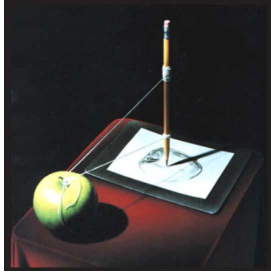
Introducción a la Física Newtoniana

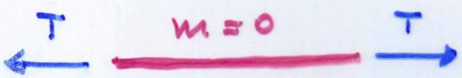


Resortes

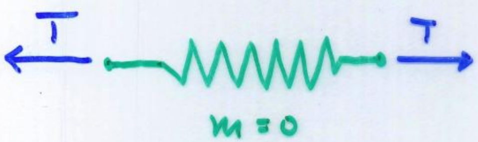
Objeto con las siguientes características:

• $\boxed{\text{MASA NULA}}$

Es una "generalización" del hilo



HILO

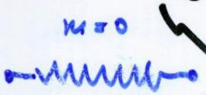


RESORTE

OJO: El resorte se puede comprimir

• $\boxed{\text{LARGO VARIABLE}}$

INEXTENSIBLE

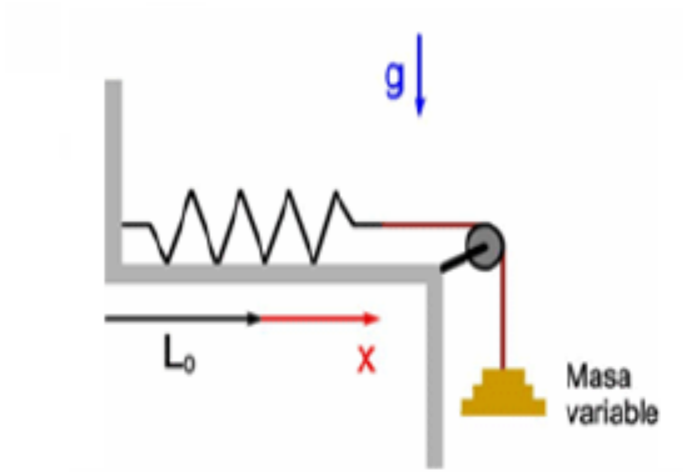


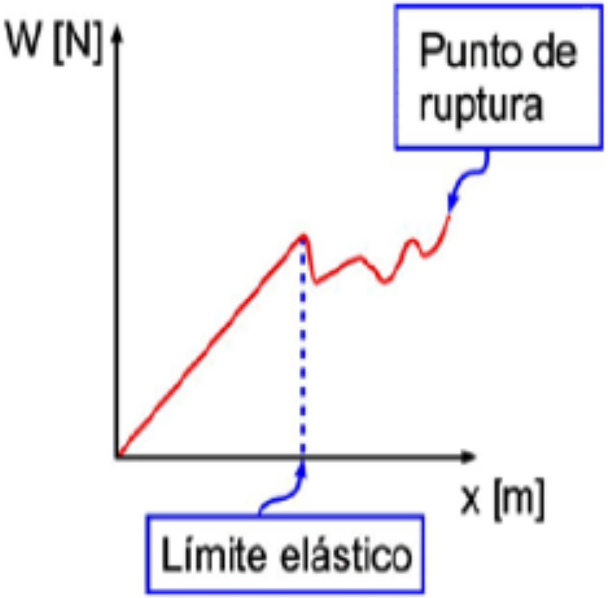
L_0 : largo NATURAL

Introducción a la Física Newtoniana

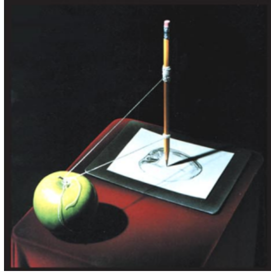
Diferenciamos dos respuestas en un resorte:

Estática: Aplicamos una fuerza externa lentamente y el resorte reacciona y alcanza una nueva posición de equilibrio.
Dinámica: El extremo del resorte experimenta una Aceleración debido a una fuerza externa o a un impulso inicial.





Introducción a la Física Newtoniana

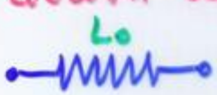


- Resortes blandos y duros

k, L_0

$k_{SUAVE} < k_{duro}$

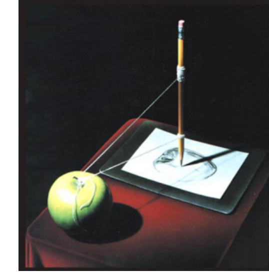
Un resorte blando o suave incrementa su longitud mucho más que un resorte duro bajo la acción de una misma fuerza



Resorte blandos

Resorte DURO (RÍGIDO)

Introducción a la Física Newtoniana

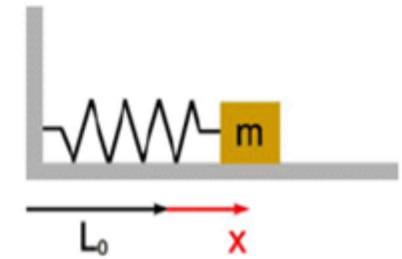


Ley de Hooke

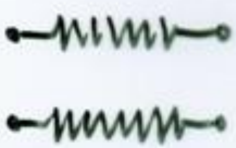
Pendiente de la recta

$$F_{ext} = k\,(x - L_0)$$

El acortamiento o Alargamiento de un resorte c/r a su largo natural L_0 es PROPORCIONAL A LA FUERZA EXTERNA

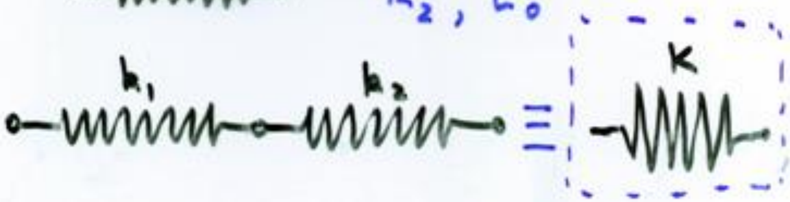


Ejemplo:

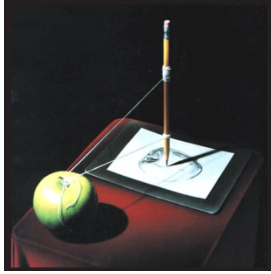


k_1, L_0

k_2, L_0



Introducción a la Física Newtoniana



Esta configuración se denomina

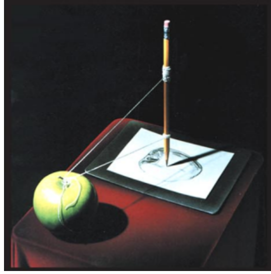
Resortes en Serie

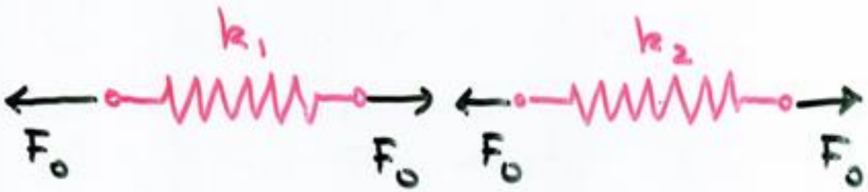
Se trata de encontrar un resorte cuyas características sean similares a esta configuración.

La clave es el alargamiento (así se define el valor "k" del resorte)

$k \equiv$ Rigidez del resorte

Introducción a la Física Newtoniana





$F_0 = k_1 \cdot \Delta_1$ $\qquad$ $F_0 = k_2 \Delta_2$

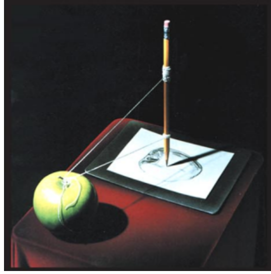
Δ_1 : Alargamiento del resorte 1.

Δ_2 : IDEM del resorte 2

El alargamiento total de ambos resortes es :

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

Buscamos un <u>resorte equivalente</u> que bajo la acción de la fuerza F_0 , incremente su longitud en Δ



$$\Delta = \frac{F_0}{k_1} + \frac{F_0}{k_2}$$

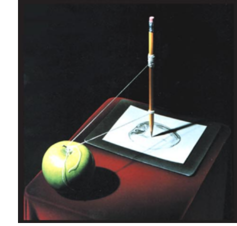
$$\Delta = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) F_0$$

El resorte equivalente que se estira Δ, bajo la acción de F_0, tiene una constante K

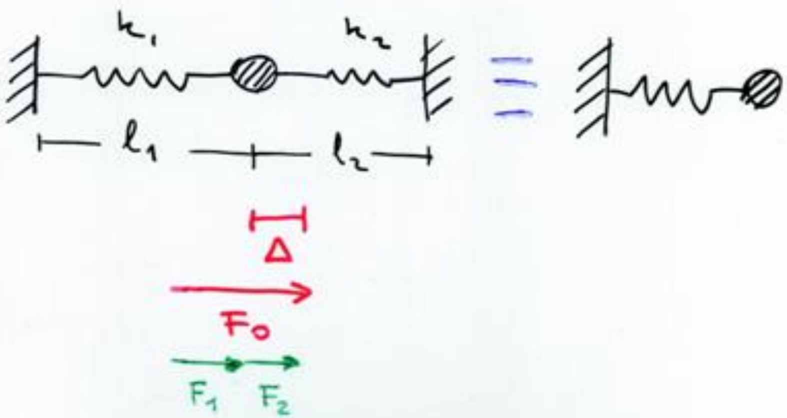
$$\Delta = \frac{F_0}{K} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

De esta forma se suma la rigidez de dos resortes conectados en SERIE

Introducción a la Física Newtoniana



Resortes en Paralelo



Existe una condición geométrica sobre estos resortes

lo que se estira el 1er resorte es igual a la compresión del 2º.

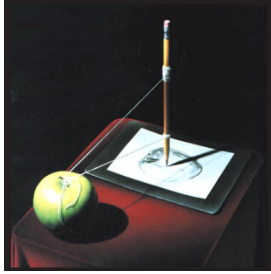
$$F_1 = k_1 \cdot \Delta$$

$$F_2 = k_2 \cdot \Delta$$

NOTA: En este ejemplo INICIALMENTE se ha supuesto que ambos resortes adoptan su largo natural y caben -sin tensiones o compresiones-, en el espacio L_0 comprendido entre las dos paredes : $L_0 = L_1 + L_2$.

Si el punto de unión se desplaza una cantidad Delta $\triangle$, se debe ejercer una fuerza externa F_0 y cada resorte responde con una fuerza diferente F_1 y F_2 respectivamente.

Introducción a la Física Newtoniana



La fuerza sobre c/u de los resortes es $\neq$.

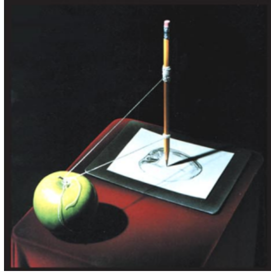
$$F_o = F_1 + F_2$$
$$= k_1 \cdot \Delta + k_2 \cdot \Delta$$
$$F_o = (k_1 + k_2) \cdot \Delta$$

El resorte equivalente se comporta como:

$$F_o = k \cdot \Delta$$

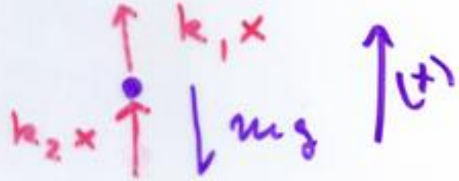
$$\boxed{k = k_1 + k_2}$$ Resortes en paralelo

Introducción a la Física Newtoniana



Ejemplo: Dos resortes del mismo largo natural se ubican en forma vertical. sostenidos desde sus extremos y unidos en el pto. medio. Si insertamos una masa "m" en su pto. medio ¿Cuanto baja la altura del pto. medio?

DCL



$$(k_1+k_2)\cdot x - mg = m\cdot 0$$

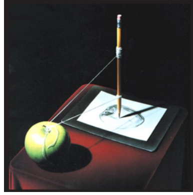
$$x = \left(\frac{g}{k_1+k_2}\right)m.$$

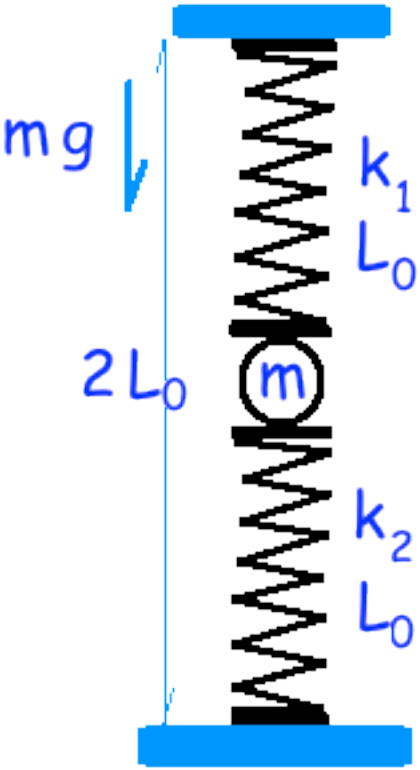
Este ejemplo es una aplicación del caso recién estudiado: Los dos resortes ocupan, sin tensionarse el espacio entre las dos paredes y la masa **m** genera una fuerza que los deforma. Como ambos tienen diferente rigidez, ante el mismo desplazamiento ejercen una fuerza diferente.

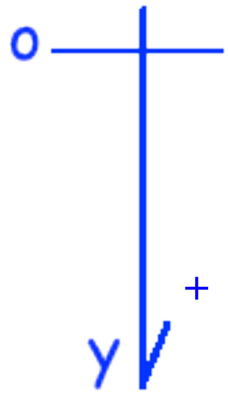
Note que x es una cantidad positiva. El signo enfrente refleja el sentido Del eje escogido.

A continuación resolvemos el mismo problema pero en forma general

Introducción a la Física Newtoniana







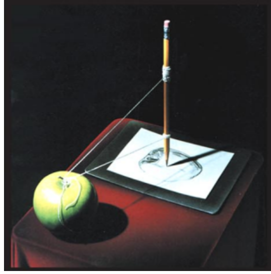
Ejemplo

Considere dos resortes de igual longitud natural L_0 y constante de rigidez k_1 y k_2 respectivamente. Se ubican en una espacio de largo $2L_0$ y se instala una masa M justo en el punto de unión de ambas.
Encuentre el desplazamiento e la masa M.

Definimos un sistema de coordenadas fijo en la parte superior, donde la coordenada y mide la posición de la masa M.
El desplazamiento del primer resorte es: $(y - L_0) > 0$, porque el peso de la masa baja su posición. Debemos ser consistente con esta suposición en lo que sigue.
El segundo resorte se comprime, si el primero de alarga. Su acortamiento esta dado por: $[L_0 -(2L_0 - y)] > 0$.
El DCL de la masa M es $k_1 (y - L_0) + Mg - k_2 [L_0 -(2L_0 - y)] = M\, a = 0$.

Notar que todas las cantidades son positivas, el signo enfrente de ellas indica si apuntan a favor (+) o en oposición (-) del sentido positivo del eje y.
Despejando y de dicha ecuación tenemos $Y = L_0 + Mg/(k_1 + k_2)$.
Si descontamos el largo natural L_0 obtenemos lo que se desplazó hacia abajo la masa M.

Introducción a la Física Newtoniana

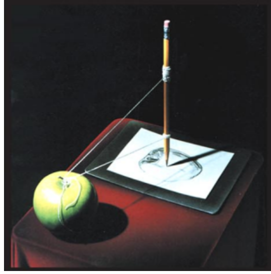


Note que en el denominador aparece $(k_1 + k_2)$

$\Rightarrow$ Estos resortes están en PARALELO, aun cuando nos "parece" que estuvieran en serie.

Sin embargo, la condición impuesta fue que ambos resortes tuvieran el mismo desplazamiento. Esta es la condición que caracteriza los resortes en paralelo.

Introducción a la Física Newtoniana

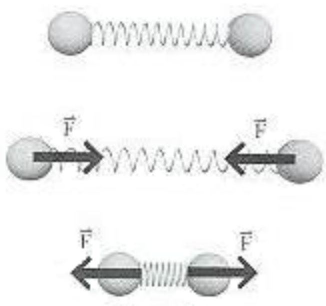


MODELO DE UN SÓLIDO

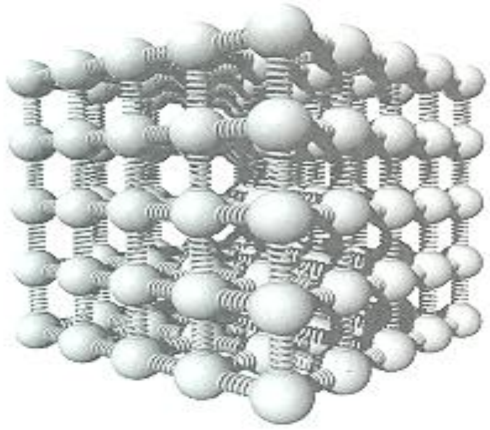
Aplicación de resortes en serie y en paralelo a caso físico y real.

Características básicas

-- Difícil de comprimir (comprobable)
-- no se desarma, los átomos no se fugan naturalmente
-- pueden resistir una fuerza considerable de tracción



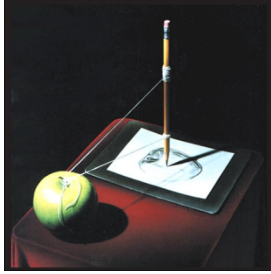
Un resorte parece un modelo razonable que responde a estas características



El *modelo* elemental de un sólido es una red de resortes que unen los átomos que consideramos como partículas situados en los vértices de los cubos fundamentales del modelo.

Esta es una posibilidad, es un modelo cúbico. Podría tener un átomo adicional al centro del cubo…
Pero éste es el caso más simple.

Introducción a la Física Newtoniana



Podemos comprobar algunas de las características de este modelo y verificar su grado de aproximación al comportamiento de un sólido real.

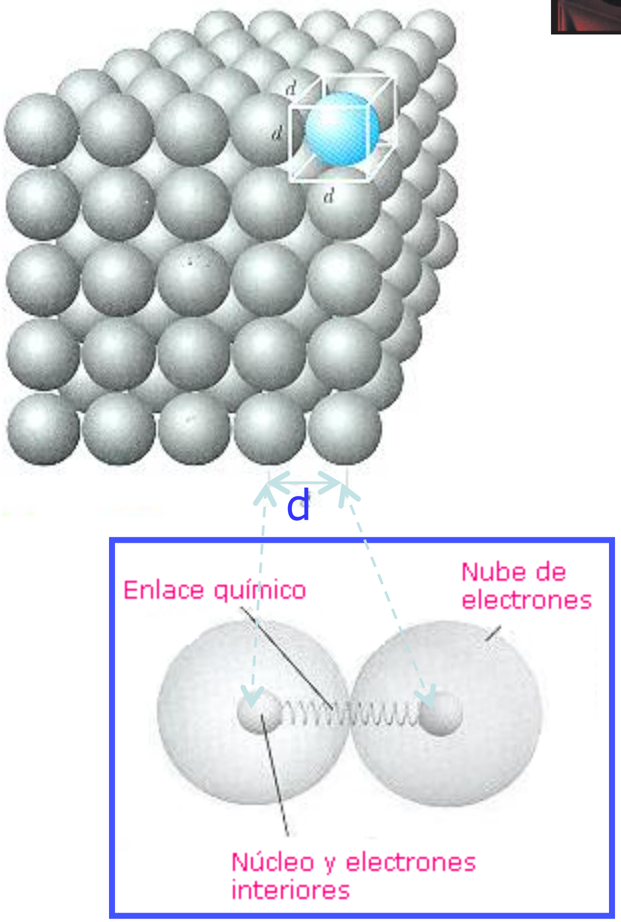
Podemos estimar la distancia que hay entre átomos, a partir de este modelo y Comparar con los valores obtenidos mediante otros métodos.

Consideramos que existe un átomo por celda, que el material es el Cu, con su peso molecular y el número de Avogadro.

La respuesta es que el tamaño de la red Es del orden de 1 A^{o} $\approx 10^{-10}$ m. (Ejercicio)

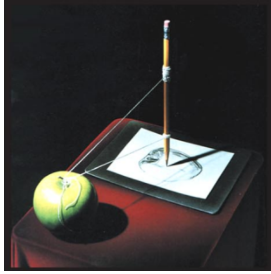
Indicación: un cubo de 1 m contiene $8{,}41\times10^{28}$ átomos. A lo largo de 1m existen $4{,}38\times10^{9}$ átomos. La distancia entre ellos es $1/(4{,}38\times10^{9}) = 2{,}28\times10^{-10} = d$.

Ref: Matter & Interactions,
R.W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley, 2007



El resorte modela el enlace químico que se produce a través de la interacción de la nube de electrones alrededor de cada núcleo.

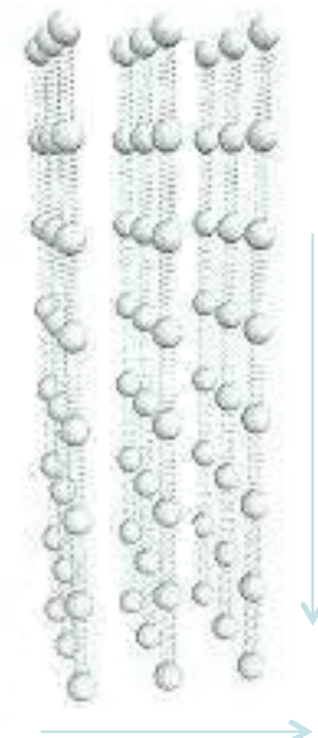
Introducción a la Física Newtoniana



Otra prueba para este modelo de resortes equivalentes consiste en calcular el módulo de Young asociado a este metal.
El módulo de Young es el equivalente de la constante de rigidez k del resorte que definimos al comienzo de este archivo.
Podemos incluso calcular la constante de rigidez $k_{atomico}$ del resorte que une cada uno de los átomos en este modelo.

Incluimos a continuación el cálculo.

Para hacer este cálculo, simplificamos aún más el modelo y despreciamos los resortes perpendiculares a la dirección en la cual aplicaremos una tracción para estimar el módulo de Young de este metal en función de cantidades elementales, como d, $k_{atomico}$. Y otras constantes.

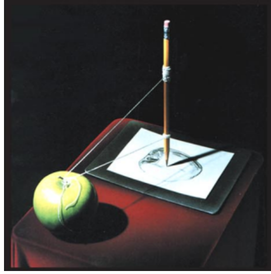


El modelo consiste de una serie de tiras de resortes longitudinales.

Para calcular su rigidez efectiva debemos recordar cómo se obtiene la rigidez equivalente para resortes en paralelo y en serie.

Ref: Matter & Interactions,
R.W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley, 2007

Introducción a la Física Newtoniana



La rigidez de dos resortes idénticos de rigidez elástica k, puestos en serie tienen una rigidez efectiva k/2.

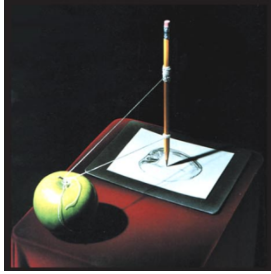
Los resortes en serie son más blandos.
Si existen $\{N_{cadena}\}$ resortes en cadena, la rigidez elástica efectiva será $[k/N_{cadena}]$

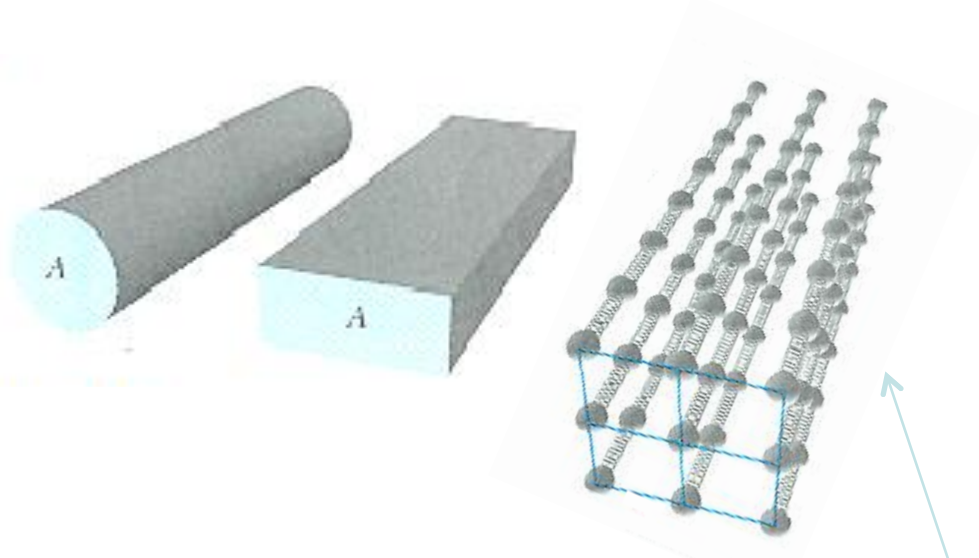
Para el caso de resortes en paralelo La rigidez efectiva es más simple de calcular y el resultado es Nk, si cada resorte tiene una rigidez Elástica k y existen N resortes Instalados en paralelo.

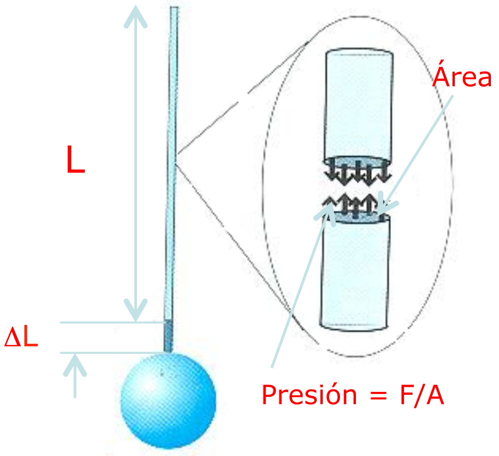
El siguiente paso es estimar el número de resortes puestos en serie en cada fila y cuántos resortes Debemos considerar en paralelo. Esto último involucra la sección transversal del material.

Ref: Matter & Interactions, R.W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley, 2007

Introducción a la Física Newtoniana







Con estos datos podemos estimar la rigidez de un resorte interatómico, $k_{interatómico}$.

Para calcular el número de resortes, basta conocer la distancia d interatómica, el número de resortes está dado por $N_{transversal} = A/d^2$. (Ver Figura, suponemos área rectangular)

Lo mismo se puede hacer para calcular cuántos resortes en serie, en una cadena, debemos considerar: $L/d = N_{cadena}$.

Si aplicamos una fuerza F, podemos estimar cuánto se elonga la cadena de resortes, ΔL. (Ver Figura).

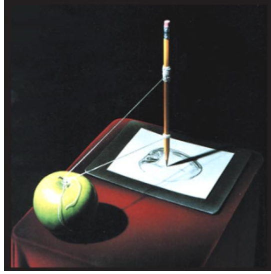
$k_{interatómico} =$

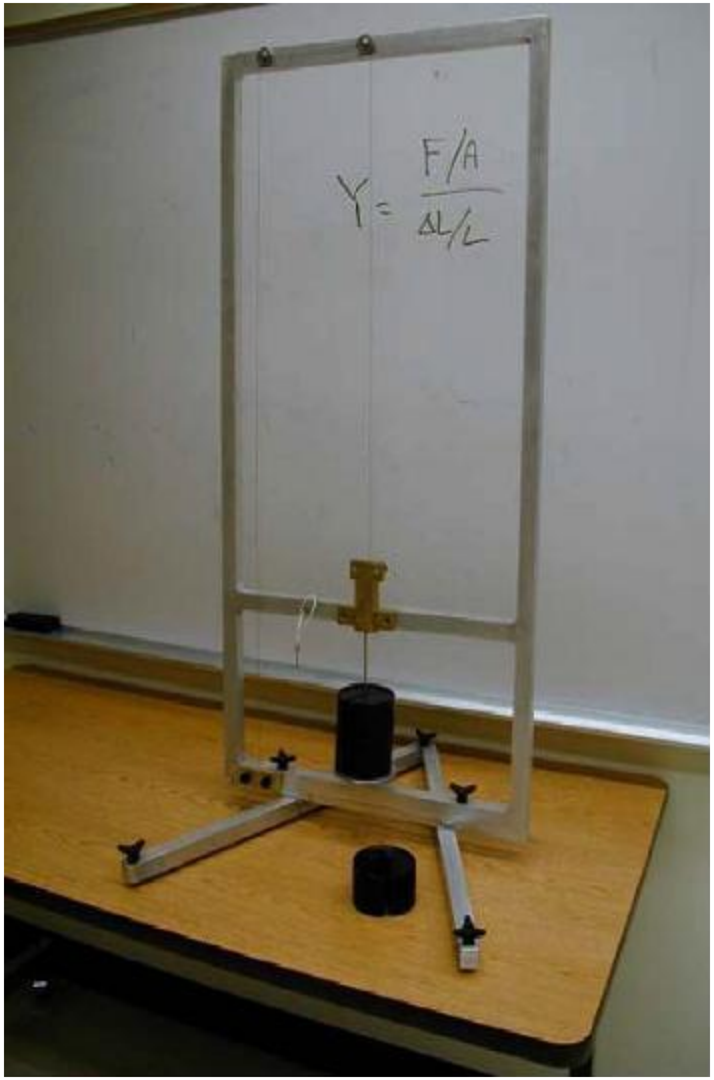
$(k_{alambre}\ N_{cadena})/(N_{transversal})$

$k_{alambre}$ es la rigidez macroscópica del Alambre utilizado en el experimento.

Ref: Matter & Interactions,
R.W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley, 2007

Introducción a la Física Newtoniana





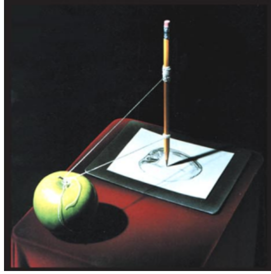
Hilo sometido a una fuerza para medir el módulo de Young asociado al material.

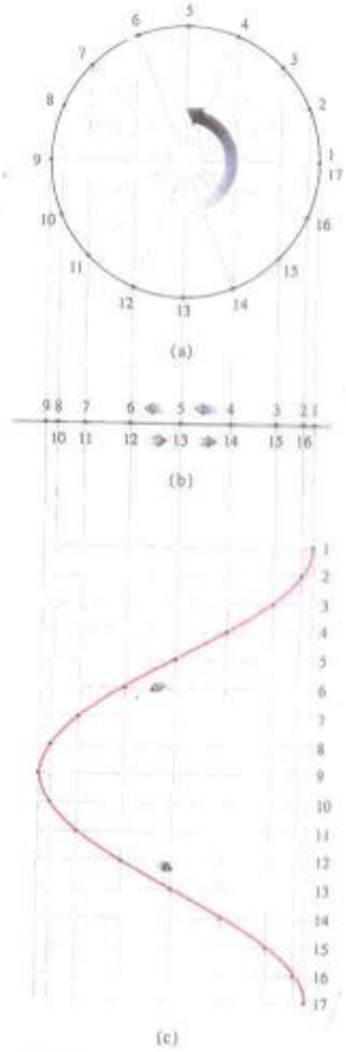
El módulo de Young ***E o Y*** ,está escrito en la pizarra, normalizado, de modo que sea un número que caracterice un material independiente de sus dimensiones, por eso se utiliza la Tensión F/A y la elongación relativa $\Delta L/L$.

Al elongar un alambre, su diámetro disminuye. Este efecto no se puede apreciar en este modelo porque hemos eliminado los resortes transversales.

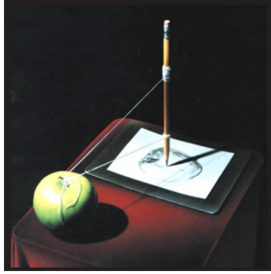
Ref: Matter & Interactions,
R.W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley, 2007

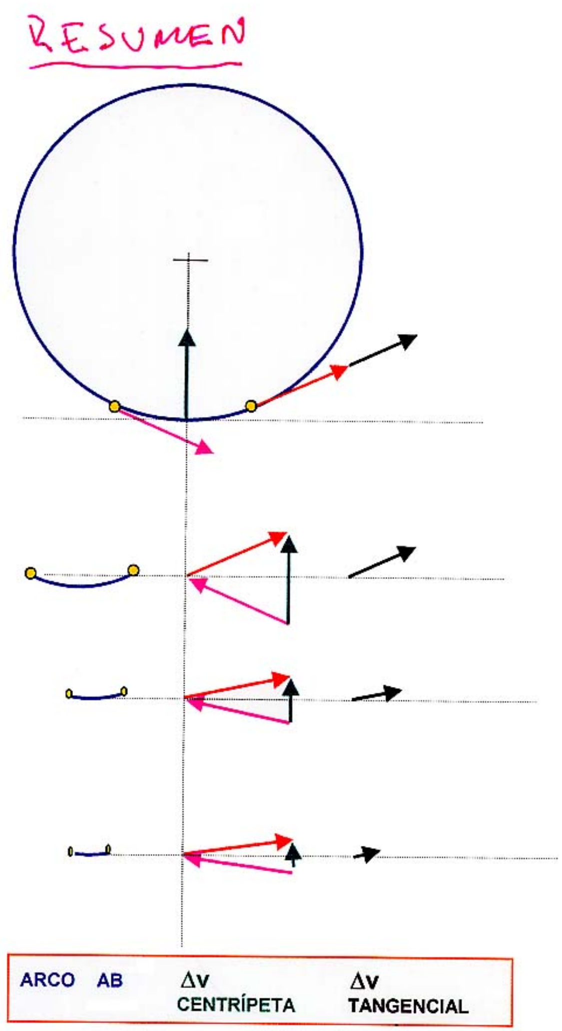
Introducción a la Física Newtoniana



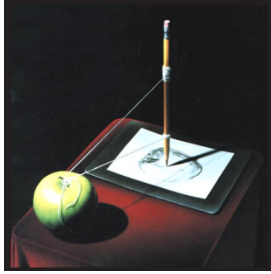


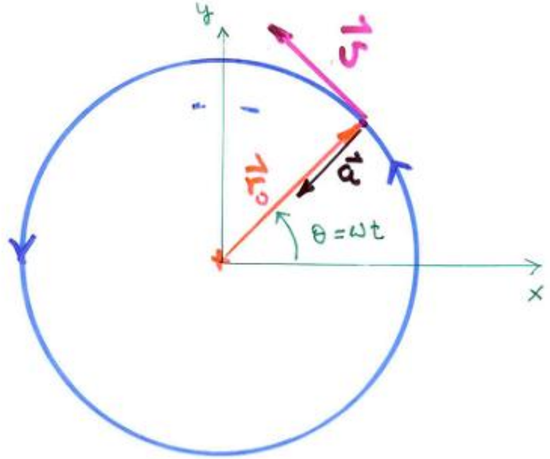
Introducción a la Física Newtoniana





Introducción a la Física Newtoniana





$$\vec{r} = [r_0 \cos \omega t,\ r_0 \operatorname{sen} \omega t]$$

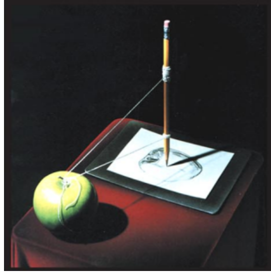
$$\vec{v} = \omega[-r_0 \operatorname{sen} \omega t,\ r_0 \cos \omega t]$$

$$\vec{a} = -\omega^2 [r_0 \cos \omega t,\ r_0 \operatorname{sen} \omega t]$$

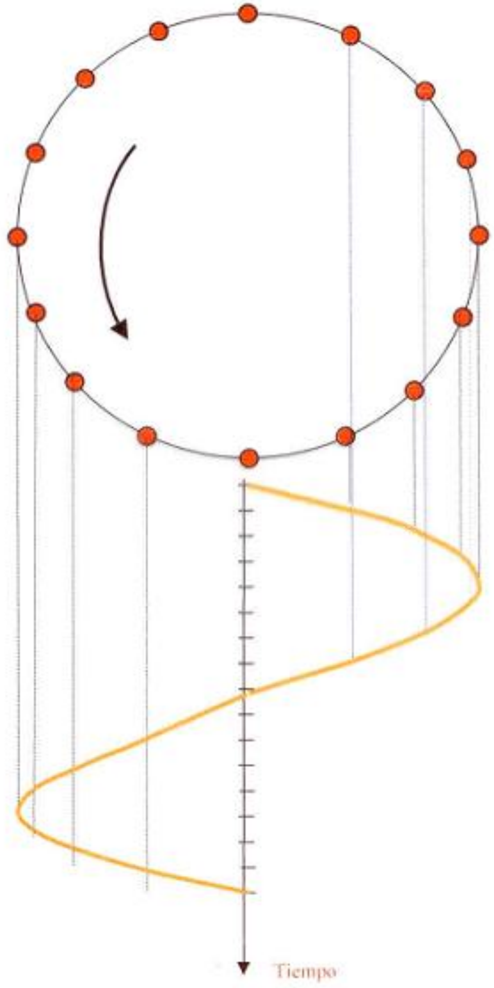
$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{x}$$

$$a_x = -\omega^2 x$$

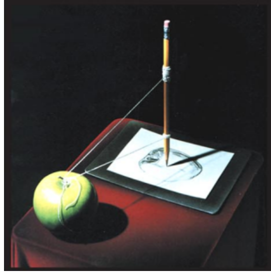
Introducción a la Física Newtoniana



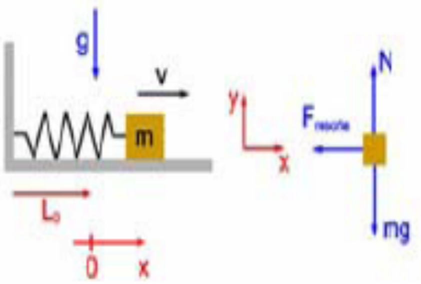
Proyección sobre el eje Horizontal del Movimimiento Circular Uniforme



Introducción a la Física Newtoniana



ECUACIÓN DE MOVIMIENTO



$$\vec{F}_{RESORTE} = -k\,x$$

2ª LEY DE NEWTON $\Rightarrow$ $-kx = m\,a_x$

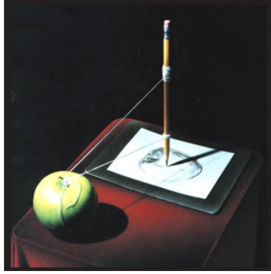
$$\Rightarrow \quad \boxed{a_x = -\frac{k}{m}\,x}$$

ECUACIÓN DE MOV. PARA LA MASA m

LA ACELERACIÓN ES PROPORCIONAL AL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA m

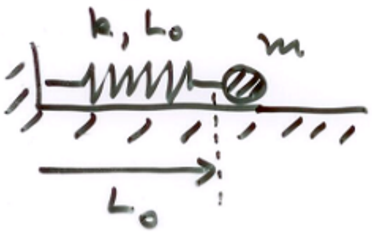
LA ACELERACIÓN APUNTA SIEMPRE EN SENTIDO OPUESTO AL DESPLAZAMIENTO

Introducción a la Física Newtoniana



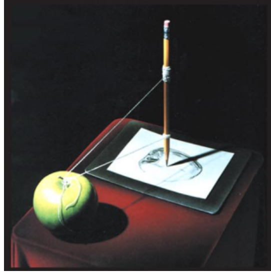
Dinámica ($v \neq 0$)

MODELO:



- Debe estar conectado a una masa, para que la 2ª Ley de Newton no se trivialice.
- Note que si comprimo un resorte ($L<L_0$) al soltarlo se estira.
- Y VICEVERSA, si lo estiro, al soltarlo vuelve hacia el pto. de equilibrio: L_0

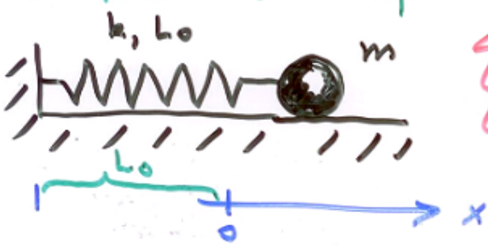
Introducción a la Física Newtoniana



El resorte siempre busca la posición de Equilibrio

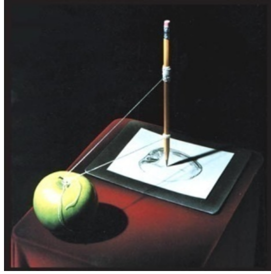
La intensidad de la Fuerza depende de lo alejado que se encuentre de la posición de equilibrio

sistema de Referencia

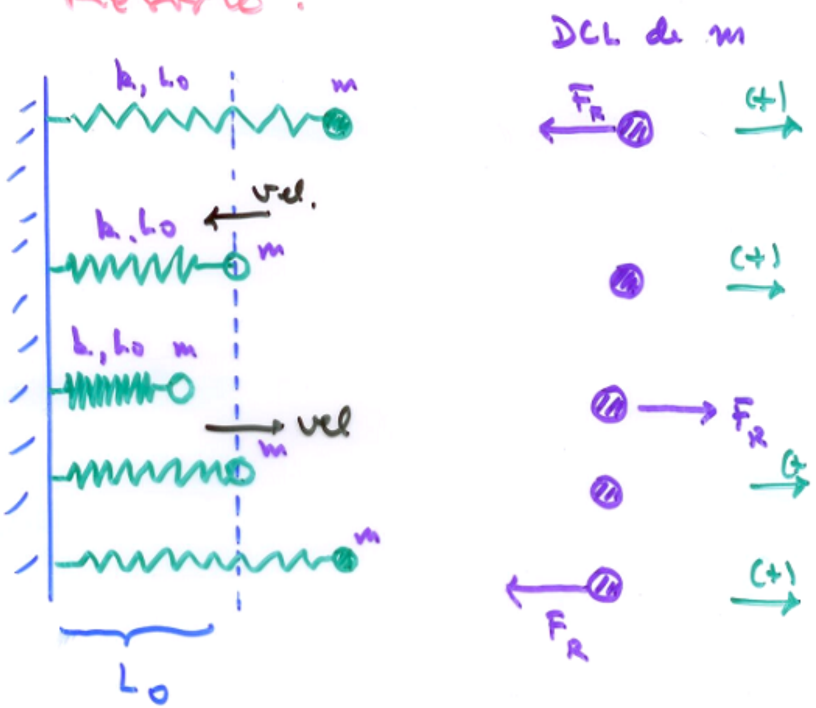


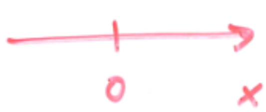
Conviene ubica
el origen de coord
en el pto. de
Equilibrio de
RESORTE

Introducción a la Física Newtoniana



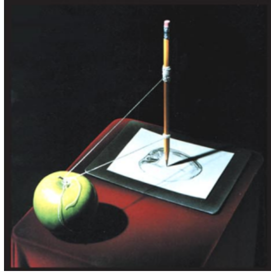
Veamos cómo funciona el Resorte:





$$\boxed{F_R = -kx}$$

Introducción a la Física Newtoniana



La ecuación de movimiento de la masa atada al resorte es:

$$\boxed{m a_x = -k x}$$

Por conveniencia, la escribimos como:

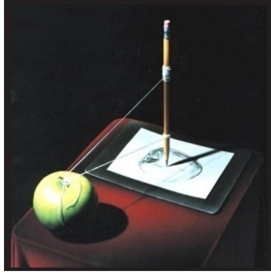
¿!!

$$a_x = -\omega_0^2 x$$

$$\frac{F}{M\cdot L} = \frac{\cancel{M}\cdot \frac{\cancel{L}}{T^2}}{\cancel{M}\,\cancel{L}} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0 \qquad \left[\frac{F}{L\cdot M}\right] = \frac{1}{T}$$

- La aceleración es proporcional al desplazamiento
- Tiene el sentido <u>opuesto</u> al desplaz

Introducción a la Física Newtoniana



Si la componente x del vector posición es

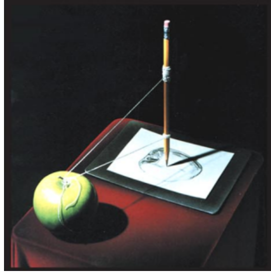
$$x = r_0 \cos \omega t$$

$$a_x = -\omega^2 r_0 \cos \omega t = -\omega^2 x$$

En el movimiento circunferenci UNIFORME ocurre precisament que la aceleración es proporcio al desplazamiento y tiene, adem el signo correcto.

Podemos afirmar que, si el resorte se encuentra en su posi de máxima elongación en el instant $t = 0$, entonces la posición $x(t)$

Introducción a la Física Newtoniana



está determinada por :

$$\boxed{X(t) = A \cos \omega t}$$

Esta ecuación cumple con la 2ª Ley de Newton puesto que en este caso $a_x = -\omega^2 x$

Esta es la solución !

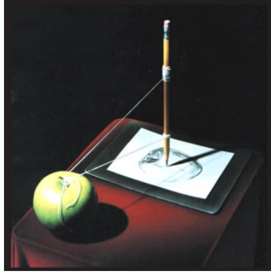
(Los matemáticos demostrarán a su debido tiempo, que es <u>ÚNICA</u>.

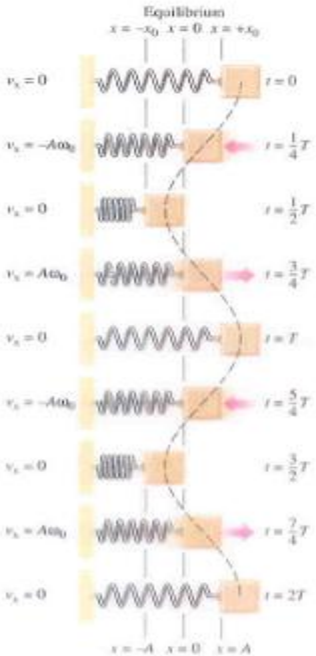
$A \equiv$ Amplitud de la oscilaci

(MÁXIMA ELONGACIÓN)

$$X(0) = A \cos 0 = A$$

Introducción a la Física Newtoniana





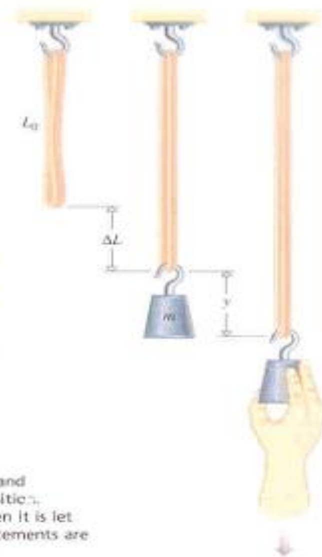
$_2 = A\cos 2\pi f_0 t$

m) $\cos 2\pi(2.25\text{ Hz})(0.200\text{ s})$

$\boxed{_2 = -0.0476\text{ m}}$

noved, displacing the body will re-
orce it did before, when one spring
is the other was compressed. It fol-
$\boxed{.100\text{ kN/m}}$, half its previous value.
illatory frequency, Eq. (12.12), will
was—namely, $\boxed{1.59\text{ Hz}}$.

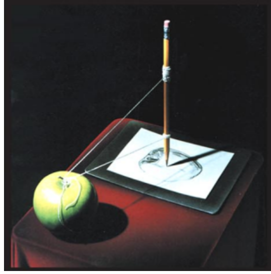
he answer to (b) is reasonable since
rly $\frac{1}{2}T$, at which time $x = -A =$
new period is $T = 0.444$ s ×
$= 1/T = 1/0.63$ s $= 1.6$ Hz.



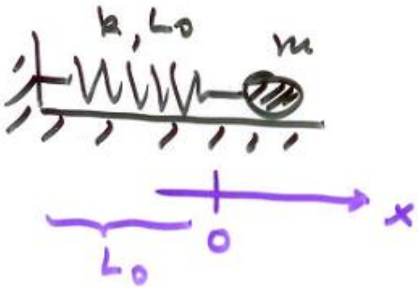
Example 12.3 The cart in Fig.
1.00 kg, and someone reaches do
5.00 cm to the right with an axial
10.0 N. (a) Assuming no friction, v
the resulting oscillation when th
(b) Where will it be 0.200 s after rel
elastic force constant for the syste
identical springs is removed? (d)
frequency.

Solution: [Given: $m = 1.00$ kg, band
$F = 10.0$ N. Find: T and x at $t =$ ositio
spring, and f.] (a) The period hen it is let
lacements are

Introducción a la Física Newtoniana



RESUMEN



DCL

$$m a = F_R$$

$$\boxed{m a_x = -k x}$$

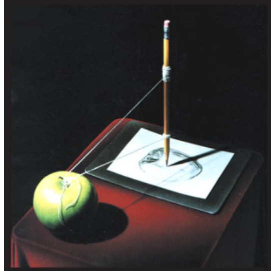
$k > 0$, $m > 0$

2ª Ley de Newton

$$\boxed{a = -\left(\frac{k}{m}\right) x}$$

La aceleración es <u>proporcional</u> al desplazamiento c/r al pto. de equilibrio.

Introducción a la Física Newtoniana



La solución más general de esta ecuación ($\ddot{x} = -\omega^2 x$)

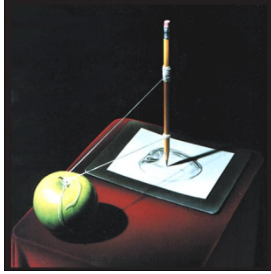
$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

A = Amplitud de la oscilación. Es un número positivo

$$\omega^2 = \frac{k}{m} > 0 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

La característica del oscilador

Introducción a la Física Newtoniana



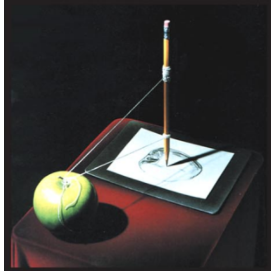
Las condiciones iniciales determinan el valor de A y ϕ

Ejemplo:

Sobre un resorte (k, L_0) se deposita lentamente una masa M

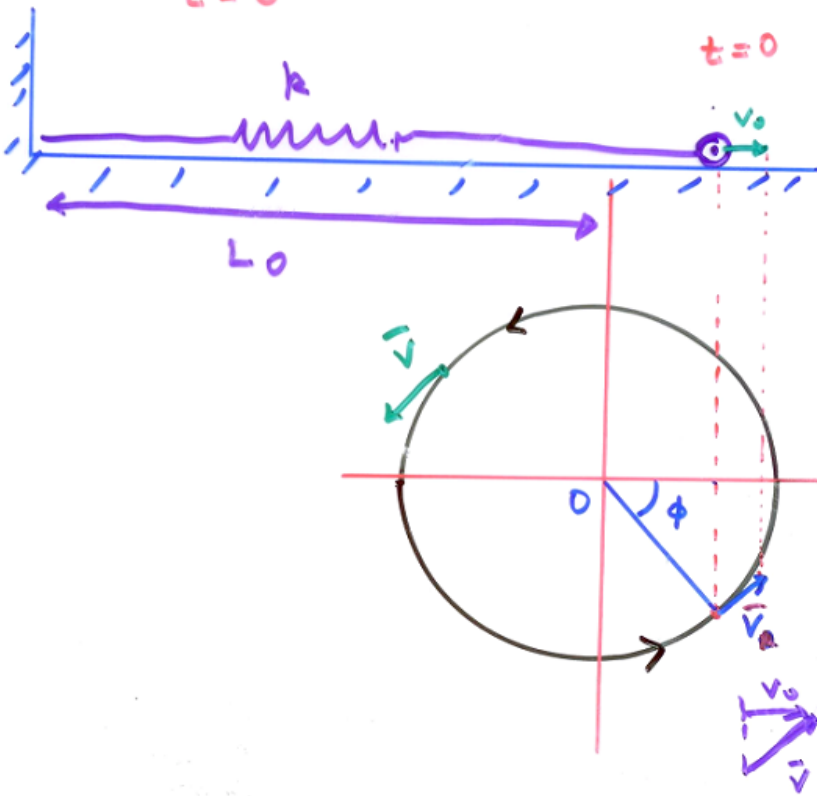
a) ¿Cuánto baja la altura del resorte?

Introducción a la Física Newtoniana

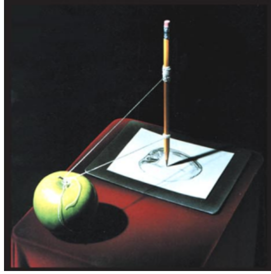


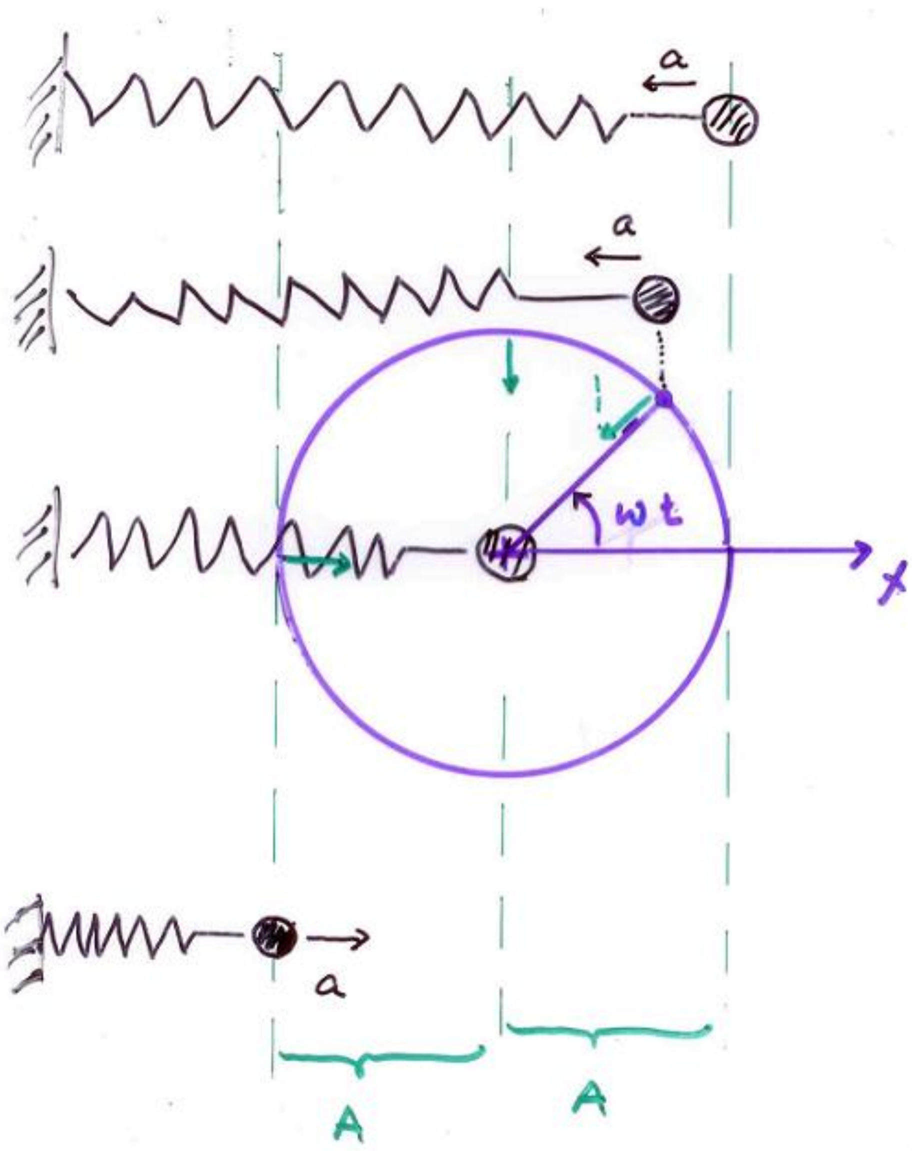
$\phi \equiv$ fase

Identifica la posición inicial del resorte en $t = 0$



Introducción a la Física Newtoniana

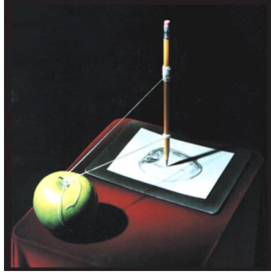


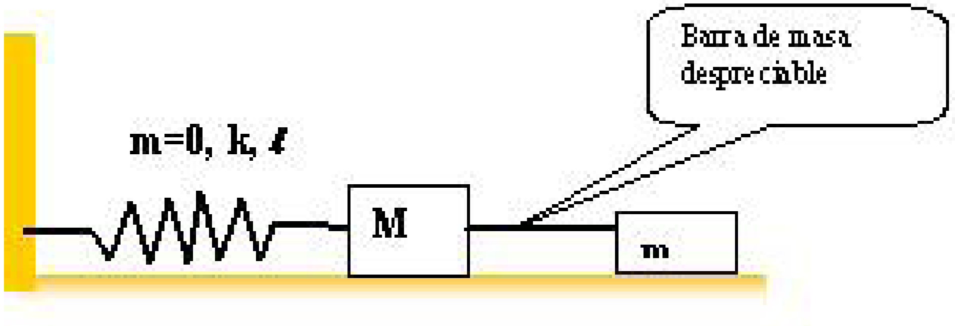


Clase

En el Cap VII, Libro NZ , hay algunos problemas propuestos y su solución.

Introducción a la Física Newtoniana





Considere el oscilador armónico ideal (sin masa, k y largo natural l) de la Figura. Las masas **M** y **m** están unidas por una barra cuya masa es despreciable comparada con cualquiera de las anteriores. El plano no tiene roce. La solución general de este problema es $x(t) = A \cos(\omega_o t + \emptyset_o)$.

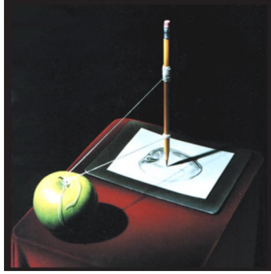
Encuentre la amplitud, la fase y el período de oscilación de este péndulo si:

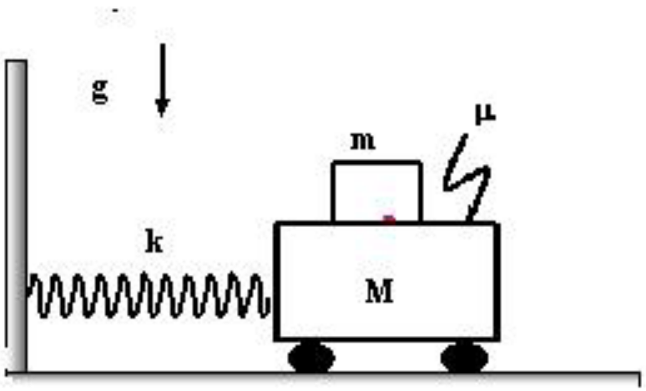
i.- Con el oscilador en reposo sobre la mesa, se le comunica una velocidad v_0 a la masa **M**

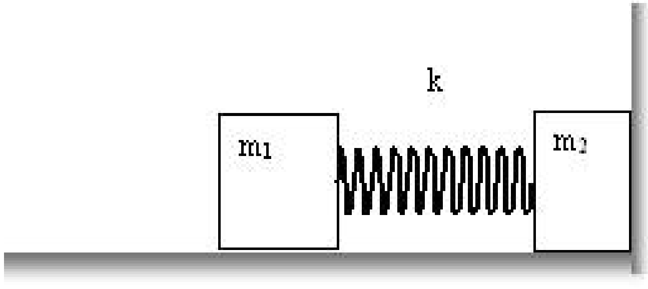
ii.- Queremos que oscile igual al caso anterior, pero ahora aplicando una velocidad $v_o/2$ (en cualquier sentido) en el instante inicial. Debo entonces estirar (o comprimir) el resorte en el momento inicial lo que se precise. Indique cuánto debo comprimirlo (o estirarlo) en el momento inicial para que lo logre.

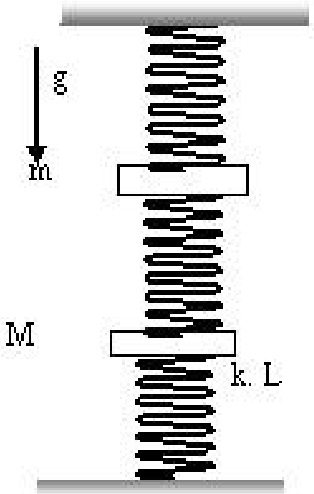
Explique en brevemente cómo cambia la situación si en lugar de la barra existe un hilo. (Dibuje lo que sucede…).

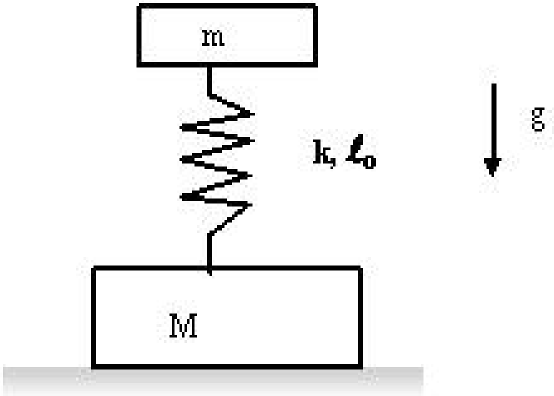
Introducción a la Física Newtoniana



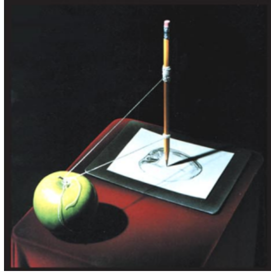








Introducción a la Física Newtoniana



Lo mismo sucede con el oscilador armónico !

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = -A\omega \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$x^2 = A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2 \,\mathrm{sen}^2(\omega t + \phi)$$

$$\oplus \quad x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2$$

válido para todo t, en cualquier pto. de la trayectoria del oscilador !

NO ES UN MILAGRO !

ENERGÍA EN UN RESORTE

Utilizando la consistencia de las matemáticas encontramos una relación muy útil y general:

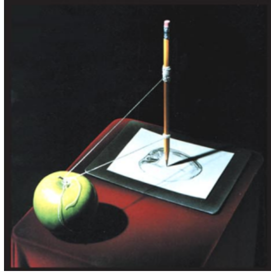
la conservación de la energía.

Consta de dos componentes:

la energía cinética y
la energía potencial,

cuyo significado físico se puede reconocer intuitivamente .

Introducción a la Física Newtoniana



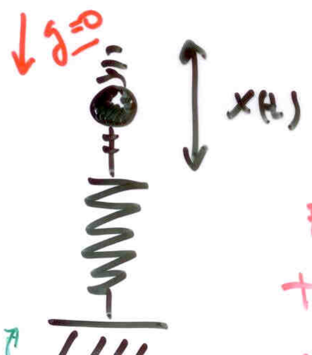
$$\frac{v^2}{\left(\frac{k}{m}\right)} + x^2 = A^2 \quad \Big/ \tfrac{1}{2}k$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2} \quad *$$

Energía cinética

Energía potencial (medida c/r al pto. de eq.)

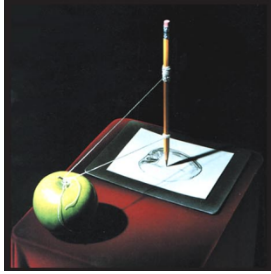
Energía **TOTAL**



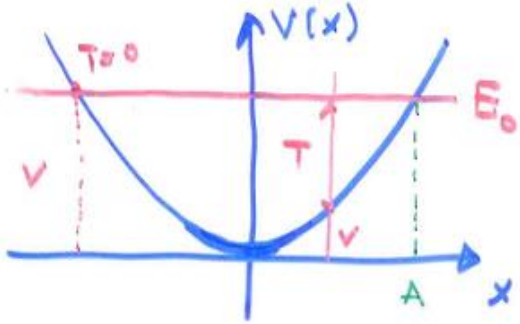
no considerar el campo grav.

En cualq. pto. de la trayectoria de m, se cumple (*) !!

Introducción a la Física Newtoniana



Interpretación Gráfica de la conservación de la Energía.



$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$

$$\boxed{T + V = E_0}$$

V(x) para una masa sobrepuesta en un resorte