INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 23 de abril de 2016

Índice general

Capítulo VII

ROCE ESTÁTICO y CINÉTICO

VII.1. INTRODUCCIÓN

Sabemos que no existe el movimiento perpetuo. Si observamos un cuerpo deslizándose sobre otro, tarde o temprano el cuerpo se detendrá a menos que exista una fuerza externa que lo mantenga en movimiento.

La fuerza que se opone al movimiento relativo entre los dos cuerpos se denomina *fuerza de roce cinético*. Se origina en la interacción de ambas superficies en contacto.

Un fenómeno similar ocurre cuando intentamos mover un cuerpo que está en *reposo*. Al hacerlo, notamos que a pesar de la fuerza aplicada, el cuerpo no se mueve. La fuerza que impide el desplazamiento se denomina *fuerza de roce estático*.

Se sabe muy poco acerca de estas fuerzas y es muy díficil medirlas porque dependen de las propiedades de la superficie, como: pulido, existencia de óxidos en la superficie, naturaleza de los materiales,... etc. También dependen de la historia de las superficies: si los bloques han sido deslizados previamente o no. Todo esto hace aún más difícil cuantificar su efecto.

Un ejemplo ilustrativo que aparece en la literatura consiste en lo siguiente: un vaso colocado sobre una bandeja de vidrio se tira con una cuerda y al medir la fuerza necesaria para moverlo se puede apreciar que es más o menos constante. Esto da una idea de la fuerza de roce o fricción cinética.

Sin embargo si la superficie se moja, el agua separa las partículas de polvo y la grasa que había sobre la superficie y al arrastrar el vaso se nota que la fuerza necesaria para hacerlo es ahora mayor. Los objetos tienden a pegarse. Al separarlos notamos que pueden existir rayas en el vidrio debido a que el contacto vidrio-vidrio es fuerte y se resiste a su separación.

Las primeras investigaciones acerca de la fricción fueron realizadas por Leonardo da

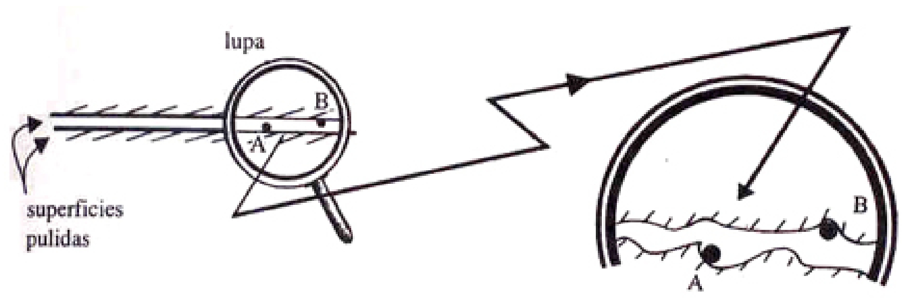


Figura VII.1: *Dos superficies, por suaves que parezcan al tacto, tienen irregularidades que pueden ser vistas mediante un microscopio. Las fuerzas de roce tienen su origen en las microsoldaduras o en la resistencia al movimiento generada por estas irregularidades.*

Vinci, hace 450 años atrás, pero nunca fueron publicadas y sólo se conocieron después que los investigadores franceses: Guillaume Amontons y Charles-Augustin de Coulomb, publicaron sus trabajos. Estos últimos propusieron *cuatro leyes* acerca del comportamiento de la fricción. Hoy sólo tres de ellas sobreviven, y su validez empírica en numerosas situaciones ha sido corroborada por aproximadamente los últimos 300 años.

Estas tres leyes son:

- La fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal que ejerce el cuerpo sobre la superficie.
- La fuerza de fricción no depende del tamaño de las superficies en contacto.
- El coeficiente de fricción depende de las propiedades de las superficies que se deslizan.

La cuarta ley, que es incorrecta, afirmaba que el roce no dependía de la velocidad relativa de las superficies. Al final de este capítulo comentaremos acerca de la dependencia que existe entre la fuerza de roce y la velocidad y su aplicación al caso de las cuerdas de un violín y el origen del ruido que generan los goznes de las puertas.

Podemos afirmar que el *roce estático* se origina por la aparición de reacciones químicas entre las moléculas de ambas superficies que logran ubicarse muy cerca una de otra. Esta ligazón molecular genera microsoldaduras en determinados puntos de las superficies en contacto y es el origen de la fuerza de fricción estática que impide el desplazamiento relativo de dos cuerpos inicialmente en reposo. Al deslizar una sobre otra, se rompen estos vínculos, las moléculas quedan vibrando y disipan parte de su energía como calor, hecho que se puede constatar al tocar las superficies.

Una vez que las superficies comienzan a desplazarse entre ellas, estas aristas microscópicas se enganchan unas con otras y dan origen al *roce cinético*.

Todo este argumento es *cualitativo*. Las prescripciones que siguen a continuación no pueden tener el caracter de una ley fundamental de la naturaleza sino más bien un *resultado empírico*: una conclusión más o menos general que se obtiene después de realizar muchos experimentos.

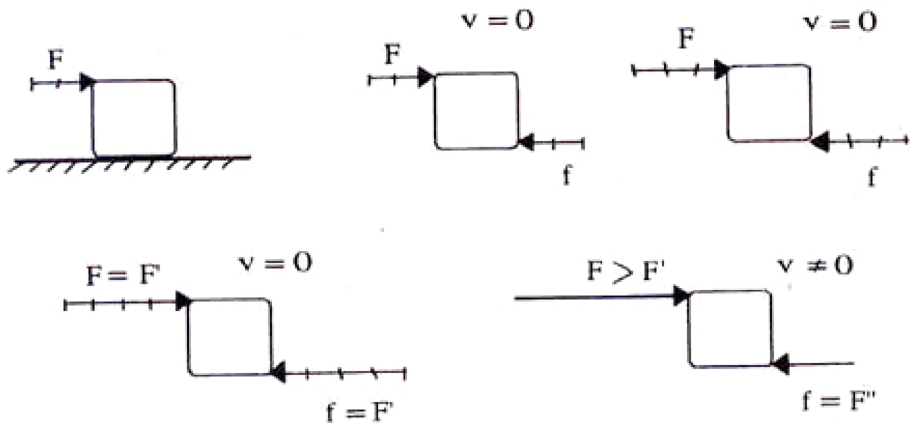


Figura VII.2: *A medida que la fuerza horizontal F aumenta en magnitud, también lo hace la fuerza de roce f, hasta que llega a su cota máxima F′. Cuando F se hace mayor que este valor F′, el bloque comienza a moverse y el roce estático se transforma en roce cinético.*

Supongamos que tenemos un bloque descansando sobre el piso y que intentamos desplazarlo aplicando una fuerza horizontal F que la vamos incrementando lentamente. La fuerza de roce estático la designamos por f.

A continuación describimos la forma como actúa la fuerza de roce cuando intentamos deslizar un bloque sobre un piso.

a) Cuando F varía desde 0 hasta un cierto valor F', la fuerza de fricción también aumenta junto con ella, desde 0 hasta F'.

b) Cuando $F = F'$ el bloque está a punto de comenzar a moverse. El valor de F' es fijo y depende en forma complicada de todos los parámetros mencionados más arriba. Por ahora olvidamos este último comentario y suponemos que tiene un valor conocido y fijo.

c) Al aumentar levemente el valor de F, es decir al hacer $F > F'$, la fuerza de roce permanece constante $f = F'$, y el bloque comienza a moverse.

d) Cuando F es mayor que F' y el bloque está en movimiento, la fuerza de roce disminuye $f < F'$. En la mayoría de los casos esta disminución es pequeña.

Nos queda por determinar el valor de F'. Adoptamos la ley de Coulomb para el roce en seco y definimos el valor de F' de la siguiente forma:

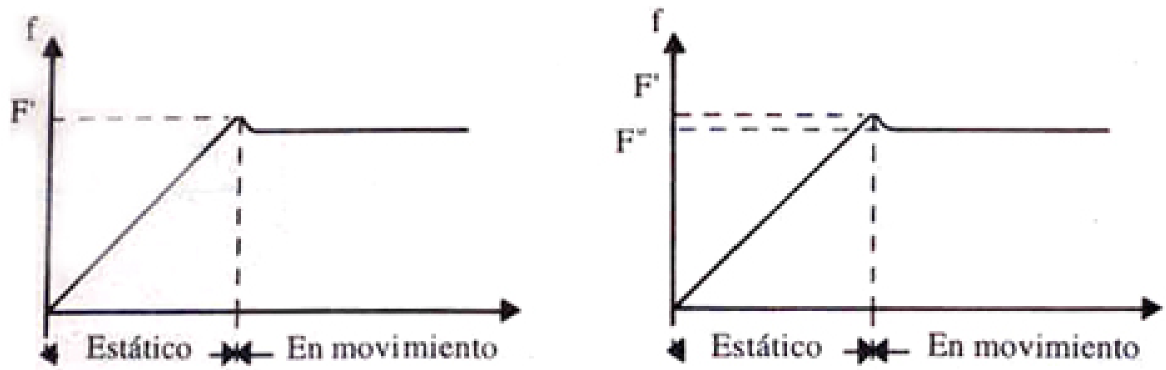


Figura VII.3: *Se incluye un gráfico con la magnitud de la fuerza de roce a medida que la magnitud de la fuerza externa aumenta. El equilibrio se rompe y, por tanto, el movimiento comienza cuando se alcanza el valor F′. En este intervalo la fuerza de roce disminuye y se estabiliza en el valor F″, correspondiente al roce cinético.*

Definición

El valor máximo de la fuerza de fricción $|\vec{F}'|$, es proporcional a la fuerza normal que se ejerce entre las superficies en contacto:

$$|\vec{F}'| = \text{Fuerza máxima de fricción estática} = \mu\,|\vec{N}|, \tag{VII.1}$$

donde $\vec{N}$ es la fuerza normal entre las superficies y μ se denomina el *coeficiente de fricción*, y esconde nuestra ignorancia acerca del estado y características de las superficies en contacto que intervienen en el desplazamiento relativo.

Como se mencionó, existe un valor máximo para la fuerza de fricción estática y otro levemente menor para la fuerza de fricción cinética. Para distinguir ambos definimos un coeficiente de fricción cinético μ_c y otro estático μ_e.

$$\vec{F}_{roce} \equiv \mu_e \cdot |\vec{N}|\hat{t}, \tag{VII.2}$$

donde $\vec{F}_{roce}$ *representa la fuerza de roce que actúa en la dirección tangente a la superficie de contacto $\hat{t}$, y apunta en el sentido opuesto al movimiento relativo, en el caso de la fricción cinética y en el sentido opuesto a la fuerza aplicada, en el caso de la fricción estática*.

En resumen: El módulo de las fuerzas F' y F'', es proporcional al módulo de la fuerza normal a la superficie. El factor de proporcionalidad son los coeficientes de fricción estática en el primer caso y cinética en el segundo. La dirección de la fuerza de roce es siempre tangencial a la superficie de contacto y su sentido se opone al movimiento relativo.

Para sacar del reposo a un cuerpo debemos aplicar en forma tangencial una fuerza $F > F'$ y una vez en movimiento al menos una fuerza F'' para mantener su velocidad.

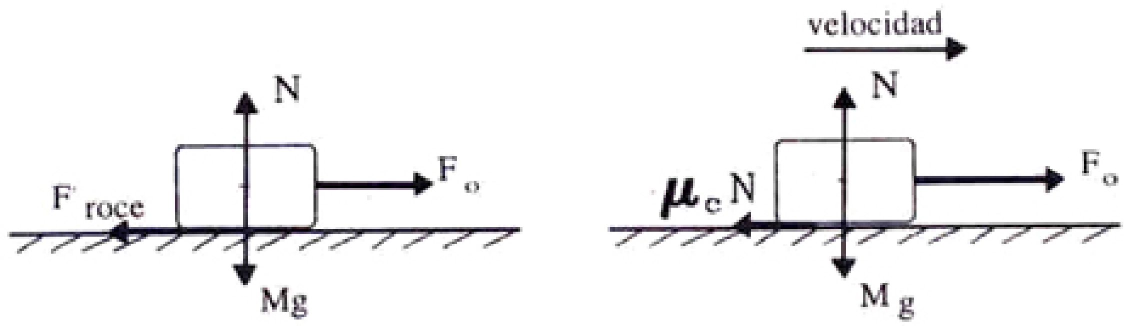


Figura VII.4: *Se muestra el diagrama de cuerpo libre y la definición de la fuerza de roce con el coeficiente de roce* **estático** *(antes de que se produzca el movimiento) y el roce* **cinético**, *en el caso de un bloque deslizando sobre una superficie rugosa.*

VII.2. Ejemplos

Antes de empezar a resolver un problema, es fundamental tener claro cuáles son los datos (es decir, lo que se conoce) y cuáles son las incógnitas. Después de plantear las ecuaciones debemos numerarlas (cada signo "=" revela una ecuación). Si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, podemos resolver el problema, en caso contrario debemos buscar nuevas ecuaciones.

En todos los problemas en que interviene el roce debemos suponer, de un comienzo, el sentido que tendrá el movimiento. Esta condición se debe a que el roce siempre se opone al movimiento relativo, por lo tanto, para decidir su dirección y sentido es preciso predecir la dirección y sentido en que viajará el móvil.

Si el movimiento ocurre en sentido opuesto al observado, debemos volver al comienzo cambiando el sentido del movimiento relativo inicial.

Ejemplo

Resolvamos el movimiento de dos masas unidas por una cuerda de masa despreciable, una de ellas se desliza sobre un plano inclinado *con roce* y la otra cuelga, a través de una polea, del otro extremo de la cuerda.

En este problema suponemos conocidos: los valores de las masas, el coeficiente de roce cinético μ_c y el ángulo θ que forma el plano con el piso.

Se pide calcular la tensión de la cuerda y la aceleración de las masas M y m.

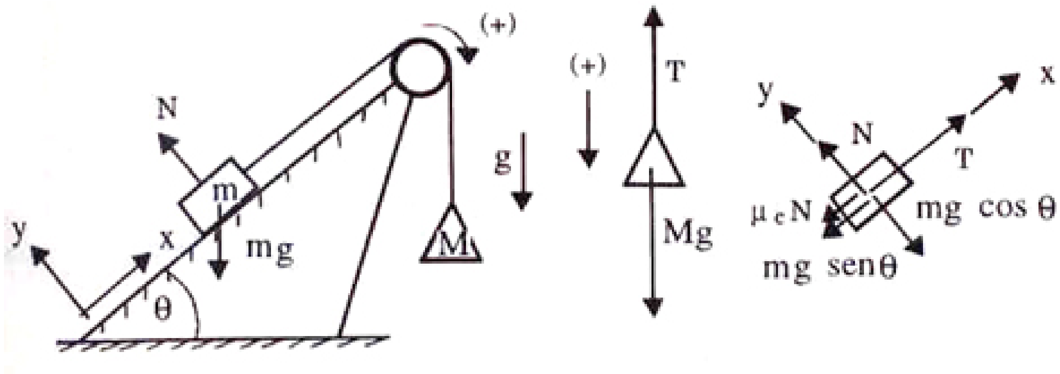


Figura VII.5: *A cada una de las masas le asociamos una fuerza que corresponde a su peso. Sobre m actúa la reacción del piso que se descompone en una fuerza normal al piso y otra tangente que identifica a la fuerza de roce.*

Recordemos que la cuerda debe estar siempre tensa. De esta forma la masa M se entera del movimiento de m únicamente a través de la tensión de la cuerda que debe (en módulo) ser la misma que la tensión que actúa sobre m. La polea del extremo no tiene roce y por lo tanto sólo cambia la dirección de la tensión. Como la cuerda es inextensible la aceleración de la masa M es la misma que la de m, sólo cambia su dirección.

Como ya establecimos cuáles eran las conexiones entre m y M, procedemos a elegir el sistema de coordenadas que mejor se adapte al problema. Designamos como eje–x a la dirección paralela a la superficie del plano inclinado. El eje–y es, por supuesto, perpendicular. Como el bloque se desliza sobre esta superficie, sin saltar o hundirse, éste es un sistema de coordenadas muy conveniente para resolverlo.

Enseguida hacemos el diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas. Para el primer bloque de masa m tenemos, en el *eje–y*:

$$1) \quad N - m\,g \cos\,\theta = 0,$$

De esta ecuación tenemos: $N = m\,g\,\cos\,\theta$.

Suponemos que la masa m remontará el plano en la forma indicada en la Figura. Si esta suposición es correcta, su ecuación de movimiento es:

$$2) \quad -\mu_c\,N - mg\text{sen}\,\theta + T = m\,a.$$

La ecuación de movimiento para M es:

$$3) \quad -T + M\,g = +M\,a.$$

Las incógnitas son N, T y a. Y como tenemos tres ecuaciones, de forma que podemos despejarlas.

De la ecuación 1) despejamos N y su valor lo incluímos en 2), obteniendo:

$$
\begin{aligned}
-\mu_c\, m\, g\, \cos\theta - m\, g \mathrm{sen}\,\theta + T &= ma \\
Mg - T &= Ma
\end{aligned}
$$

Sumando estas ecuaciones se cancela T y entonces podemos despejar la aceleración obteniendo:

$$a = \frac{M - m(\mu_c + \tan\,\theta)\cos\,\theta}{M + m}\, g.$$

Si la aceleración resulta ser negativa, debemos volver a las ecuaciones 1, 2 y 3 y plantearlas suponiendo que el movimiento se verificará en el sentido opuesto.

Como siempre, debemos comparar nuestros resultados con otros ya conocidos o con situaciones cuya solución es fácil de obtener.

Si el ángulo es $\theta = \pi/2$, entonces la aceleración está dada por:

$$a = g\frac{M - m}{M + m},$$

el mismo resultado obtenido para el sistema de las dos masas con una polea resuelto anteriormente.

Si m = 0, entonces $T = 0$ y $a = g$, que es lo esperado puesto que M estaría en ese caso en caída libre.

Si M = 0, entonces tenemos dos posibilidades: la masa m se desliza plano abajo o se queda en reposo. Esta situación es un caso particular de un ejemplo más complicado que discutimos a continuación.□

Ejemplo

Suponga conocido el coeficiente de fricción estática entre la masa m y la superficie del plano inclinado, en la misma configuración estudiada en el ejemplo anterior.

Encuentre el rango de valores de m para el cual el sistema permanece en reposo.

En el ejemplo anterior supusimos que el peso de la masa M lo hacía caer, arrastrando consigo a la masa m.

Ahora debemos considerar otra posibilidad: si m aumenta su valor puede primero, detener el movimiento en el sentido indicado en el ejemplo anterior y, si m sigue aumentando, quedar a punto de levantar la masa M.

Estudiemos ambos límites en forma separada.

a) *El valor mínimo de m para que el sistema permanezca en reposo.*

Como no hay movimiento, debemos usar el valor del coeficiente de fricción estática. Este apunta hacia el vértice inferior del plano inclinado. La masa M se encuentra a punto de caer.

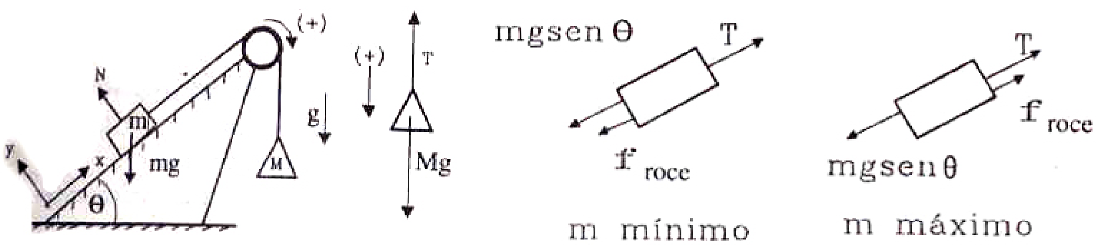


Figura VII.6: *La fuerza de roce se opone al inicio del movimiento hasta que alcanza un valor límite igual a $\mu\, N$. En el primer caso apunta hacia el vértice inferior del plano (m mínimo). En el segundo caso invierte su sentido.*

Conservando el convenio de signos del ejemplo anterior, el diagrama de cuerpo libre nos da la siguiente ecuación:

$$0 = -f_{\text{roce est.}} + T - m\, g\, sen\, \theta.$$

Como no existe aceleración, el diagrama de cuerpo libre para M es directo: $T = M\, g$.

También, como estamos analizando el caso en el que m es *mínimo*, la fuerza de roce debe alcanzar su mayor valor: $f_{\text{roce est.}} = \mu\, m\, g\, \cos\, \theta$, puesto que $m\, g\, \cos\, \theta$ es la fuerza normal que actúa sobre el plano. Reemplazando en la ecuación anterior, se obtiene:

$$0 = -\mu\, m\, g\, \cos\, \theta + M\, g - m\, g\, sen\, \theta,$$

$$m_{\text{mínima}} = \frac{M}{\cos\, \theta\, [\mu_e + \tan\, \theta]}.$$

Siempre existe un valor finito de m que puede sostener la masa M. El coeficiente de roce estático μ_e, contribuye a disminuir el valor mínimo de m necesario para sostener M.

Si $\theta = \pi/2$, entonces $m = M$ es la única solución, puesto que en este caso la fuerza normal sobre el plano es nula y por lo tanto no hay roce.

b) *El valor mínimo de m para iniciar el movimiento del sistema.*

El diagrama de cuerpo libre es similar al anterior con la excepción del sentido que adopta la fuerza de roce estático. Como el cuerpo m está a punto de comenzar a deslizar hacia abajo, la fuerza de roce apunta hacia el vértice superior del plano inclinado. Conservando la convención de signos del caso anterior, tenemos:

$$0 = +\mu\, m\, g\, \cos\,\theta + M\, g - m\, g\, sen\,\theta,$$

$$m_{\text{máximo}} = \frac{M}{\cos\,\theta\,[\tan\,\theta - \mu_e]}.$$

Este resultado tiene sentido sólo si $\mu_e < \tan\,\theta$: la masa m no puede ser negativa.

El caso $\mu = \tan\,\theta$ cobra sentido si $M = 0$. Este refleja la situación en la cual m permanece en reposo debido únicamente a la fricción estática con el piso.

En resumen, el sistema permanecerá en reposo si la masa m toma un valor entre:

$$\frac{M}{\cos\,\theta\,[\tan\,\theta - \mu_e]} \geq m \geq \frac{M}{\cos\,\theta\,[\tan\,\theta + \mu_e]}.\square$$

Cuando usamos μ_e siempre debemos tener presente que:

El roce estático responde a cualquier fuerza externa con la misma fuerza en dirección y magnitud pero, en sentido opuesto. Si la fuerza externa aumenta en intensidad, la fuerza de roce estático también lo hace hasta alcanzar un valor máximo.

Si la fuerza aplicada es mayor que este valor máximo, el cuerpo comienza a moverse, en cuyo caso debemos usar el coeficiente de roce cinético y poner la fuerza de roce en sentido opuesto a la dirección del movimiento.

Ejemplo

Obtener el valor *mínimo* de la fuerza F_0 para que m no deslice por el borde del bloque M (Figura [VII.7]).

Suponga conocidos los valores del coeficiente de roce estático entre ambos bloques, $\mu_{1\,e}$, el roce cinético entre la masa M y el piso $\mu_{2\,c}$, y los valores de las masas m y M, que se indican en la Figura [VII.7].

Comenzamos examinando la componente horizontal de las fuerzas que actáun sobre todo el sistema (las masas M y m) para obtener una ecuación para F_0. Junto a ella aparece la aceleración a_0, que tampoco conocemos. (Dos incógnitas y una ecuación),

$$F_0 - \mu_{2\,c}(M + m)g = (M + m)a_0.$$

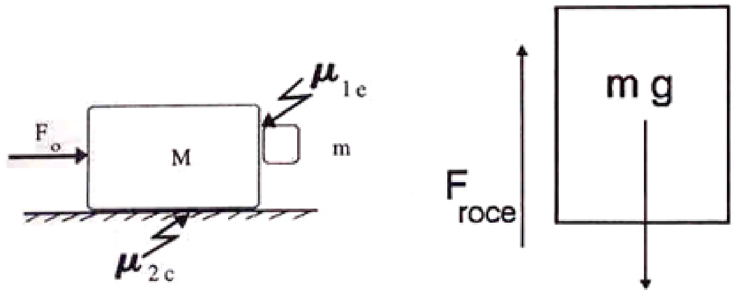


Figura VII.7: *Aquí debemos aplicar una fuerza de reacción normal (en este caso una fuerza horizontal) de una magnitud tal que la fuerza de roce estático, no permita caer al bloque m. Se acompaña el diagrama de cuerpo libre de la masa m.*

Para obtener más ecuaciones debemos analizar el diagrama de cuerpo libre de m. Su componente horizontal da la siguiente ecuación:

$$R = m\, a_0,$$

donde $\vec{R}$ es la fuerza que ejerce el bloque M sobre m. Incluimos otra ecuación, pero ésta trajo una nueva incógnita: R.

La ecuación de Newton para la componente vertical envuelve al roce estático, sin embargo como nos piden el *valor mínimo* de la fuerza F_0 para que m no caiga, usamos entonces *el valor máximo de la fuerza de roce*. La ecuación es:

$$\mu_{1\,e}\, R - m\, g = 0.$$

Aquí hemos supuesto, al igual que en la ecuación anterior, que la masa m no se desliza, y por esta razón hemos podido usar $(M+m)\, g$, como la fuerza normal actuando sobre el piso . Si la masa m estuviera cayendo, la fuerza normal sobre el piso sería $M\, g + \mu_{1e}\, R$. En otras palabras, $\mu_{1e}\, R$ es igual a $m\, g$, sólo si la aceleración de la masa m es nula.

Volviendo a nuestro problema: ahora tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas: R, a_0 y F_0. Podemos entonces resolver el problema.

Despejando a_0 de las dos primeras ecuaciones, tenemos:

$$a_0 = \frac{g}{\mu_{1\,e}},$$

reemplazando este valor en la última ecuación, obtenemos:

$$F_0 = (M+m)\cdot g \cdot \left[\mu_{2\,c} + \frac{1}{\mu_{1\,e}}\right].$$

Verifiquemos si esta ecuación reproduce los resultados esperados en los casos límites. Si $\mu_{1\,e}$ es muy pequeña, la fuerza para mantener m en su lugar, debe ser apreciable, tal como se desprende de las ecuaciones.

También se puede observar que si no existe roce entre el piso y el bloque: $\mu_{2\,c} = 0$, entonces necesitamos una fuerza F_0 menor para mantener el bloque de masa m en reposo.

Ejemplo

Un bloque se desplaza con una *velocidad constante* V_1 sobre un plano horizontal bajo la acción de una fuerza F_1, también constante. El coeficiente de roce cinético entre ambas superficies es μ_c.

En un cierto instante le damos un golpecito lateral y posteriormente le aplicamos una fuerza constante F_2 –sin dejar de aplicar la fuerza F_1–, de forma que adquiera una componente *adicional* de velocidad V_2, *constante* y perpendicular a V_1.

Calcule el valor de la fuerza F_2 necesaria para comunicar al bloque esta velocidad adicional V_2. Suponga V_1 y V_2 conocidos.

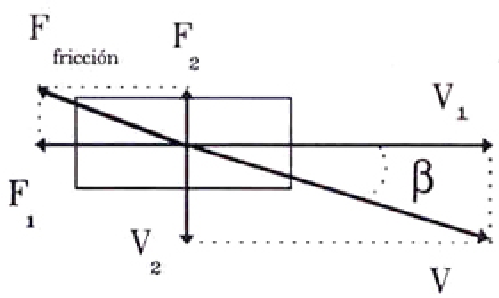


Figura VII.8:

Como el bloque se mueve con velocidad constante, la fuerza que debemos ejercer: $F_1 + F_2$, para mantener el movimiento debe ser constante, y su dirección y sentido, coincidir con el vector suma de velocidades $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

En cuanto a su magnitud, ésta debe ser la misma que la fuerza de roce cinético $\vec{f}$ pero, obviamente, en sentido opuesto.

Para mantener la velocidad constante las fuerzas F_1 y F_2 deben tomar los siguientes valores:

$$F_1 = f_{\text{cinética}} \cos\beta, \quad \text{y} \quad F_2 = f_{\text{cinética}} \,\text{sen}\,\beta.$$

De la figura sabemos que $\tan\beta = \frac{V_2}{V_1}$ y de la trigonometría usamos la siguiente igualdad:

$$sen\,\beta = \frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}, \qquad \text{de aquí tenemos:}$$

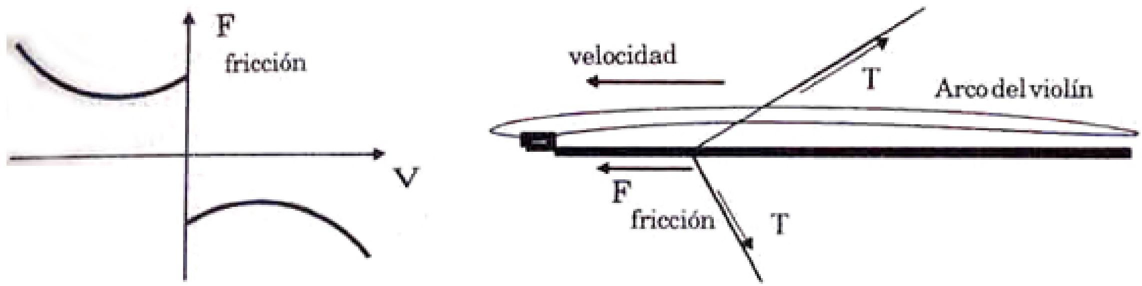


Figura VII.9:

$$F_2 = f_{\text{cinética}} \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}.$$

Si la velocidad V_2 es muy pequeña, entonces $sen\,\beta \approx \tan\,\beta$, y reemplazando el valor de la fuerza de fricción, obtenemos:

$$F_2 = \mu_c\, M\, g\, \frac{V_2}{V_1}.$$

M es la masa del bloque, la que suponemos conocida.$\square$

Es interesante analizar este resultado. Si la velocidad V_2 es muy pequeña comparada con V_1, entonces F_2, la fuerza necesaria para desviar a un objeto que resbala en la dirección de la velocidad V_1 es también pequeña.

Una aplicación de este resultado ocurre cuando intentamos sacar un clavo sin usar una herramienta. En ese caso se dobla el clavo y se tira haciéndolo girar permanentemente de lado a lado. Esta acción se realiza entonces exclusivamente para disminuir la fuerza necesaria para extraer el clavo de acuerdo al resultado obtenido en el último ejemplo.

Conviene analizar con espíritu crítico esta afirmación. Obviamente el hecho de girarlo genera un aumento de la temperatura entre el clavo y la madera y también un cierto desgaste que facilita la extracción. Con estos comentarios, es evidente que el resultado obtenido depende de otros parámetros que no se consideraron en el último ejemplo. Sin embargo, es interesante plantear y analizar esta situación, dado que es un truco al que se recurre en muchas ocasiones, por ejemplo, al instalar una conexión en una manguera de regadío.

Dependencia de la fuerza de fricción en la velocidad.

Esta dependencia es de gran importancia práctica. Es de interés conocerla en los casos de corte de metales, velocidad de los proyectiles, en la industria automotriz...etc.

La investigación en esta área encuentra muchas dificultades técnicas. Un ejemplo es el caso de una bala viajando por el cañón. Los experimentos han demostrado que la fuerza de fricción disminuye a medida que aumenta la velocidad, en forma rápida al comienzo y más lentamente después. A velocidades de alrededor de 100 m/s la fuerza de fricción comienza a aumentar con la velocidad. Esta dependencia se incluye en la Figura. La fricción resulta ser proporcional al cuadrado de la velocidad.

Esta misma dependencia de la fuerza de fricción en la velocidad ocurre entre una cuerda de violín y su arco y es la razón que sea posible escuchar sus acordes.

Una explicación cualitativa de este fenómeno y de otros más, aparece en la revista *Quantum*, en el número 6 de 1992. Una explicación más detallada del movimiento entre el arco y la cuerda del violín se puede encontrar en el libro: *Instrumentos Musicales: Artesanía y Ciencia*, H. Massmann y R. Ferrer, Dolmen, 1993, pags.158–162.

VII.3. EJERCICIOS

1.– Un bloque de masa **m**$_1$ **= 100 kg** es arrastrado a lo largo de una superficie sin roce, con una fuerza F_0, de modo que su aceleración es de **6 m/s**^{2} respecto al suelo.

Otro bloque **m**$_2$ **= 20 kg** se desliza por sobre el primer cuerpo de 100 kg, con una aceleración de 4 m/s^2, referida al piso.

a.- ¿Cuál es la fuerza de roce ejercida por la masa m_1 sobre m_2?

b.- ¿Cuál es la fuerza neta sobre el cuerpo de masa 100 kg?

c.- ¿Cuál es el valor de $\vec{F}_0$?

d.- Después que el cuerpo de 20 kg se desliga del cuerpo de 100 kg. ¿Cuál es la aceleración del cuerpo de 100 kg?

e.- ¿Cuál es el coeficiente de roce cinético entre los bloques?

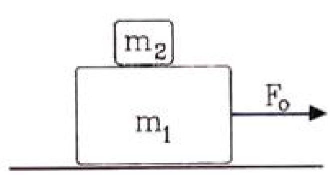
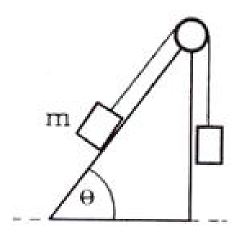


Figura VII.10: Problema # 1



Problema # 2

2.– Dos bloques de masa **m** y **M** están unidos por una cuerda y una polea ideales. Cuando se colocan en la posición indicada en la Figura: con **m** sobre el plano inclinado, liso y **M** colgando verticalmente). El bloque de masa **m**, sube con una aceleración cuya magnitud es $29/5$ [m/s^2].

Si a continuación se invierten las posiciones (**M** se coloca sobre el plano y **m** cuelga verticalmente) el cuerpo de masa **M** también sube pero con aceleración de magnitud 9/10 [m/s^2]. Determine:

a.- El valor del ángulo θ.

b.- La razón entre las masas: **m/M**.

c.- ¿Qué ocurriría si consideramos el roce en la superficie inclinada?

3.– Se arrastra un carro de masa **m** sobre una superficie rugosa con un coeficiente de roce cinético μ, entre las dos superficies (ver Figura).

Calcule el valor de la fuerza con que se debe tirar el carro en función del ángulo θ de la figura. Se desea que el carro se desplace con rapidez constante.

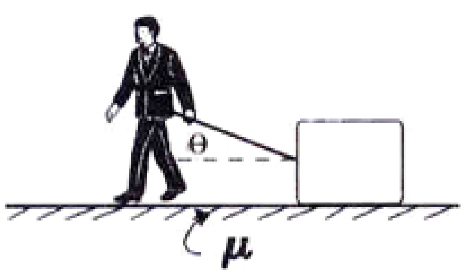
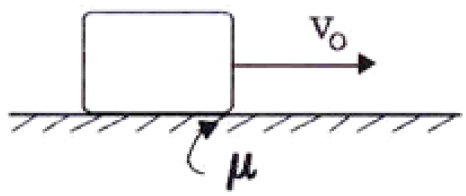


Figura VII.11: Problema # 3



Problema # 4

4.– Un objeto de masa **m** comienza a desplazars con una velocidad V_0, sobre una superficie rugosa con un coeficiente de roce cinético conocido μ.

a.- Obtenga la aceleración del objeto, después de adquirir esta velocidad inicial.

b.- ¿Cuánto tarda en detenerse?

5.– El bloque **B** de masa **m** parte del reposo desde el extremo superior del plano inclinado, que permanece fijo a la Tierra. Después de desplazarse una distancia **D** sobre el plano inclinado, el cuerpo lleva una velocidad igual al 50 % de la velocidad que hubiera adquirido si el roce con el plano fuera nulo.

Encuentre una expresión para el coeficiente de roce μ entre el plano y la masa **B**, en función de θ.

6.– Un objeto de masa m se encuentra en reposo sobre un plano rugoso (de coeficiente de roce estático μ_e y cinético μ_k). Se intenta moverlo aplicando una fuerza que forma un ángulo θ con la horizontal.

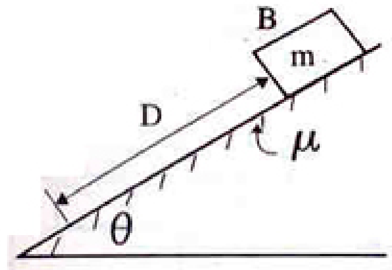
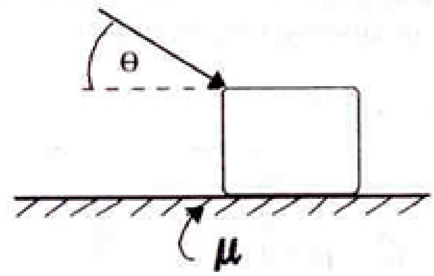


Figura VII.12: Problema # 5



Problema # 6

Encuentre el tamaño de la fuerza mínima (F_{min}) que es necesario realizar para mover el objeto.

7.– La cuña lisa de masa M, se desliza bajo la acción de una fuerza horizontal F. Sobre ella se coloca un bloque de masa m.

a) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas.

b) Determine el valor que debe tomar la fuerza aplicada F, para que el bloque más pequeño no resbale sobre la cuña. Suponga que no existe roce entre los bloques.

c) Ahora considere la existencia de roce sólo entre ambos bloques. (No existe roce entre la cuña y el piso). Calcule el valor máximo y el mínimo que debe tomar F, para el bloque no resbale sobre la cuña. Suponga los coeficientes de roce estático y cinético conocidos.

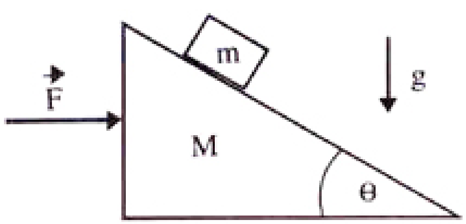
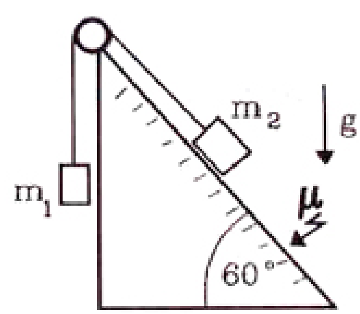


Figura VII.13: Problema # 7



Problema # 8

8.– El plano inclinado de la Figura forma un ángulo de 60° con la horizontal y es rugoso.

El bloque m_1 y el bloque m_2 se encuentran detenidos, obtenga el valor de la tensión de la cuerda y la fuerza de roce.

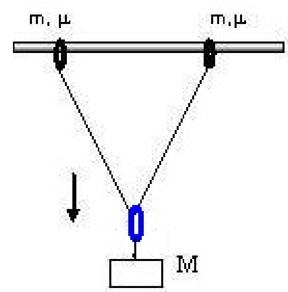


Figura VII.14: *Problema 9 .*

9.– Dos anillos de igual masa m soportan una masa M como se indica en la Figura. El coeficiente de roce estático entre los anillos y la barra horizontal es $\mu_{\text{estático}}$. Los anillos se unen al bloque de masa **M** mediante una cuerda ideal de longitud **L** y masa despreciable.

a.- Calcule la *máxima* separación horizontal que se puede establecer entre los anillos para que éstos permanezcan inmóviles debido al roce estático entre los anillos y la barra.

b.- Suponga que el aro de la derecha está hecho de un material diferente y por tanto tiene un coeficiente de roce estático $\mu_{\text{estático}}$ mayor que el aro ubicado a la izquierda de la masa **M**. ¿Cuál es la nueva configuración que adquiere el sistema? ¿O permanece igual al caso a.-? Si piensa que toma una nueva configuración, calcúlela. Si piensa que no hay cambio, explique la razón física de esto.

10.– Las fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}_0$ aplicadas en las cuñas de los extremos (ver Figura) impiden que la masa **M** toque el piso. La masa **M** se amolda con sus ángulos de corte a las cuñas. El ángulo de las cuñas es θ, igual en ambas.

Suponiendo que el roce entre las superficies en contacto (**M** y las cuñas) es μ, ¿Cuál debe ser el valor de $\mathbf{F}_o$, para que la masa **M** permanezca fija? Despreciamos el roce entre el piso y las cuñas.

Supongamos esta otra situación: el roce entre las cuñas y la masa **M** es muy pequeño comparado con el roce entre las cuñas y el piso. Suponga que el roce entre la cuña y el piso es numéricamente el mismo que en el caso anterior. ¿En cuál de los dos casos la fuerza necesaria para mantener fija a la masa **M** es menor?

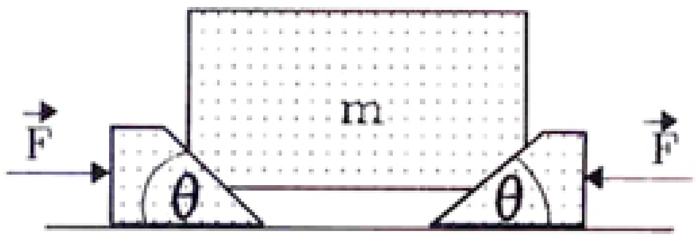
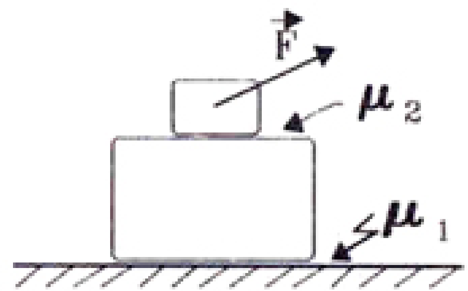


Figura VII.15: Problema # 10



Problema # 11

11.– Se tiene un bloque de masa M y sobre él un paquete de masa m. Sobre dicho paquete se aplica una fuerza **F**. Entre el bloque y el piso existe un coeficiente de roce μ_1 y entre el paquete y el bloque el coeficiente es μ_2.

¿Qué inclinación debemos darle a la fuerza **F** de modo que la tabla esté a punto de moverse cuando el paquete sobre la tabla comience a moverse?

12.– El plano inclinado forma un ángulo de 60° con la horizontal. Está fijo a la Tierra y posee un coeficiente de roce cinético μ. El bloque m_1 desciende con una *aceleración* cuyo valor es la mitad del valor que tendría en el caso que no consideráramos el roce entre las superficies. Calcule el coeficiente de roce cinético si $m_1 = 2\,m_2$ y confeccione un diagrama de cuerpo libre para ambas masas.

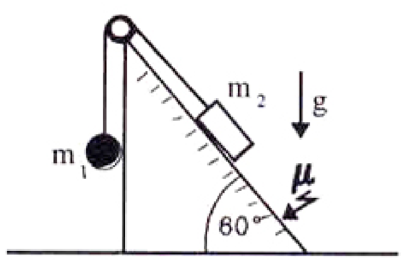


Figura VII.16: Problema # 12

13.– Un objeto de masa m, se mueve con rapidez V_0 sobre una superficie sin roce y al final de su camino logra entrar en el tablero horizontal de un trineo de masa M, que se puede mover sin roce sobre el hielo. El coeficiente de roce entre este objeto y el trineo es μ. El objeto se desliza sobre el trineo hasta que finalmente queda en reposo, *con respecto al trineo*.

a) ¿Cuál es la velocidad del conjunto, una vez que el paquete queda en reposo con respecto al trineo?

b) ¿Cuánto tiempo demora el paquete, en quedar en reposo con respecto al trineo?

c) ¿Qué distancia recorre la masa m sobre M antes de detenerse sobre ella?

Indicación: Cuando el objeto se desliza sobre el trineo su aceleración no es la misma que la del trineo.

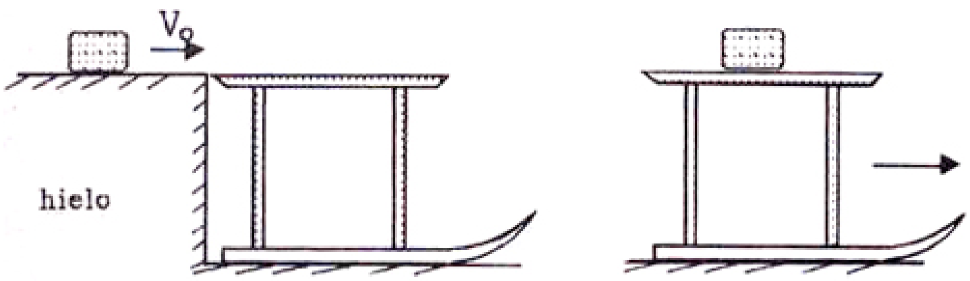


Figura VII.17: Problema # 13

14.– Con dos bloques A y B, se arman las configuraciones I y II que se indican en la Figura. Las cuerdas y poleas que se usan tienen masas despreciables y las masas $\mathbf{m}_A$ y $\mathbf{m}_B$ cumplen la siguiente relación: $\mathbf{m}_A = 2\,m_B$.

La magnitud de las fuerzas aplicadas F_I y F_{II} es tal que el bloque **A** se mueve con velocidad constante en ambas situaciones. Calcule el cuociente entre el módulo de F_I y F_{II}.

El coeficiente de roce es constante, vale μ y es el mismo entre todas las superficies en contacto.

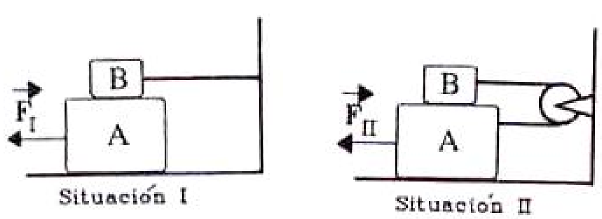
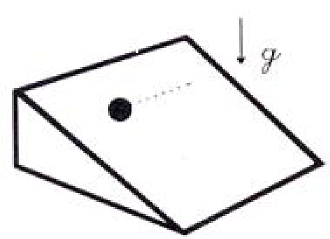


Figura VII.18: Problema # 14



Problema # 15

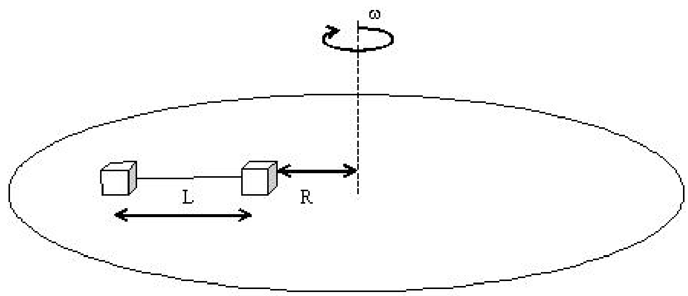


Figura VII.19: *Dos masas en disco rotando.*

15.– Un pequeño cubo de masa m se ubica sobre un plano inclinado con un ángulo α. El coeficiente de fricción cinética entre el cubo y la superficie es $\mu_c = 2\,\tan\,\alpha$.

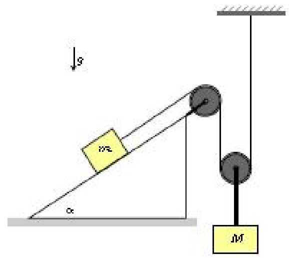
Encuentre el mínimo valor de la fuerza *horizontal* que es necesario aplicar para comenzar a mover el cubo.

16.– Dos bloques, ambos de masa **m**, están atados por una cuerda de largo **L** y descansan sobre un disco plano que gira con velocidad angular constante en torno a su eje. El roce entre la masa $\mathbf{m}_1$ (la más externa) y el disco es despreciable, pero no así entre la masa $\mathbf{m}_2$ (la cercana al eje de giro) y el disco. El coeficiente de roce estático entre $\mathbf{m}_2$ y el disco es μ_{est}.
Con el disco girando, ambas masas permanecen en reposo y dispuestas en forma radial, como se aprecia en la figura. En esta condición $\mathbf{m}_2$ se ubica a una distancia **R** del eje de rotación. Calcule la velocidad angular crítica ω para la cual la masa $\mathbf{m}_2$ esté a punto de resbalar sobre el disco.

17.– Considere una cadena de largo **L** cuya masa por unidad de largo es λ. Si ubicamos parte de la cadena en el borde de una mesa cuya superficie tiene un coeficiente de roce con la cadena μ: ¿Cual es el valor mínimo que debe tener el largo ℓ para que el resto de la cadena que cuelga, no pueda arrastrar a la que está sobre la mesa y caiga?. ℓ es el largo de la cadena que permanece sobre la mesa.

18.– Si colocamos una cadena de largo **L** apoyada -a modo de puente colgante-, en dos mesas separadas por una distancia **D** con **D**$<<\ L$: ¿Cuál debe ser el largo mínimo de la cuerda para que se sostenga con el roce entre la cadena y la superficie de la mesa. El coeficiente de roce entre ambos cuerpos es μ.

19.– Un bloque de masa **M** está sostenido por una cuerda ideal que cuelga del eje de una polea de masa despreciable. Al bajar, este bloque arrastra el bloque de masa **m**, el



cual sube por un plano inclinado fijo al piso. El roce estático entre el plano inclinado y el bloque de masa **m** es μ.

a.- Encuentre el rango de valores que puede tener la masa **M** para que el sistema permanezca estático.

b.- Suponga que el bloque triangular que sostiene la masa **m**, puede deslizar sobre el piso horizontal. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que se requiere para mantener este bloque en reposo? ¿Es posible que esta fuerza sea nula para un conjunto de valores de **M** y **m**?