\, t}. \tag{IX.18}$$

Otra forma que puede tomar la ecuación anterior es la siguiente:

$$\text{Impulso} \equiv \vec{\overline{F}}\,\Delta\,t = \Delta\,\vec{p} \equiv \vec{p}_{\text{después del choque}} - \vec{p}_{\text{antes del choque}}. \qquad \text{(IX.19)}$$

Debido a la regularidad que asociamos al cambio de masa, aparece un Δ t a la derecha de la ecuación que simplificamos con el indicado a la izquierda de la ecuación y obtenemos la fuerza promedio buscada.

Ejemplo

En una correa transportadora se están depositando Q kg/s. ¿Cuál es el valor de la fuerza que debemos aplicar en los extremos para mantener constante la velocidad V de esta correa?

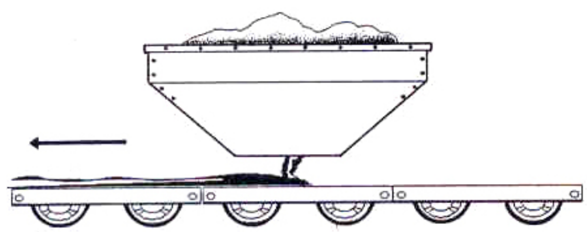


Figura IX.11: Suponemos que la correa es plana y que constantemente está aumentando el material depositado sobre ella. La correa se desplaza hacia la izquierda.

Usamos la expresión para la fuerza impulsiva [IX.19]:

$$F = \frac{p_{\text{después del choque}} - p_{\text{antes del choque}}}{\Delta\,t}\ ,$$

como la velocidad V de la correa, permanece constante, la variación del momentum proviene del aumento de masa en la correa. La diferencia entre el momentum final e inicial es:

$$\{m + \Delta\,m\}\,V - m\,V = \Delta\,m\,V = Q\,\Delta\,t\,V,$$

reemplazando en la primera ecuación y simplificando por $\Delta\,t$, tenemos:

$$F = Q\,V.\square$$

Ejemplo

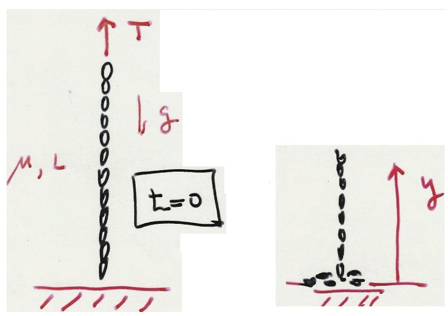
Consideremos la siguiente situación: dejamos caer una cadena de largo **L** cuya masa por unidad de largo es μ. Se pide calcular la reacción del piso a medida que va cayendo la cadena. Suponemos que cada eslabón choca directamente con el piso y no es perturbado por los eslabones que cayeron previamente.

Se sostiene una cadena de forma que apenas toca la plataforma de una balanza. Se pide calcular la reacción de la balanza sobre la cadena a medida que ésta se deposita, eslabón a eslabón sobre la plataforma.

Note que la reacción de la paltaforma es proporcional a lo que se mide el resorte. Suponemos que la masa de la plataforma es grande comparada con la masa de la cadena y de esta forma **no** vibra.

que cada eslabón viaja en forma independiente. La velocidad con la cual llega al piso depende de su posición inicial.

Diagrama de cuerpo libre de **un eslabón** de la cadena.



$$\begin{aligned} v_i &= 0 & v^2 &= 2g(h-y) \\ v_f &= ? & F_{\text{ext}} &= \frac{\Delta P_{CM}}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$F_{\text{ext}} = \frac{\Delta P_{CM}}{\Delta t}$$

$$\Delta P_{CM} = P_f - P_i = (M(t) - \mu \Delta y)v - M(t)v$$

El choque es instantáneo.

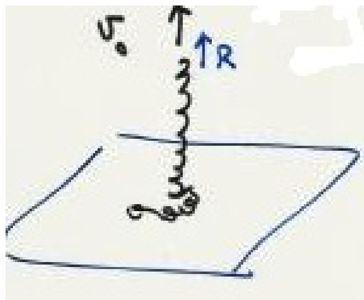
$$\begin{aligned} P_{CM} &= -\mu \Delta y\, v \\ \frac{\Delta P_{CM}}{\Delta t} &= -\mu \frac{\Delta y}{\Delta t} v &= +\mu\, v^2 \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} < 0 \end{aligned}$$

Para detener un eslabón se debe aplicar la fuerza externa

$$F_{\text{ext}} = R = \mu\, v^2$$

(reemplazando v) $\Rightarrow = +2g\,\mu(L-y)$

Le sumamos la fuerza que mantiene en reposo el tramo



$$\mu g(L-y)$$

$$\Rightarrow\; R = 3\mu\, g(L-y)$$

Evalúe la fuerza R que debe aplicarse en el extremo de la cadena de manera que se eleve con una velocidad constante v_0.

Respuesta:

$$F = \mu\, v(v + gt)$$

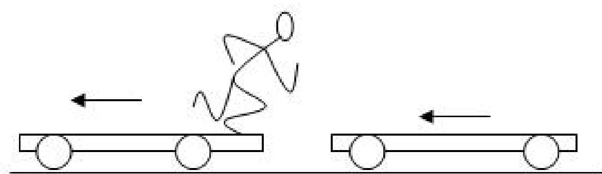
Explicación:

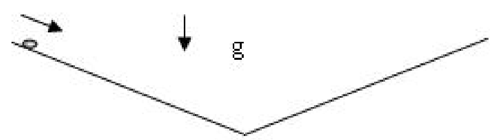
$\mu\, v^2$ es la fuerza necesaria para elevar un eslabón v y comunicarle la velocidad.

$\mu\, v\, gt = \mu(v \cdot t)g$, es la fuerza necesaria para sostener la masa de la cadena.

IX.6. EJERCICIOS

1.– Dos carros idénticos, cada uno de masa **M**, viajan con la misma rapidez **V**. Por esta razón, a pesar de no estar unidos, se trasladan sin que cambie la distancia que los separa. En cierto instante un hombre de masa **m**, ubicado en el carro de la izquierda, se da impulso y salta hacia el segundo con una rapidez **u** relativa al carro posterior. A partir de estos datos, determine las velocidades que alcanzan ambos carros después que el hombre se ubicó y permanece en reposo en el segundo carro.





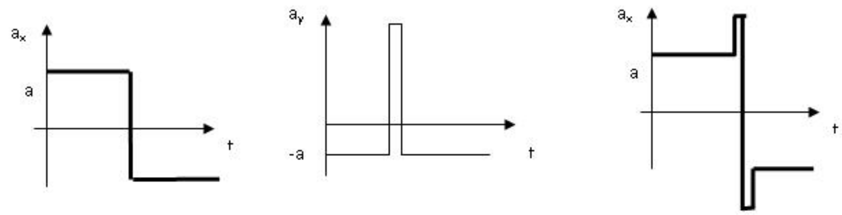
2.– En un alambre con roce despreciable y en forma de **V** abierta, se desplaza un aro. Para describir el movimiento de este aro, se proporcionan dos gráficos posibles para la aceleración en el eje-x versus tiempo y uno solo para la aceleración en el eje-y del movimiento del aro sobre el riel.

a.- Explique cualitativamente (sin números o ecuaciones) el significado de cada uno de los dos gráficos proporcionados y, en el caso del movimiento en el eje-x, señale cuál de ellos elige como el más adecuado para describir la trayectoria de la partícula. No se guíe por la escala de los gráficos para llegar a una elección. No está a escala.

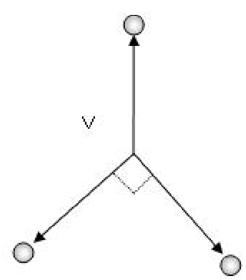
b.- Una vez realizada su elección, dibuje consistentemente (pero en forma cualitativa) los gráficos de velocidad vs. tiempo y posición vs tiempo en el eje-x y en el eje-y. Justifique brevemente la apariencia de cada uno de los gráficos.

Nota: Este problema tiene varias interpretaciones dependiendo del modelo que uno considera para ilustrar el choque del aro al llegar al vértice del riel en V.

A propósito y en base a la discusión anterior, ¿Qué comentario le merece a Ud. el problema de una partícula deslizándose sobre un plano inclinado y que termina moviéndose en un plano horizontal? ¿Se deben considerar estos gráficos en ese caso?



3.– Un estudiante de masa **m** está sentado en una extremo de un bote de masa **M**. El mar está tranquilo y no hay viento. Al acomodarse, el estudiante realiza un movimiento brusco y la bolsa con la merienda, ubicada al otro extremo del bote, cae al mar. Al intentar recuperarla, camina hacia el otro extremo del bote -con una rapidez **V** respecto al bote. Si el largo del bote es **L** metros, ¿a qué distancia de la bolsa se encontrará este estudiante cuando alcance la otra punta del bote?

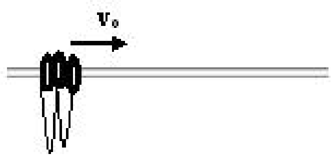


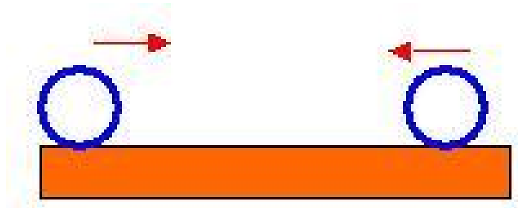
4.– Un petardo de masa **m**, inicialmente en reposo, explota dividiéndose en tres pedazos. Inmediatamente después de la explosión, las tres masas se mueven con la misma rapidez **V**, y dos de ellas lo hacen en direcciones perpendiculares entre sí. Si la masa de una de estas partículas es **m/4**, determine la masa de cada una las dos restantes.

5.– En un alambre sin roce se insertan tres aros de igual masa **m**. Los aros están unidos por un hilo sin masa e inextensible y no tienen grosor para los efectos que estudiamos en este problema. Inicialmente están todos juntos, como aparecen en la figura. Se procede a comunicar una velocidad $\mathbf{V}_o$ al aro que está a la derecha de los tres.

a.- Describa (sin ecuaciones) el movimiento del sistema. Suponga que los choques entre las masas y los tirones (por ende otra forma de choques) entre los aros conservan la energía.

b.- Haga un gráfico cualitativo (a mano alzada) de la *posición* versus *tiempo* para este sistema de partículas. Considere que al momento de chocar un aro con otros dos (choque frontal del último aro, por ejemplo) es equivalente a un choque con una partícula de masa **2 m**. En este caso, considere el choque como elástico. En el gráfico incluya el tiempo en el eje vertical.





6.– Dos esferas de igual masa **m** se mueven a lo largo del eje-x, pero en sentidos opuestos. La rapidez de cada una de ellas es $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$. En el choque frontal que ocurre, se disipa energía. Encuentre el máximo valor que puede tomar esta energía disipada. Calcule explícitamente este valor.

7.– Tres bloques se distribuyen uniformemente sobre la cubierta de una mesa de largo **L** y sin roce, como se indica en la Figura. Todos los choques que se describen a continuación son totalmente elásticos (normalmente se les denomina sólo elásticos y si no se da un valor para el parámetro **e**, se subentiende que es totalmente elástico.

a.- Considere el caso en que los tres bloques tienen la misma masa **m**. Si el bloque de la izquierda adquiere una velocidad **V** hacia la derecha, describa la situación después que todos los choques han sucedido: ¿cuántos bloques quedan sobre la mesa? ¿cuántos caen desde ella?

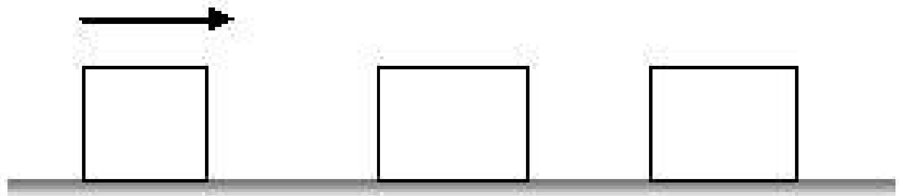
b.- Para el caso anterioro dibuje un gráfico de la posición de cada masa en el tiempo. Ubique el tiempo en la ordenada y la posición como abcisa.

c.- Considere el caso en que el valor de las masas comienza a aumentar proporcionalmente hacia la derecha: **m, 2m** y **3 m**. Nuevamente se le da una velocidad **V** al bloque de la izquierda y se quiere saber: ¿cuántos bloques quedan sobre la mesa? ¿cuántos caen desde ella?

d.- Suponga que hay **N** masas: **m, 2m, 3m, 4m**... sobre la mesa y se le comunica una velocidad **V** a la primera de la izquierda: ¿cuántos bloques quedan sobre la mesa? ¿cuántos caen desde ella?.

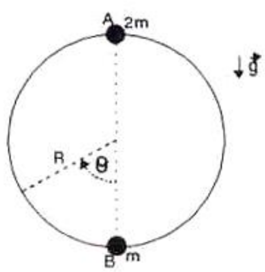
e.- Lo mismo que el caso c.- , pero con un cambio en la distribución de masas: **3 m, 2 m** y **m**. ¿depende la distribución final de velocidades del orden en la magnitud de las masas?

8.– Un péndulo está formado por una esfera **E** de masa **m**, unida a un extremo de una cuerda ideal cuyo otro extremo **O**, permanece unido a un pivote fijo ubicado a una altura **L** sobre el piso. Inicialmente la esfera permanece en posición horizontal (ver Figura). Desde allí. se suelta, a partir del reposo. Al llegar al punto más bajo de



su trayectoria choca con el bloque B, de masa desconocida, que se encuentra en reposo. Suponga que este choque se puede adaptar para que ocurra de dos formas: en una de ellas puede ser perfectamente elástico o, la otra alternativa es que sea perfectamente inelástico.

Considerando cada uno de estos casos, determine cuál debe ser el valor de la masa B, para que después del choque el péndulo alcance la misma altura en cualquiera de los dos casos posibles.
Note que en uno de los casos, ambas masas viajan separadas después del choque y en el otro, el choque inelástico, ambas se elevan unidas.



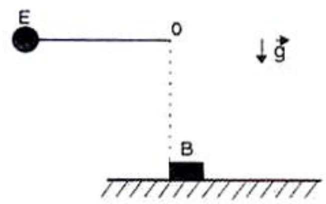


Figura IX.12: **Problema # 3** **Problema # 4**

9.– Un anillo de masa **2 m** se desliza por un aro circular pulido, de radio **R** ubicado en un plano vertical y que permanece fijo. Inicialmente parte del reposo desde el punto más alto **A**. Al llegar a **B**, choca elásticamente con una partícula de masa **m**.

Calcular el ángulo θ que alcanza a subir la masa $2\,m$, después del choque.

10.– Un sujeto de masa **M** se desliza con velocidad V_o sobre una superficie horizontal lisa ($\mu = 0$), en dirección a una pared contra la cual se estrellará. Cuando se encuentra a una distancia *apropiada*, lanza una pelota de masa **m** que llevaba consigo, en un desesperado intento por aminorar el impacto. Este infortunado logra lanzar la pelota con una *velocidad u_o, con respecto a su persona*. La pelota rebota elásticamente de modo que el sujeto la atrapa nuevamente justo antes de estrellarse.

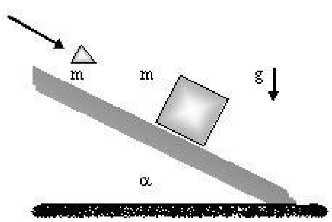
a.- Determinar la velocidad con que se estrella.

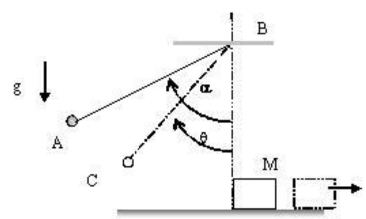
b.- Determinar el valor mínimo que debería tener u_o para evitar el impacto con la pared.

Nota: Suponga que la pelota, al ser lanzada viaja en línea recta en ambos tramos: ida y vuelta. Recuerde que la velocidad u_o está referida al sujeto y no al piso.

11.– Un bloque de masa **m** descansa en reposo sobre un plano rugoso inclinado. Para simplicar los cálculos, supondremos que el coeficiente de roce estático máximo es igual al de roce dinámico.

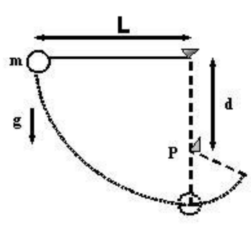
Se dispara un proyectil de igual masa **m**, el cual, al momento de incrustarse en el bloque viaja con una rapidez **V**, paralela al plano inclinado. Calcule la distancia que recorre el conjunto hasta detenerse. El ángulo del piso con la horizontal es α.





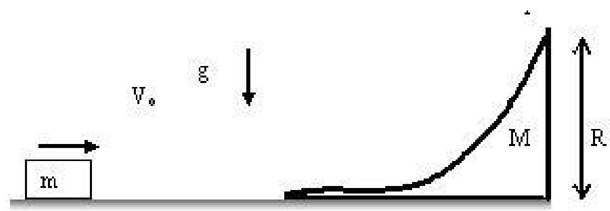
12.– Una esfera de masa **m**, está sostenida por una cuerda ideal de largo **L**, a un punto fijo **B** desde una cierta altura. La masa **m** se suelta (es decir, parte del reposo!!) desde el punto **A**, determinado por el ángulo α. Choca elásticamente con el bloque de masa **M** que permanecía en reposo sobre el piso. Si la esfera rebota hasta la posición **C**, determinada por el ángulo θ, encuentre el valor de la velocidad adquirida por **M** después del choque.

13.–



La cuerda de la figura tiene una longitud **L**, y la distancia a la clavija **P** desde este punto es **d**. Cuando la bolita se suelta desde el reposo en la posición mostrada, oscilará recorriendo el arco punteado. ¿Cuál será la velocidad de la esfera cuando llega al punto más bajo de su oscilación? ¿y cuando alcanza el punto más alto, una vez que la cuerda ha topado con la clavija?

Si la masa del péndulo logra dar una vuelta completa alrededor de la clavija fija, sin que el hilo se arruge, demuestre que la clavija se ubica en $d > 3L/5$.



14.– Un bloque de masa **M** con una superficie cóncava, permanece en reposo sobre una superficie lisa sin roce. Otro bloque de masa **m** y cuya velocidad es V_o, se acerca al bloque anterior y comienza a deslizarse y remontar sobre su superficie hasta alcanzar una altura **h**. Como no hay roce entre las superficies en contacto, ambos cuerpos se trasladan y adquieren un movimiento relativo entre ellos.

a.- ¿Cuál es la máxima altura sobre el piso que puede alcanzar la masa **m**? (Suponga que $\mathbf{V}_o$ es suficientemente pequeño para que así $h < R$).

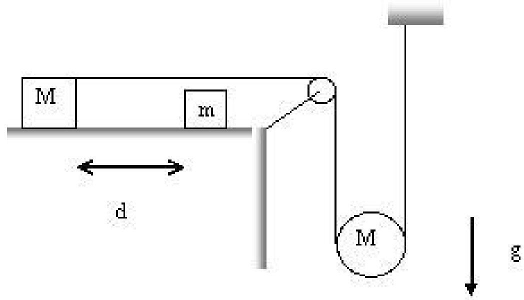
b.- Una vez alcanzada la máxima altura, el bloque más pequeño naturalmente se desliza cuesta abajo: ¿Cuál es la velocidad final de **M**, una vez que **m** abandona la superficie del bloque **M**?

c.- Considere las mismas condiciones iniciales planteadas en este problema, sólo que ahora la masa **m** choca elásticamente con **M** (imagine que M es otro bloque rectangular). Encuentre los valores de las velocidades después de ocurrido el choque y comente con respecto al resultado de la parte b).

15.– En el sistema de la figura aparecen dos masas **m** y **M** sobre una superficie sin roce. La masa **M** comienza a moverse desde el reposo. Inicialmente ambas masas se encuentran a una distancia **d** entre ellas. Si despreciamos el roce y no consideramos la masa de la cuerda:

a.- Calcule la velocidad de **M** justo antes de chocar con **m**.

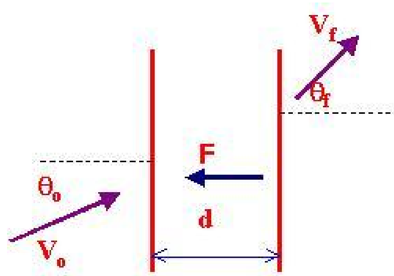
b.- Suponga que después del choque entre **M** y **m**, ambas continúan viaje unidas. Calcule el cambio de velocidad de la polea colgante y el cambio en la tensión de la cuerda en el instante del choque.



16.– En el espacio entre dos planos paralelos separados por una distancia **d**, existe una fuerza $\vec{F}$, constante y perpendicular a los planos, como aparece en la Figura. Considere una partícula de masa **m** que incide sobre el plano de la izquierda con una ángulo θ_i (con respecto a la normal al plano) y una velocidad $\mathbf{V}_o$.

a.- Si el ángulo al cual emerge la partícula, medido con respecto a la normal del segundo plano es θ_f, encuentre una relación entre los ángulos de incidencia y fuga.

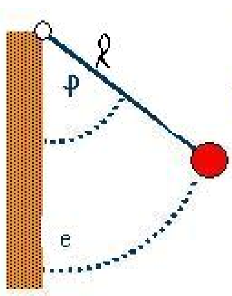
b.- Encuentre el valor mínimo del ángulo de incidencia θ_o para el cual la partícula no logra alcanzar el plano opuesto.

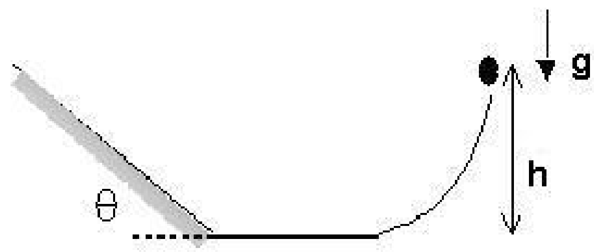


17.– Un péndulo de masa **m** y largo ℓ se suelta desde el reposo. El ángulo que hace la cuerda con la pared vertical al comienzo del movimiento es φ. La masa choca con la pared y rebota. Este choque es inelástico y está caracterizado por un coeficiente de restitución **e**. La velocidad inmediatamente después del rebote es $|V_f| = e\,|V_i|$, donde V_i es la velocidad con la cual llega la esfera a chocar con la pared. De acuerdo a la definición, $0 < e \leq 1$.

a.- Encuentre una relación entre los ángulos máximos φ_{k+1} y φ_k que forma la cuerda con la pared después del choque k-ésimo y $k+1$-ésimo.

b.- Si el ángulo inicial es mucho menor que la unidad, encuentre cuánto demora el péndulo en detenerse.



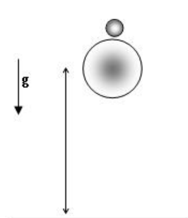


18.– Una masa se ubica a una altura **H** sobre el piso y sobre una superficie cóncava sin roce. Esta superficie se conecta -suavemente- a una superficie horizontal plana, sin roce. Esta última, a su vez, se conecta con un plano inclinado cuya superficie se caracteriza por un roce estático y cinético conocidos.

a.- Al soltar la masa desde la altura **H**, calcule la altura máxima que puede alcanzar sobre el plano inclinado.

b.- ¿Cuál debe ser el valor mínimo del ángulo θ para que la masa no se quede detenida después de alcanzar su altura máxima en el plano con roce? (Debe depender del valor del coeficiente de roce).

c.- ¿Puede describir, cualitativamente, cómo será el movimiento de la masa en el caso anterior, con el ángulo θ adecuado? Al seguir su movimiento, ¿Se detendrá alguna vez, o seguirá oscilando indefinitivamente?
Nota: No considere las posibles consecuencias proveniente de la arista en la juntura del plano inclinado y el piso horizontal.

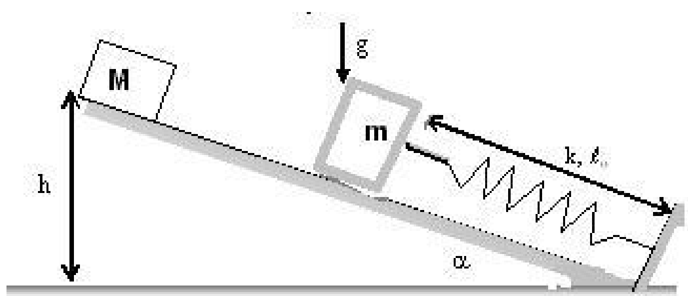


19.– Considere la siguiente situación: sobre una pelota de masa **M** y radio **R**, se ubica otra esferita de masa **m** mucho menor que la anterior y de radio despreciable. Ambas se dejan caer desde una altura **H**, como se indica en la figura. Suponiendo que el choque de la masa **M** con el piso y el de la masa **m** con la masa mayor, tiene -ambos-, un coeficiente de restitución e = 0,7, ¿Qué altura alcanza la masa **m** después del doble choque en el piso?

Suponga que las dos masas, al momento del choque, están separadas por una distancia ϵ, en el sentido utilizado por los matemáticos. Evitamos así considerar las fuerzas de interacción entre las masas y el piso simultáneamente durante el choque.

20.– Una masa M se desliza por un plano inclinado, sin roce y que forma un ángulo α con respecto al plano horizontal. La masa se suelta desde una altura vertical h, desliza hasta chocar inelásticamente ($e = 0$) con la masa m. Ésta se apoyaba en el extremo de un resorte caracterizado por k y ℓ_o. Después del choque ambas masas permanecen oscilando unidas.

a.- Calcule cuánto se comprime el resorte para sostener la masa **m**, cuando ésta se apoya en el resorte antes del choque con **M**. Calcule la energía potencial de esta masa. No olvide incluir el potencial gravitacional. El punto que Ud. determinó en esta pregunta es el nuevo punto de equilibrio de este oscilador.



b.- ¿Cuál es el valor de la velocidad de las masas **(m +M)** en el instante en que se enganchan y se comienzan a mover juntas comprimiendo el resorte?

c.- Este resorte oscilará alrededor de su *nuevo* punto de equilibrio (que no es el largo natural ℓ_o) ni el encontrado en la parte a.-. Encuentre este punto de equilibrio.

d.- ¿Cuál es la máxima rapidez que adquiere la masa M sobre el plano inclinado? ¿Donde ocurre esto: cuando desliza sobre el plano o cuando oscila con **m** atada al resorte?

e.- ¿Cuál es el valor de la amplitud de oscilación de este resorte y el valor de su fase ?

Bibliografía

[1] **Matter and Interactions I, Modern mechanics**, R. W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley and Sons,2007.

[2] **Understanding Physics**, K. Cummings, P. Laws, E. Redish, P. Cooney, John Wiley & Sons, Inc. 2004.

[3] **Física Universitaria**, Harris Benson, Compañía Editora Continental, S. A. de C., México, Primera reimpresión, 1996.

[4] **Newton Rules Biology**, C. J. Pennycuik, Oxford University Press, Oxford,1995.

[5] **Five easy Lessons**, Randall D. Knight, Addison Wesley, **2004**