INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 21 de mayo de 2016

Índice general

Capítulo VII

RESORTES Y MODELO DE UN SÓLIDO

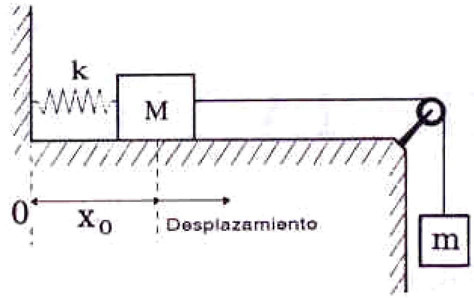
En este capítulo estudiaremos el movimiento generado al alargar (o comprimir) un resorte con una masa en su extremo. Al estirar y soltar la masa se produce una oscilación, y si no existe disipación, la masa oscila en torno a un punto como probablemente lo conocemos a través de nuestra experiencia diaria.
La solución analítica de este problema será estudiada en otro capítulo, pero podemos adelantar que es una solución conocida. Este movimiento corresponde a la proyección sobre el eje x del movimiento de una partícula describiendo una circunferencia en torno al origen.
Esta ecuación también describe las oscilaciones pequeñas de un péndulo.

VII.1. FUERZA DE RESTITUCION DE UN RESORTE

VII.1.1. Experimento

Para encontrar el comportamiento de un resorte sometido a una fuerza, realizamos el siguiente experimento: *lentamente* vamos añadiendo masas iguales a un extremo del resorte, en la forma que se indica en la Figura. Simultáneamente procedemos a tabular el alargamiento que experimenta el resorte en cada una de estos procesos y la fuerza que lo provoca. Al graficar los resultados se obtiene la ley de fuerza que gobierna el comportamiento de un resorte.

$F = T$	*Desplazamiento*
1 N.	. 31 mm.
2 N.	. 64 mm.
3 N.	. 89 mm.
.	.
.	.



Después de realizar numerosos ensayos se puede ver una tendencia:
El desplazamiento del extremo de un resorte, medido a partir de su largo natural x_0, es proporcional a la fuerza aplicada.

El largo natural del resorte, denominado x_0, es la longitud que adquiere cuando no existe ninguna fuerza externa aplicada sobre él.

Esta es una *ley empírica*: proviene de la experimentación y no representa un conocimiento más profundo de los mecanismos que utiliza el resorte para reaccionar de esta forma a la acción de una fuerza. De hecho no todos los resortes reaccionan en forma idéntica. Por ejemplo los resortes, en general, no reaccionan de la misma forma al ser comprimidos que al elongarlos. Algunos resortes sólo pueden ser elongados, no pueden ser comprimidos.

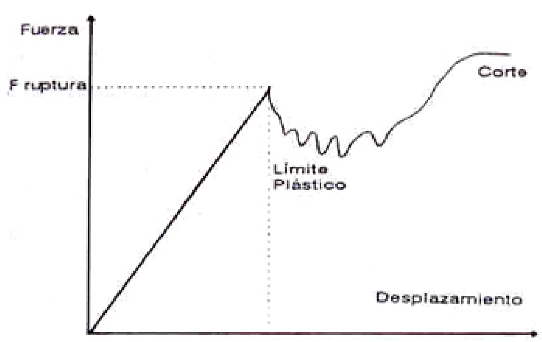


Figura VII.1: En la abcisa del sistema de coordenadas se anota el desplazamiento del extremo del resorte y en la ordenada la fuerza aplicada. Después de experimentar con distintas magnitudes de fuerza, se observa que existe una zona donde una línea recta representa la tendencia de los puntos tabulados.

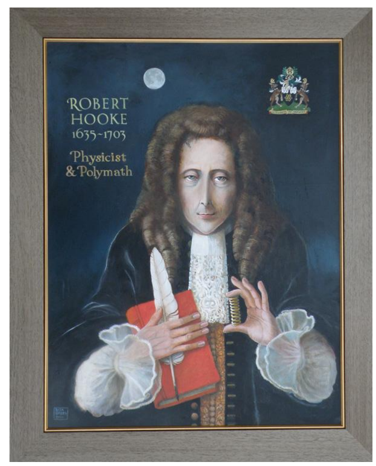
En la Figura se grafica la fuerza aplicada *versus* el desplazamiento. El resorte se opone con una fuerza de igual magnitud y dirección pero en **sentido opuesto**. La ley de fuerzas para el resorte es:

$$F = -k\,(x - x_0). \tag{VII.1}$$

Esta es la *ley de Hooke*.

-

Robert Hooke (1635–1703) fue contemporáneo de Newton y un hombre que destacó en diferentes áreas: construyó una bomba de vacío que permitió a Boyle encontrar la ley de los gases ideales que lleva su nombre, construyó un microscopio con el cual observó el corcho y otros tejidos de plantas y notó que estaban constituidos por pequeñas cavidades separadas por paredes que denominó *celdas*. Esta es una de las primeras menciones de lo que posteriormente se conoce como *célula*. Fue uno de los críticos de la teoría corpuscular de la luz, elaborada por Newton. Se dice que Newton destruyó todos sus retratos a su muerte. El retrato que se acompaña fue realzado a partir de descripciones de la figura de Hooke por la retratista Rita Greer (ver Ref . 3).



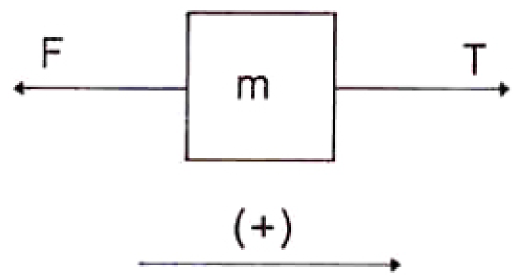
-

El punto de quiebre de la línea se denomina el *límite elástico* y marca el inicio del comportamiento plástico del resorte: aquella región donde la deformación experimentada por el resorte se transforma en deformación permanente. El resorte no recupera su largo inicial.

La fuerza se debe aplicar lentamente de forma que la masa m no adquiera velocidad. Si la velocidad no es despreciable, el análisis del problema debe incluirla. Esta última situación será estudiada posteriormente.

Escribimos las ecuaciones de Newton asociadas a la masa m, tomando el extremo del resorte como origen del sistema de coordenadas.

Hemos supuesto que la masa del resorte es despreciable comparada con la masa que colgamos de su extremo.
El diagrama de cuerpo libre para la masa en el extremo del resorte se indica en la Figura. En la dirección horizontal tenemos:



$$-F + T = m\,a,$$

donde T representa la fuerza que opone el resorte al intentar ser elongado y F es la fuerza externa, proveniente –en este caso–, de las masas que se han colgado desde el extremo.

Si las masas se cuelgan cuidadosamente, la aceleración es nula, $a = 0$, entonces $T = F$ en cada instante. Al estudiar la tabla de valores obtenida experimentalmente, podemos relacionar la fuerza aplicada con la deformación del resorte. El resultado es una relación lineal entre la fuerza y la deformación, válida dentro de un cierto rango de valores para la fuerza, denominado el rango de linealidad del resorte:

$$F = -k\,x. \tag{VII.2}$$

La constante k, mide la rigidez del resorte. Un resorte muy rígido tiene asociado un alto valor de k; en este caso debemos aplicar una fuerza de magnitud apreciable para poder estirar el resorte una distancia pequeña. El caso opuesto, un valor de k muy pequeño representa un resorte muy débil sobre el cual una fuerza pequeña producirá una deformación apreciable.

Las dimensiones de k son:

$$[k] = \frac{[newton]}{[m]}.$$

Ejemplo

Dados dos resortes idénticos, de rigidez k, calcular la deformación que experimentan al colgar una masa m, en los dos casos siguientes: cuando los resortes se conectan en serie, y en paralelo.

a) Resortes en serie.
Para obtener un resultado más interesante supongamos que la constante de rigidez de cada resorte es diferente. Al conectar los dos resortes en serie obtenemos otro resorte, cuya rigidez la definimos como K y cuya expresión debemos encontrar a continuación.

Al aplicar una fuerza F (con $F = m\,g$) en los extremos del sistema de dos resortes, en la unión de cada resorte actúa la misma fuerza F en la dirección y sentido que se indica en

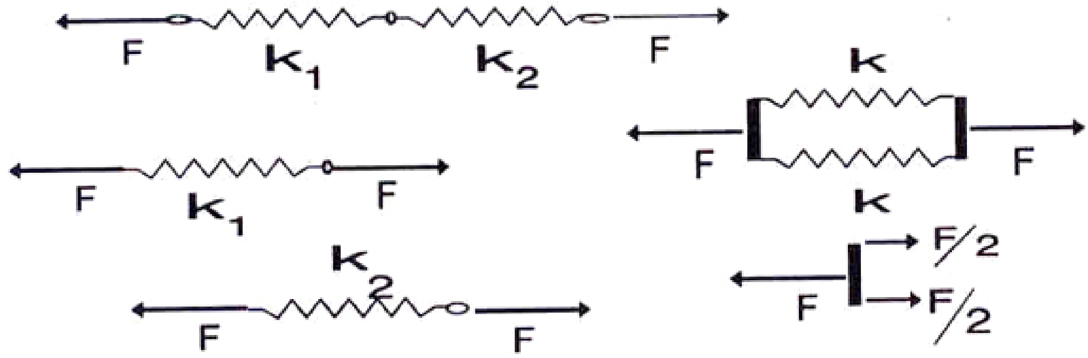


Figura VII.2: A la derecha se representa a los dos resortes conectados en paralelo y a la izquierda aparecen conectados en serie. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de las configuraciones.

la Figura. Debido al efecto de esta fuerza cada uno de los resortes se elonga una distancia F/k_1 y F/k_2. Como la elongación de cada uno de los resortes se debe sumar debido a la forma en que están conectados, el resorte compuesto se estira:

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F\left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right] \equiv \frac{F}{K} \;\Rightarrow\; \frac{1}{K} = \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right].$$

Conociendo el valor de la constante K para esta configuración, podemos estudiar el caso particular en que ambos resortes tienen la misma rigidez:

$$\frac{1}{K} = \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right], \text{ si ambos resortes son iguales } \frac{1}{K} = \frac{2}{k} \implies K = \frac{k}{2}. \qquad \text{(VII.3)}$$

b) Resortes en paralelo.

En este caso suponemos de un comienzo que ambos resortes son idénticos. Como están en paralelo, cada uno soporta la mitad del peso de la masa m, es decir, una fuerza $F/2$. Cada uno de los resortes se elonga $F/(2\,k)$ y, de acuerdo a la forma como están conectados los resortes, el sistema se elonga $F/(2\,k)$, de modo que el resorte equivalente tiene una constante de rigidez:

$$K = 2\,k, \quad \text{para resortes en paralelo.} \qquad \text{(VII.4)}$$

En resumen, si tenemos dos resortes y queremos armar un resorte más duro, debemos conectarlo en paralelo. Ahora, si lo deseamos más blando, debemos conectarlo en serie.□

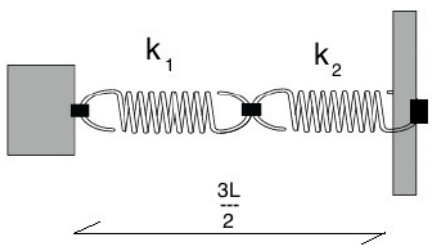
Ejercicio

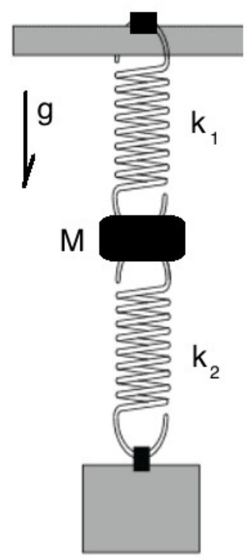
Encuentre el valor de la rigidez equivalente K_n que tienen n resortes idénticos al ser conectados: a) todos en paralelo y b) todos en serie.□

Ejemplo

a.- Dos resortes de rigidez $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$ con $\mathbf{k}_1 > \mathbf{k}_2$ y ambos de largo natural **L** se acomodan en un espacio horizontal de largo **3L/2**. (Ver Figura).
Encuentre cuánto se acorta cada uno de ellos para caber en este espacio.
Compruebe su resultado para el caso en que $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$. ¿Está de acuerdo a su intuición?

b.- El mismo conjunto de resortes, pero ahora se ponen verticales y se le añade una masa **M** en su punto de unión. Calcule el largo que adopta cada resorte para sostener la masa y caber en la altura dada: **3 L/2**.





Solución:

a) Ponemos los dos resortes en serie, con uno de sus extremos (el izquierdo, por ejemplo) apoyado en la pared. En el otro una fuerza F_0 tal que los dos resortes alcancen un largo **3 L/2**. Como los resortes están en serie

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad \text{ordenando} \quad \kappa = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

De modo que la fuerza F_0 que debemos aplicar debe tener una magnitud

$$F_0 = \kappa \frac{L}{2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{L}{2}.$$

Si hacemos un diagrama de cuerpo libre de cada resorte, podemos conocer su acortamiento.

Como sabemos, la fuerza F_0 comprime a cada uno de los resortes por igual debido a que no tienen masa. De esta manera el acortamiento del resorte k_1 es

$$\Delta_1 = \frac{F_0}{k_1} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{L}{2}$$

y el acortamiento de k_2

$$\Delta_2 = \frac{F_0}{k_2} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{L}{2}$$

si uno de los resortes (k_2 por ejemplo) es una barra rígida, entonces $k_2 \to \infty$

$$\Delta_2 \; \to \; 0, \quad \text{y} \quad \Delta_1 \; \to \; \frac{L}{2}.$$

Este último cálculo ilustra el hecho que los resortes aplican la misma fuerza ($\mathbf{F}_o$) pero no se deforman lo mismo. Están en serie, por definición. En el siguiente caso, que es muy similar, los resortes se comportan como resortes en paralelo, ambos tienen la misma deformación pero aplican fuerzas diferentes.

b.- En este caso, como los resortes no tienen masa, la fuerza de compresión calculada en la parte a.- no se modifica. Sin embargo la inclusión de la masa **M** obliga a cada resorte a contribuir con una fuerza para soportar la masa. Por la geometría ambos deben deformarse adicionalmente un factor que denominamos $\bar{\Delta}$. La fuerza de cada uno es entonces $F_1 \; = \; k_1 \, \bar{\Delta}$ y $F_2 \; = \; k_2 \, \bar{\Delta}$.
Por otra parte, ambos deben sostener el peso $\mathbf{M}\,\mathbf{g}$ de modo que debe cumplirse $\mathbf{M}\,\mathbf{g} \; = \mathbf{F}_1$ $+\mathbf{F}_2$. Reemplazando las expresiones de la fuerza se obtiene:

$$\bar{\Delta} \; = \; \frac{M\,g}{k_1 \; + \; k_2}.$$

Con esto obtenemos la expresión de la fuerza y desplazamiento de cada resorte debido a la inclusión de la masa **M**.

VII.2. Modelo de un Sólido

El modelo de fuerzas utilizado para describir el comportamiento de un resorte ideal lo extenderemos a un sólido.

Primero verifiquemos que sigue el comportamieno básico de un resorte: al aplicar un par de fuerzas que compriman un cilindro esbelto de cobre, éste disminuye su altura. Al

tensionarlo su largo aumenta. En ambos casos el cilindro de cobre, al igual que el resorte se opone a la fuerza externa. No se comporta como una plasticina. Recupera -si las fuerzas aplicadas no son excesivas- su tamaño original.
Esta es la característica que hace el modelo de un resorte tan importante en todas las áreas de la física: representa un modelo estable.

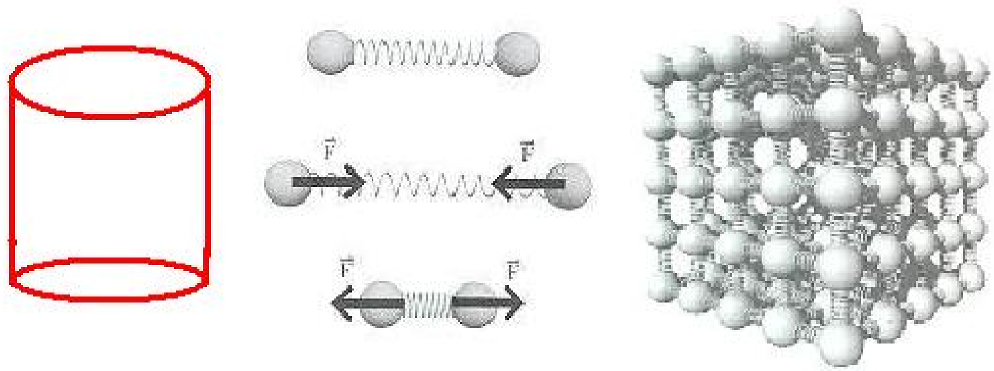


Figura VII.3: *El modelo de un cilindro de cobre que, para simplificar los cálculos, suponemos de sección cuadrada y con una altura mayor que sus lados. El ladrillo básico son esferas unidas por resortes. Es un modelo clásico de un sólido. (Extraído desde Ref. 1)*

.

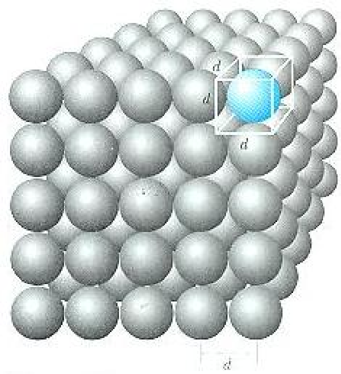
Un sólido es difícil de comprimir: puede resistir una carga importante sin cambiar notablemente su forma original. Tampoco se desarma si lo sometemos a tracción. Los átomos de un sólido no se escapan (o evaporan) con la rapidez de la observada en un líquido, por ejemplo. De este modo un resorte es un primer modelo razonable de un sólido que responde a estas características. Es lo que se indica en la Fig.VII.3.

El número de átomos en un volumen de 22,4 litros, con una presión atmosférica de aproximadamente 10^5 pascal (o una atmósfera) y una temperatura (300^o K, es de $6\times10^{2}3$ átomos. La magnitud de este número indica que el modelo básico de un sólido debe ser una gran red de resortes que unan los átomos considerados como partículas situados en los vértices de los cubos básicos del modelo.

Esta es una posibilidad, es un modelo cúbico, podría ser de cuerpo centrado y tener un átomo adicional al centro del cubo... .Elegimos éste por ser el más simple y probaremos si los resultados que obtenemos son razonables.

Para que un modelo sea de utilidad además de ser simple debe reproducir algunas de las características del sólido al cual representa. Debemos, por tanto, reproducir algunas de las características de este modelo y verificar su grado de aproximación al comportamiento de un sólido real.

Un primer paso es estimar la distancia de separación entre los átomos. este número nos indicaría (aproximadamente) el largo natural del resorte. Consideramos que existe un átomo por celda, que el material es el Cu, con su peso molecular **63,55** y el número de Avogadro $\mathbf{N}_A = 6{,}022\times10^{23}$ [1/mol]. Esto nos dice que 63,55 gr de cobre tienen $6{,}022\times10^{23}$ átomos. La densidad del cobre es 8,96 gr/cc.



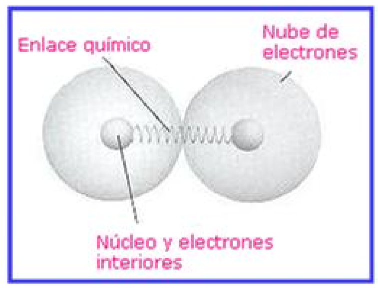


Figura VII.4: *Cada átomo ocupa un cubo de lado* **d**. *El núcleo del átomo está rodeado de una nube de electrones. Cda átomo es neutro, pero interactúa con el vecino a través de las deformaciones que experimenta esta nube. Este efecto se modela mediante un resorte que une ambos núcleos. (Extraido de ref. 1)*

.

Si consideramos que un átomo de cobre ocupa un cubo de lado **d** (ver Figura) podemos obtener el valor de esta distancia **d**. Una regla de tres nos dice que si existen $\mathbf{N}_A$ átomos en 63,55 gramos, en 8,96 existirán 85×10^{21} átomos. Pero estos se ubican en 1 cc de volumen, de acuerdo a la densidad del cobre. por tanto la distancia entre átomos en esta cubito es $\approx\ 2\times10^{-10}$ m. Esto es aproximadamente 1 $A^o = 10^{-10}$ m, que será el valor que usaremos.

Como no existe físicamente un resorte entre los átomos (obvio) el resorte modela la fuerza que se produce a través de la interacción de la nube de electrones de dos núcleos cercanos.

Con este modelo, podemos estimar la rigidez del resorte (imaginario) que una a dos átomos vecinos $\mathbf{k}_{\mathbf{atómico}}$. De alguna forma la rigidez de este resorte debe estar ligada a la naturaleza del material de prueba que usamos. Físicamente esto puede provenir de varias fuentes, una debe ser la estructura cristalina que posee el cristal. Esa información nos la da lo que se denomina el **módulo de Young: Y**, asociado a este metal. El módulo de Young es la razón entre la tensión (o stress) que es fuerza por unidad de superficie y por tanto se mide en pascal por cm^2, y la deformación (strain) que es la razón entre la deformación experimentada por un sólido en una cierta dirección y su largo en la misma dirección, de manera que resulta ser un número sin dimensiones. Estas cantidades se introducen acá para que sean independientes del tamaño del modelo que estamos usando.

$$Y = \frac{\text{fuerza por unidad de superficie}}{\text{porcentaje de elongación}} = \frac{F/A}{\Delta L/L}.$$

Las letras que identifican estas cantidades son:

$$\text{strain} \equiv \epsilon = \frac{\Delta\, L}{L}, \qquad \text{tensión} \equiv \sigma = \frac{F}{A}.$$

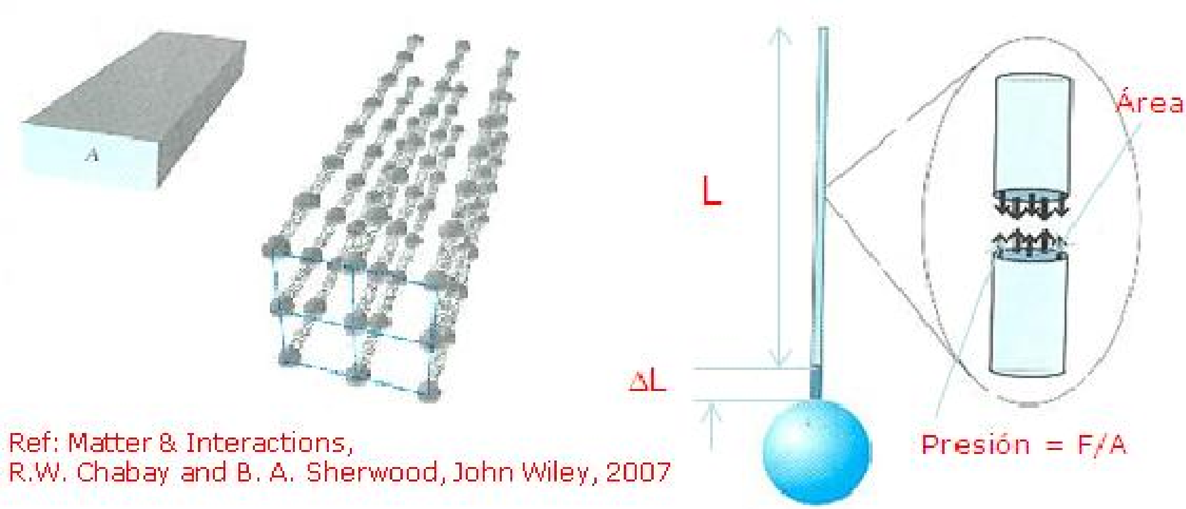


Figura VII.5: *Una ilustración del modelo de resortes interatómicos usados en serie y en paralelo para modelar el trozo de cobre, de sección rectangular que aparece a la izquierda. El dibujo de la derecha ilustra la definición de strain (Δ L/L) y el stress (F/A). (Extraido desde Ref. 1)*

.

Para hacer esta estimación, simplificamos aún más el modelo y despreciamos los resortes perpendiculares a la dirección en la cual aplicaremos una tracción para estimar el módulo de rigidez $\mathbf{k}_{\textbf{atómico}}$ en función de cantidades elementales, como la distancia interatómica **d**, **E** el módulo de Young y otras constantes.

La estrategia a seguir es: El modelo consiste de una serie de tiras de resortes longitudinales. Para calcular su rigidez efectiva debemos usar la rigidez equivalente para resortes en serie (cada columna de resortes) y en el efecto de la suma de las cadenas paralelas de resortes. Con este cálculo obtendremos la rigidez efectiva de este trozo de cobre.

Veamos cuál es el valor numérico del módulo de Young para el cobre. Su valor es 117×10^9 pascal. La definición del módulo de Young es una generalización de la ley de Hooke

$$\sigma = Y\,\epsilon, \qquad \text{de modo que} \qquad Y = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F/A}{(\Delta\,L)/L} = \frac{F}{\Delta\,L}\,\frac{L}{A}. \tag{VII.5}$$

El significado de estas letras está indicado en la Figura[**?**].

Ejercicio

Demostrar que, a partir del modelo propuesto, la rigidez del alambre de cobre en función de la rigidez del resorte interatómico es

$$\mathbf{k}_{\text{atómico}} = \frac{\mathbf{k}_{\text{alambre}}\mathbf{N}_{\text{cadena}}}{\mathbf{N}_{\text{transversal}}}. \tag{VII.6}$$

Nos referimos a un alambre porque supondremos que el diámetro es mucho menos que su largo **L**.
□

Si aplicamos una fuerza F en los extremos del bloque, podemos estimar cuánto se alarga la cadena de resortes, lo que denominamos Δ **L**. (Ver Figura).

Con estos datos podemos estimar la rigidez del resorte interatómico, $\mathbf{k}_{\textbf{atómico}}$ asociado a este modelo propuesto.

El módulo de Young está normalizado, de modo que sea un número que caracterice un material independiente de sus dimensiones, por eso se utiliza la Tensión σ=F/A y la elongación relativa ϵ = Δ **L/L**.

$$E \equiv \frac{\sigma}{\epsilon}. \tag{VII.7}$$

Utilizando el resultado del ejemplo anterior e introduciendo la ley de Hooke,

$$\mathbf{k}_{\text{alambre}} = \mathbf{F}/(\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{L} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}_{\text{atómico}} = \frac{Y\,A\,N_{\text{cadena}}}{L\,N_{\text{transversal}}}. \tag{VII.8}$$

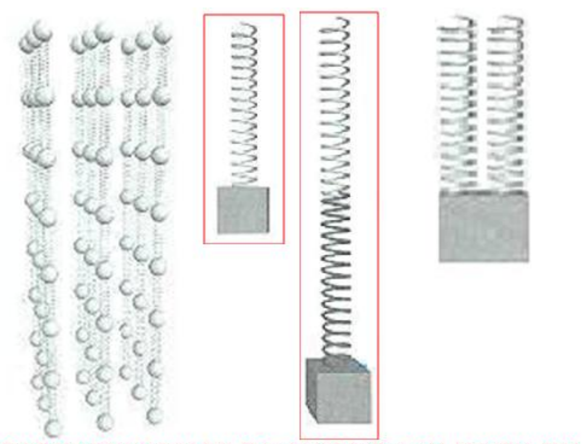
donde usamos el resultado [**?**]. de aquí, reemplazando las definiciones se obtiene que

$$\mathbf{k}_{\text{atómico}} = Y\,d \quad [Pascal\,\times\,m]. \tag{VII.9}$$

Reemplazando los valores del cobre, obtenemos que $\mathbf{k}_{\textbf{atómico}} = \approx 25$ Newton-m.
Este valor para la rigidez del resorte instalado entre los átomos es mayor que la rigidez del *slinky*, el resorte como culebra que se alarga fácilmente cuando se le cuelga una masa pero menos que muchos otros. Por ejemplo el alambre de cobre de largo 1m y $\mathbf{d} = 1$mm, es aproximadamente 10^7 Pascal-m. Mucho mayor que la rigidez del resorte interatómico.

Al estudiar la energía, más adelante, podremos retomar este tema y el del músculo, que introduciremos en la siguiente subsección.

El siguiente paso es estimar el número de resortes puestos en serie en cada fila y cuántos resortes debemos considerar en paralelo. Esto último involucra la sección transversal del material.


Ref: Matter & Interactions, R.W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley, 2007

Para calcular el número de resortes, basta conocer la distancia interatómica **d**. El número de tiras de resortes está dado por $\mathrm{N}_{transversal}$ = $\mathbf{A/d}^2$. (Ver Figura, donde hemos supuesto una sección transversal cuadrada para facilitar los cálculos.)

Lo mismo se puede hacer para calcular cuántos resortes en serie en cada cadena es preciso considerar. Esto es $\mathbf{L/d} = \mathbf{N}_{cadena}$.

En la realidad, al elongar un alambre, su diámetro disminuye. Este efecto no aparece en este modelo porque hemos eliminado los resortes transversales.

VII.2.1. El Músculo como un Resorte

Los músculos generan dos tipos de fuerza: una fuerza activa a través de la contracción y una fuerza pasiva donde no existe contracción. La fuerza siempre está en la forma de tensión, los músculos siempre se acortan. Para volver a su posición normal debe existir otro músculo que actúe en oposición. No pueden ni empujar ni torcer. Otra característica es que pueden contraerse rápidamente pero deben ser elongados lentamente. Cada filamento de músculo estriado puede ejercer una fuerza de 530 picoPascal. Existen alrededor de 5.7×10^{14} de estos filamentos por metro cuadrado de sección transversal en un músculo. De esta forma puede ejercer una fuerza de 300 kPa. La máxima fuerza que puede ejercer

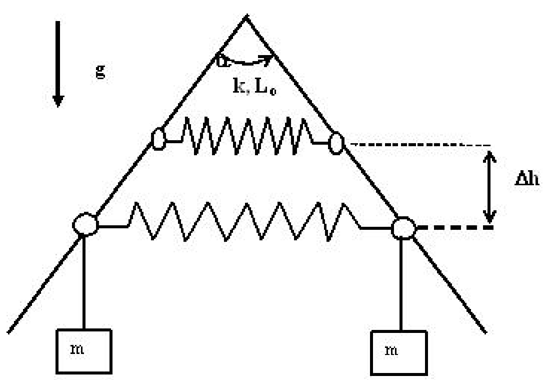
un músculo ocurre cuando no existe desplazamiento. Al contraerse, la velocidad incorpora una disipación y se gasta parte de la energía.
La velocidad **V** con que los músculos pueden contraerse fue enunciada por A. V. Hill (1938)

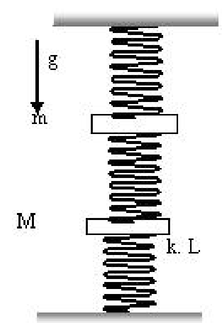
$$V = b\,\frac{F_o - F}{F + a}, \tag{VII.10}$$

donde $\mathbf{F}_o$ es la tensión máxima que puede ejercer, **a** y **b** son constantes cuyas dimensiones corresponden a la de fuerza y velocidad, respectivamente. Se puede constatar que para el máximo valor de la fuerza F_o, la velocidad es nula.

VII.3. EJERCICIOS

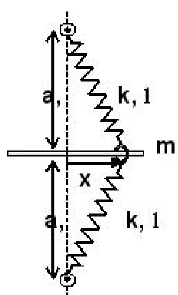
1.– Un alambre tiene forma de **V** invertida. Mediante unos anillos sin roce se instala un resorte de largo natural L_0 y constante **k**. De estos mismos anillos se cuelgan dos masas idénticas **m**, como se señala en la Figura. Si estas masas se depositan suavemente, el alambre se alarga y baja hasta alcanzar una posición de equilibrio. Dado los valores: del ángulo superior α, k, m, L_0 y g. Encuentre el valor de **h** .

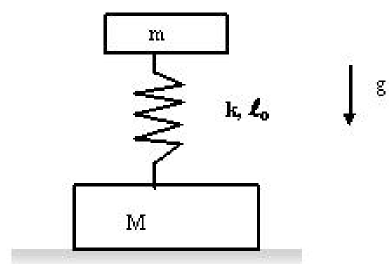




2.– Se tiene un sistema de dos masas **m** y **M**, puntuales, que están colgadas verticalmente de la forma que indica la figura. Si los resortes son iguales y cada uno tiene un largo **L** y constante de rigidez **k**, encuentre a qué distancia de la superficie superior se ubica cada una de las masas. Las masas están en reposo. Para comprobar su resultado, haga m=0, y compruebe la respuesta anterior. Calcule lo mismo en el caso que **M**=0.

3.– En el sistema de la figura aparecen dos resortes idénticos unidos en el extremo común por un anillo de masa **M**. este anillo se puede deslizar sin roce a lo largo de la barra horizontal. No considere el peso del anillo.
Encuentre el punto de equlibrio (el valor de **x**) del sistema de resortes para los casos
i.- ℓ < a,
ii.- $\ell = a$,
iii.- $\ell > a$.





4.– Dos masas **M** y **m**, están unidas por un resorte de largo natural ℓ_0 y constante k. Permanecen en posición vertical como se indica en la Figura. Cuando el sistema está en reposo,
a.- ¿Cuál es la reacción del piso sobre M?

b.- ¿Cuánto se acortó el resorte debido al peso de m?

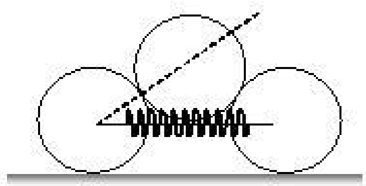
c.- ¿Cuánto debo hundir la masa **m** para lograr -apenas-, levantar la masa **M** del piso?

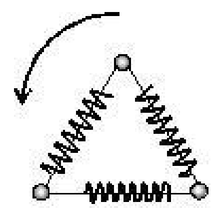
d.- Suponga que invierto el sistema, la masa **m** queda bajo la masa **M**. ¿Cuánto debo hundir la masa **M** para que la masa **m** esté a punto de levantarse
del piso.

e.- Considere el caso c.-, ¿Cuál es la aceleración instantánea que tiene la masa **m** en el instante que está a punto de levantar la masa **M**?

5.– Los tres cilindros de la figura tienen la misma masa M, radio R y sus mantos tienen roce despreciable. El largo natural del resorte, de constante de rigidez k, es $2\,R$ y sus extremos se fijan en los ejes de los dos cilindros ubicados sobre el piso. Si el cilindro superior se deposita *lentamente*, para evitar que aparezcan oscilaciones, los cilindros de la base se separan y el resorte se estira hasta que la recta que une el eje del cilindro superior con el de la base, forma un ángulo θ, desconocido. Encuentre una ecuación que permita calcular este ángulo en función de los parámetros conocidos del problema.

Usando los métodos de aproximación para la función seno y coseno estudiados al comienzo del libro, encuentre un valor aproximado para el ángulo θ. Para ello suponga que el triángulo se deforma muy poco y que $\theta = 60^o + \phi$ con $\phi << 1$, medido en radianes.



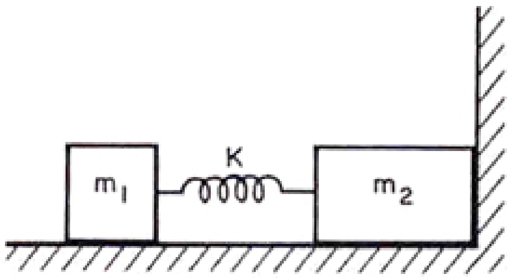


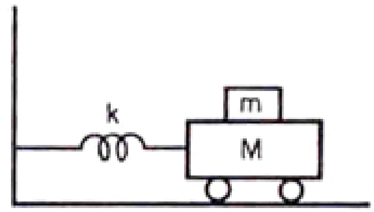
6.– Tres resortes idénticos de rigidez **k** y y largo natural **L**, se unen formando un triángulo equilátero. En cada uno de los vértices de este triángulo se instala una masa **m**. El sistema se coloca sobre una mesa plana con roce despreciable y en seguida se la hace girar con velocidad angular ω. Se pide calcular el nuevo valor que adopta el largo de este triángulo equilátero bajo estas condiciones.

7.– Dos masas distintas $m_1 = m,\ m_2 = 2m$, descansan sobre una mesa sin roce. Si un resorte de constante k es comprimido una distancia d, con m_2 pegado a la pared y entonces el sistema es abandonado desde el reposo, encontrar qué distancia viaja m_1 antes que m_2 comience a moverse.

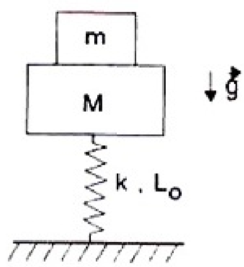
8.– Dado el oscilador mecánico mostrado en la Figura. Encontrar la amplitud máxima de oscilación para que la masa superior no resbale sobre M. El coeficiente de fricción estática entre las dos masas es μ.

9.– Considere un bloque de masa M colocado sobre un resorte vertical (fijo a él) de constante k y largo natural L_o. Sobre el bloque se coloca una partícula de masa m. Suponga que inicialmente se comprime el resorte en una distancia d con respecto a





la posición de equilibrio del sistema. Calcule la altura máxima (sobre el suelo) que alcanza la masa m una vez que se libera el resorte.



VII.4. Soluciones

Problema # 4

Para que la reacción sobre la masa M se anule, el resorte debe estar con un largo mayor que su largo natural

$$F = Mg$$

El alargamiento del resorte debe ser tal que al menos la fuerza que lo genera sea igual en magnitud al piso de la masa $M : F = Mg$.

Para generar esa fuerza el resorte debe alargarse Δ (a partir de su largo natural)

$$\Delta = \frac{Mg}{k}$$

Como inicialmente, en su nivel de reposo estaba hundido $\delta = \frac{mg}{k}$

Como el resorte oscila alrededor de su nivel de reposo, la amplitud mínima de oscilación debe ser

$$\Delta + \delta = \frac{(M+m)g}{k}.$$

Invirtiendo las masas no altera el resultado que es simétrico en la suma de las masas.

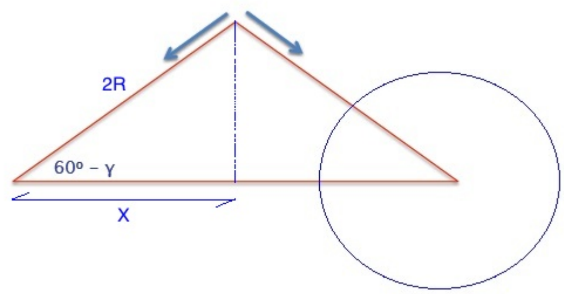
Problema # 5

$$2T\,\mathrm{sen}\,\phi = M\,g, \qquad T\cos\phi = F_0$$

$$x = 2R\cos\phi$$

El alargamiento del resorte con respecto a su largo natural

$$2x - 2R = 2R(2\cos\phi - 1)$$



$$k2R(2\cos\phi - 1) = T\cos\phi = \frac{Mg\cos\phi}{2sen\phi}$$

$$\cos\phi\, Mg = 4Rk(2\cos\phi - 1)sen\phi$$

$$\frac{Mg}{4Rk} = (2\cos\phi - 1)\frac{sen\phi}{\cos\phi}$$

Analicemos esta expresión. Si $\phi = 60°$, indica que no existe deformación del sistema de cilindros, permanece como si no tuviera un cilindro encima. Esto corresponde a

$$M\,g\,=\,0 \qquad \text{ó} \qquad k\,\rightarrow\,\infty$$

Si Mg no es nulo, el ángulo ϕ debe disminuir, por tanto $\cos(\phi + \epsilon) > 1/2$.

Resolvemos esta ecuación para el caso $\dfrac{M\,g}{4\,R\,k} \simeq \epsilon$ con $0 < \epsilon << 1$ y supongamos que $\phi = 60°$ se deforma a $\phi = 60° - \gamma$, con γ muy pequeño.

$$2\cos\phi \cdot \frac{sen\phi}{\cos\phi} - \tan\phi = 2sen(60° + \gamma) - \tan(60° - \gamma)$$

$$\begin{aligned}
sen(60° - \gamma) &= sen60° \cos\gamma - sen\gamma \cos 60° \simeq \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\gamma \\
\cos(60° - \gamma) &= \cos 60° \cos\gamma + sen\gamma sen60° \simeq \tfrac{1}{2} + \gamma \cdot \tfrac{sqrt3}{2} \\
\tan(60° - \gamma) &\simeq \frac{\sqrt{3} - \gamma}{1 + \sqrt{3}\gamma} \simeq (\sqrt{3} - \gamma)(1 - \sqrt{3}\gamma) \simeq \sqrt{3} - 3\gamma - \gamma \\
\tan(60° - \gamma) &\simeq \sqrt{3} - 4\gamma \qquad \text{con}\gamma\text{en radianes.} \\
2\cos\phi \tfrac{sen\phi}{\cos\phi} - \tan\phi &\simeq (\sqrt{3} - \gamma) - \sqrt{3} + 4\gamma \\
&\simeq 3\gamma \qquad (\gamma\text{en radianes})
\end{aligned}$$

Para pequeñas deformaciones

$$\begin{aligned}
3\gamma &= \tfrac{Mg}{4kR} \\
\gamma &= \tfrac{Mg}{12kR}\ \text{radianes}
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] **Matter and Interactions I, Modern mechanics**, R. W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley and Sons,2007.

[2] **Newton Rules Biology**, C. J. Pennycuik, Oxford University Press, Oxford,1995.

[3] Retrato de Hooke: www.newscientist.com/blogs/shortsharpscience/2012/01/hooke-springs-to-life-in-new-p.html

[4] **Física Universitaria**, Harris Benson, Compañá editora Continental, S. A DE C., México, Primera reimpresión, 1996.