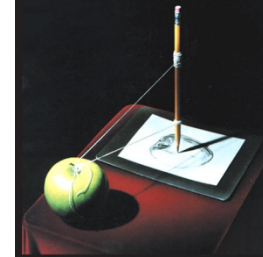
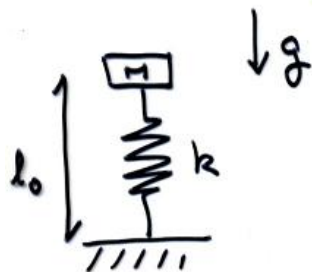


Introducción a la Física Newtoniana



Oscilador en un campo Gravitacional Constante



l_0 : Largo Natural
del resorte, sin
la masa M

l_0, k

Primer método

Uso de la 2ª Ley de Newton

- Tomo un sist. de coord. en el largo natural del resorte.



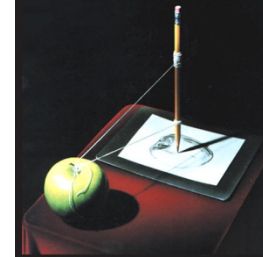
$$M \ddot{x} = -kx - Mg$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - g$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \left(x + \frac{g}{\omega_0^2} \right)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M}$$

Introducción a la Física Newtoniana



$$\left[\frac{g}{\omega_0^2} \right] = \frac{L}{T^2} \cdot \frac{1}{T^2} = L$$

$\frac{g}{\omega_0^2}$ Tiene dimensiones de LONGITUD

$$\frac{Mg}{k} = \frac{g}{\omega_0^2}, \quad Mg = kx_0$$

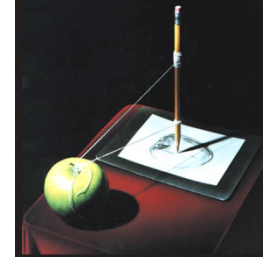
x_0 es lo que se hunde el resorte al soportar la masa M .

La 2ª Ec. de Newton se puede escribir, como:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 (x + x_0)$$

$$\text{con } x_0 = \frac{Mg}{k} = \text{Constante}$$

Introducción a la Física Newtoniana



si definimos

$$z \equiv x + x_0$$

$$\dot{z} = \dot{x} + 0$$

$$\ddot{z} = \ddot{x}$$

Luego

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z$$

ya conocemos esta restricción sobre la aceleración!

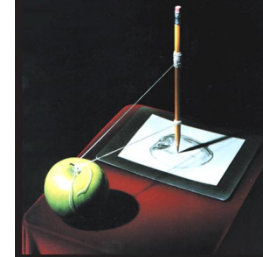
$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

De modo que

$$x(t) = -\frac{Mg}{k} + A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

MÁXIMA AMPLITUD: $x_{\max} = -\frac{Mg}{k} + A$

Introducción a la Física Newtoniana



Menor valor de $x(t)$:

$$x_{\text{menor}} = -\frac{Mg}{k} - A$$

Valor medio de la oscilación

$$x_{\text{medio}} = (x_{\text{mayor}} + x_{\text{menor}}) \frac{1}{2}$$

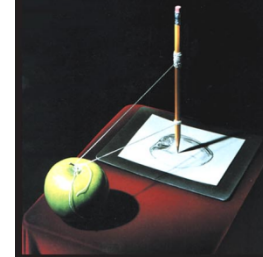
$$x_{\text{medio}} = -\frac{Mg}{k}$$

$\Rightarrow$ La masa oscila en torno al punto $x = -\frac{Mg}{k}$, con

Amplitud A y vel. angular ω

El oscilador NO se afecta por el campo gravitacional. SOLO oscila en torno a un nuevo punto de equilibrio.

Introducción a la Física Newtoniana



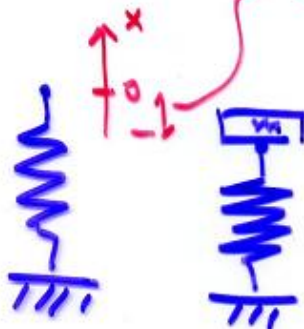
DCL



(+)

$$-mg - k\bar{x} = 0$$

$$\bar{x} = -\frac{mg}{k}$$



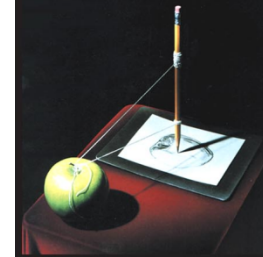
El signo (-)
indica que el
resorte baja

NOTA IMPORTANTE

El resorte en la masa tiene
un nuevo PUNTO de EQUILIBRIO

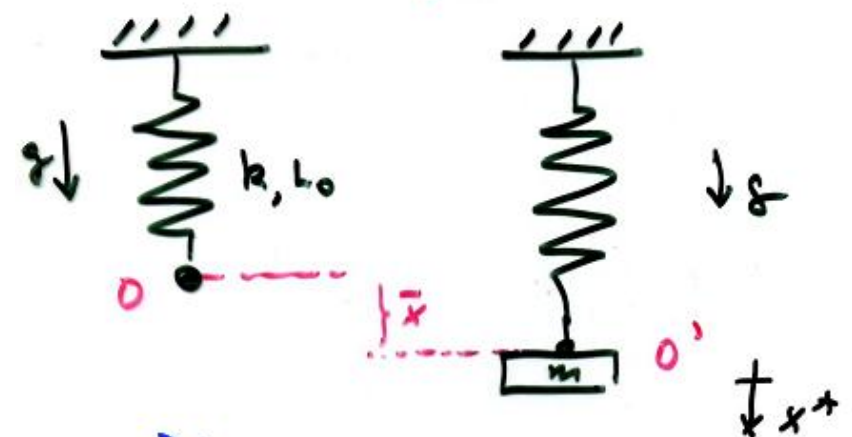
El resorte oscilará alrededor de
 $\bar{x}$, el nuevo pto. de equilibrio.

Introducción a la Física Newtoniana



Clase—17-A- NZ 2010

¿Qué sucede si ponemos al resorte colgando con la masa?



DCL



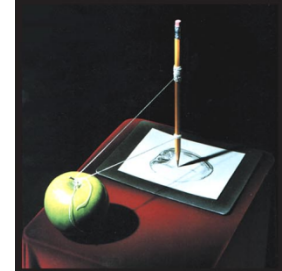
$$mg + F_R = 0$$

$$mg - k\bar{x} = 0$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{mg}{k}}$$

$0'$ es el nuevo punto de equilibrio para las oscilaciones de este resorte con la masa m suspendida.

Introducción a la Física Newtoniana



b) Supongamos que comprimimos el resorte (o lo alargamos) una distancia " a " y después lo "suelto".
¿Cuál es la velocidad angular ω ?
¿Cuál es la expresión para $x(t)$?

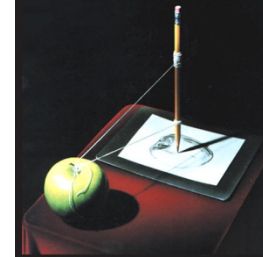
Note que la velocidad angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ en ambos casos.}$$

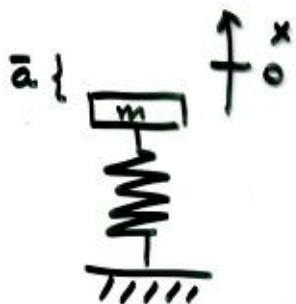
No depende de la amplitud " a " de la oscilación, de otra forma los relojes a "cuerda" nunca habrían existido !!

Este ω es la misma velocidad angular del Mov. Circunf. Uniforme utilizado para obtener esta solución.

Introducción a la Física Newtoniana



Calculemos ahora $x(t)$.



Como el nuevo
pto. de equilibrio
(en la masa m en
reposo) se ubica en
 0 , el resorte oscilará
en torno a dicho punto

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{t=0}$$

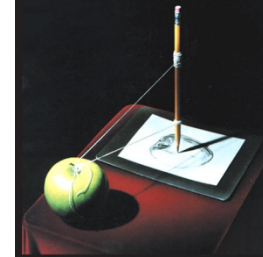
1) $x(0) = -\bar{a} \rightarrow$ HUNDO el
Resorte $\bar{a}$

2) $v(0) = 0 \rightarrow$ "Suelto" el
resorte (no
le doy un
impulso!)

1) $-\bar{a} = A \cos \phi$

2) $0 = -A\omega \sin \phi$

Introducción a la Física Newtoniana



Una solución

$$\phi = \pi$$

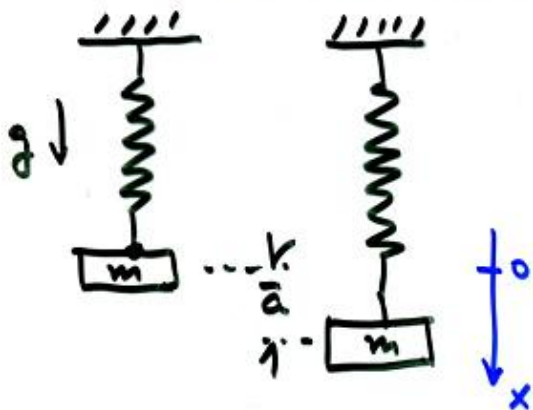
$$A = \bar{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi = \pi \\ A = \bar{a} \end{array} \right\} \underline{x(t) = \bar{a} \cos(\omega t + \pi)}$$

más elegante:

$$\boxed{x(t) = -\bar{a} \cos \omega t}$$

Veamos el otro caso:



$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

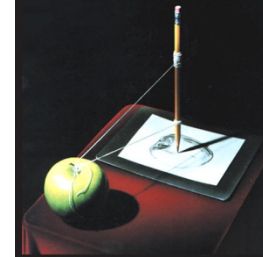
$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

condiciones
iniciales

$$x(0) = \bar{a}$$

$$v(0) = 0$$

Introducción a la Física Newtoniana

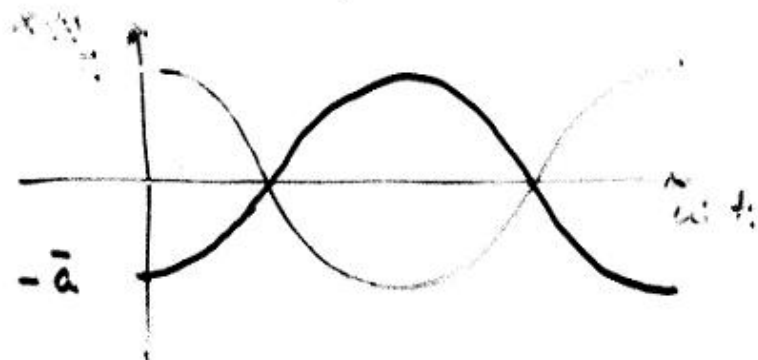


$$\begin{aligned} \vec{a} &= A \cos \phi \\ v &= -A \sin \phi \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi = \omega t \\ A = \vec{a}_0 \end{array} \right.$$

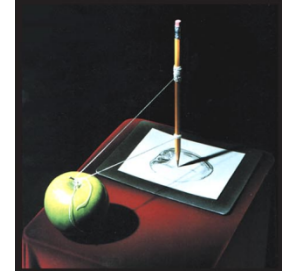
$$x(t) = \vec{a}_0 \cos \omega t$$

Ambos resortes oscilan en la misma vel. angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$

La diferencia de signo indica que en $t=0$ uno estaba comprimido y el otro elongado.



Introducción a la Física Newtoniana



¿Qué sucede con la energía?

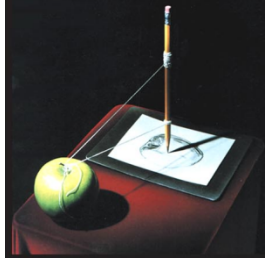
$$E_0 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k x^2 + M g x$$

donde consideramos el origen de la energía potencial gravitacional y elástica en $x=0$.

Como la solución $x(t)$ es una oscilación idéntica a la del oscilador sin el campo gravitacional, PERO en torno a otro punto, cuya coordenada es $x_0 = -\frac{Mg}{k}$,

Entonces la energía debe poder escribirse como $E = T + V$, donde V es la Energía Potencial de un oscilador armónico puro.

Introducción a la Física Newtoniana



Veamos cómo transformar la Energía para que esto suceda.

$$E_0 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k \left[x^2 + \frac{2Mg}{k} x \right]$$

Sumo una constante en ambos miembros de la ecuación de la Energía (OPERACIÓN: COMPLETAR el cuadrado)

$$E_0 + \left(\frac{Mg}{k} \right)^2 \cdot \frac{k}{2} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k \left[x^2 + \frac{2Mg}{k} x + \left(\frac{Mg}{k} \right)^2 \right]$$

$$E'_0 = E_0 + \left(\frac{Mg}{k} \right)^2 \cdot \frac{k}{2} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k \left[x + \frac{Mg}{k} \right]^2$$

Definiendo $z \equiv x + \frac{Mg}{k}$
tenemos:

Introducción a la Física Newtoniana



$$E'_0 = \text{Constante} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k z^2$$

$$V \equiv \dot{x} \equiv \dot{z}$$

(La velocidad no cambia)

Note que la Energía E'_0 es la Energía inicial E_0 , más la Energía elástica del resorte provocada por el hundimiento de la masa M .

$$V_0 = \frac{1}{2} k x_0^2, \text{ donde } x_0 = \frac{Mg}{k}.$$

La situación es exactamente la misma si la masa M cuelga del resorte. No hay cambios en este caso.