INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 19 de marzo de 2016

Índice general

Capítulo I

UNIDADES, DIMENSIONES Y ESTIMACIONES

Las Ciencias Naturales engloban diversas disciplinas, entre las cuales se encuentran la Física, la Biología, la Química y la Astronomía; sin que esta lista sea exhaustiva. Cada una de ellas estudia determinados fenómenos que ocurren en la naturaleza, a través de su *observación directa* y mediante experimentos llevados a cabo en forma *sistemática* en el laboratorio.

Ciertamente, estas divisiones no son esenciales en ciencia y solamente indican grados de especialización. En algunos casos, el mismo fenómeno puede concitar simultáneamente el interés de científicos de diversas disciplinas. Por ejemplo, el estudio de los objetos que presentan una evolución caótica en el tiempo, interesan simultáneamente a los Físicos y a los Matemáticos. De igual modo, la determinación de la estructura del ácido desoxiribonucléico (ADN) –la molécula portadora de la información genética en animales y vegetales–, fue el resultado del esfuerzo conjunto de biólogos, químicos, bioquímicos y físicos.

Quienes tienen como oficio el estudio de las distintas manifestaciones de la naturaleza se les denomina científicos. Para algunos de ellos, los denominados teóricos, su labor consiste en inventar esquemas lógicos que permitan explicar las observaciones realizadas con un mínimo de suposiciones y además, en forma simultánea, *predecir* la existencia de nuevos fenómenos. Otro grupo prefiere desarrollar su labor en un laboratorio comprobando si las predicciones aventuradas en alguna teoría refleja realmente la forma en que opera la naturaleza. También pueden preferir estudiar un fenómeno diferente, guiados por su propia intuición y al cual consideran de gran interés.

La elaboración de un esquema lógico, acompañado de un lenguaje matemático, recibe el nombre de teoría. La teoría es un esquema mental que permite reunir un número de fenómenos bajo una sola mirada. Un ejemplo claro es la diferencia entre las observaciones de Kepler del planeta Marte, con una lista enorme de números, y su teoría, las tres leyes de Kepler, o mejor la Gravitación inventada por Newton posteriormente. Las predicciones de una teoría deben ser verificadas *experimentalmente* para saber su grado de extensión. La gravitación de newton es superada por la de Einstein, pero en un amplio rango de observaciones la primera es la más útil.

El desarrollo de una teoría es un proceso largo y complejo que toma normalmente años y la contribución de muchos investigadores. Sin embargo, siempre en alguna etapa de su evolución destacan figuras de gran capacidad intelectual cuyo aporte ha significado una revolución para su época. En Física, ese ha sido el caso de Nicolás Copérnico (1473-1543), Galileo Galilei (1564-1642), Isaac Newton (1643-1727), Albert Einstein (1879-1955) y Niels Böhr (1885-1962), entre otros.

Desde su origen como disciplina científica, hace aproximadamente cuatrocientos años, la Física ha acumulado una enorme cantidad de conocimientos y para manejar una fracción de ese material, se requiere recorrer un largo camino. Esperamos que el estudio de los aspectos básicos de la mecánica inventada por Newton –que constituye el contenido de este curso–, marque el comienzo de este trayecto.

I.1. UNIDADES

I.1.1. Introducción

Las leyes de la Física son relaciones entre propiedades de la materia medibles en un laboratorio tales como: longitud, tiempo, masa, temperatura, energía, etc. Consecuentemente, es necesario contar con *unidades* o patrones de medida, que permitan cuantificar esas magnitudes. Por ejemplo, medir la distancia entre dos puntos ubicados sobre una recta, significa comprobar el número de veces que una varilla patrón – elegida arbitrariamente como la unidad de longitud– está contenida en el trazo que conecta dichos puntos. Si el resultado es 3, se dice que la distancia entre los puntos es igual a 3 unidades de longitud.

El valor de una propiedad física cualquiera debe indicar la unidad que se ha utilizado como patrón. Por ejemplo, si en el caso anterior se hubiera usado el metro como unidad de medida, la distancia se expresaría como 3 metros.

La mayor parte de las unidades que se utilizan corrientemente se pueden expresar como combinación de un grupo reducido de ellas, llamadas *unidades fundamentales*. En el *Sistema Internacional (SI)*, las más conocidas son: el *metro*, el *kilógramo* y el *segundo*. Otras magnitudes, tales como la energía, el momentum lineal, la fuerza, etc., poseen unidades que se expresan en función de este conjunto fundamental.

En este libro usaremos el Sistema Internacional de Unidades en la mayoría de los ejemplos y ejercicios propuestos.

I.1.2. Tiempo

El **segundo** (s) fue definido originalmente como la $1/86400$ parte de un día solar medio (esto es, el tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el cenit, promediado a lo largo de un año). La definición moderna de un segundo es más precisa, pero tiene la desventaja de ser más difícil de explicar en base a conceptos básicos. La incluimos aquí como una información cuyo sentido aparecerá claro más adelante.

El **segundo** se define como el tiempo que debe transcurrir para detectar $9,192631770 \times 10^9$ ciclos (o vibraciones) consecutivas en la luz proveniente de una transición hiperfina entre dos estados permitidos de un átomo de Cesio.

En la actualidad, el patrón o unidad de tiempo se puede determinar con gran precisión. El segundo se puede medir, sin error, con doce cifras significativas. Con el objeto de aprovechar este enorme progreso, se ha definido la unidad de longitud (el metro) en base al segundo. Para ello debemos previamente *definir* la velocidad de la luz. Esta decisión no genera problema alguno, puesto que la velocidad de la luz es una constante universal. Obviamente, el valor usado no altera las unidades previamente establecidas. Este es:

$$\text{c} \equiv \text{velocidad de la luz} = 299.792.458 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right],$$

Combinando la definición de un segundo y la velocidad de la luz, obtenemos la unidad de longitud: el *metro*, con un grado de precisión equivalente al del segundo. En este contexto, el metro se define como la distancia que recorre la luz en el espacio vacío durante $1/299{,}729{,}458$ segundos.

Note que, como el valor de la velocidad de la luz fue *definido*, no puede contener error de medición.

Revisemos como ha ido mejorando la precisión en la determinación de la unidad de tiempo a través de este siglo.

Hasta hace algunas décadas, la rotación diaria de la Tierra con respecto al sol, se utilizaba para definir el largo del día (*día solar*) y a partir de este intervalo se definía el segundo medio. Los relojes se ajustaban de manera de seguir lo más exactamente posible el largo del día solar.

El *día sideral* se determina midiendo el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos de una estrella muy brillante a través del meridiano del observatorio astronómico.

Cuando la exactitud alcanzada en la medida del tiempo mejoró, fue posible preguntarse si efectivamente la duración del día era una constante a través del tiempo o sufría pequeñas variaciones. La duda se originó del siguiente modo. En 1936, los relojes de péndulo alcanzaron una precisión de *una parte en* 10^8 y así se logró establecer que el largo del día en el mes de Enero de ese año *excedió* al de Julio por, aproximadamente *5 milisegundos*.

Más adelante, con la aparición de los relojes atómicos que alcanzan una precisión de una parte en 10^{12} ó 10^{13} , quedó absolutamente claro que la duración del día variaba en forma *compleja* con componentes periódicos anuales, semianuales, con el período de la Luna e incluso durante el transcurso de una *noche* con amplitudes del orden de las *décimas* de milisegundo.

El fenómeno de El Niño ocurrido en 1982 - 1983, marcó un máximo notable en el largo del día, con un aumento de hasta 30 milisegundos sobre el valor promedio, durante el mes de marzo de 1983.

I.1.3. Longitud

Las unidades siempre se definen en forma arbitraria. El criterio empleado para elegirlas es, entre otros, facilidad de reproducción y maniobrabilidad.

Un ejemplo de esta arbitrariedad es la existencia de diferentes unidades de longitud: el metro, la pulgada, el pie, la yarda, la milla...etc.

El metro (m) fue originalmente definido como la distancia que separa a dos marcas grabadas sobre una barra fabricada de una aleación de platino e iridio, que se guarda en la oficina *Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia*. La elección fue hecha de manera que la distancia entre el Ecuador y el Polo Norte, medida a lo largo del meridiano que pasa por París fuera exactamente 1×10^7 metros.

Esta última afirmación nos hace meditar acerca de la necesidad de una nueva unidad de longitud, más precisa y más fácil de repetir que la recién definida. Es difícil pensar en obtener una precisión del orden de una parte en 10^7 al medir una distancia tan grande, esto sin mencionar que fue realizada con los medios disponibles durante el siglo pasado.

En la actualidad el metro se define como:

Un metro es la distancia recorrida por la luz en el vacío en 1/299.792.458 segundos.

A continuación se muestra una lista con distancias y tamaños de diversos objetos. Se incluyen las unidades usadas en astronomía: el parsec y la Unidad Astronómica.

OBJETO	DISTANCIA
Tamaño del Universo	10^{26} m
Galaxia Andrómeda	$6,5 \times 10^5$ parsec $\approx 2 \times 10^{22}$ m
1 parsec $\equiv$ 1 pc	3,09 $\times 10^{16}$ m = $6,48 \times 10^5/\pi$ A.U.
Unidad Astronómica = 1 A.U.	1,5 $\times 10^{11}$ m
α-Centauri (estrella más cercana)	1,3 pc
Diámetro de nuestra Galaxia	3×10^4 pc
Dist. Sol–Centro de la Galaxia	9×10^3 pc
1 Año Luz	$9,46 \times 10^{15}$ m
Distancia Sol – Tierra	1 A.U.=$1,5 \times 10^{11}$ m
Radio del Sol	$6,96 \times 10^8$ m
Distancia Tierra–Luna	$3,84 \times 10^8$ m
Radio de la Tierra	$6,38 \times 10^6$ m
Radio de la Luna	$1,74 \times 10^6$ m
Grano de Sal	10^{-3} m
máxima resolución del ojo humano	1×10^{-4} m
Diámetro de un cabello humano	2,5 $\times 10^{-5}$ m
Virus	10^{-7} m
Diámetro de la hélice del ADN	2×10^{-9} m
Radio de un Atomo	10^{-10} m
Radio del Núcleo Atómico	10^{-15} m

Una característica importante del sistema internacional *SI* es su estructura decimal: las unidades más grandes se definen como potencias de diez de las unidades más pequeñas. Por ejemplo, 1 kilómetro $\equiv 1$ km = 10^3 m, 1 m = 10^2 centímetros $\equiv 10$ milímetros $\equiv$ 10 mm, 1 mm = 10^{-3} m.

En la siguiente Tabla se indican los nombres de las potencias de diez más utilizadas en la literatura científica.

Potencias y sus Denominaciones						
Potencia	Prefijo	Abreviación		Potencia	Prefijo	Abreviación
10^{24}	yotta	Y		10^{21}	zeta	Z
10^{18}	exa	E		10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T		10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M		10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h		10	deca	de
10^{-1}	deci	d		10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m		10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n		10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f		10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z		10^{-24}	yocto	y

Conviene mencionar también un sistema de unidades no decimal cuyo uso está prácticamente restringido a los Estados Unidos: el *Sistema Técnico Inglés*. Su unidad fundamental de longitud es la **pulgada** $=$ 2,54 cm, cuyas equivalencias son 1 *pie* = 12 pulgadas = 1/3 yarda $\simeq$ 0.3048 m.

I.1.4. Masa

El **kilógramo** (kg) se define como la masa de un cierto cilindro de Platino e Iridio que se guarda en la oficina *Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia*. Un kilógramo es aproximadamente igual a la masa de 1000 centímetros cúbicos de agua, a una temperatura de aproximadamente $4^\circ\, C$, donde su densidad alcanza el valor máximo.

Ejemplos de unidades del Sistema Internacional expresadas en base a las unidades fundamentales son: fuerza, $1\, newton \equiv 1\, N = 1\, kg\, m/s^2$ y la unidad de energía, $1\, joule \equiv 1J = 1\, kg\, m^2/s^2$.

Cuando nuestro estudio se extienda a áreas de la física, más allá de la mecánica, necesitaremos agregar otras unidades fundamentales. En el sistema internacional (*SI*) estas son: la unidad de temperatura (el grado Kelvin, ^{o}K), la unidad de intensidad luminosa (la candela (cd)), la unidad de corriente eléctrica (el Ampere (A)) y el mol de substancia (N_A $\equiv$ Número de Avogadro = $6{,}022137 \times 10^{23}$ partículas).

Unidades SI Nombres y Símbolos Especiales				
Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresiones derivadas	En Unidades SI Básicas
Frecuencia	Hertz	Hz		s^{-1}
Fuerza	newton	N		$\mathrm{m\,kg\,s}^{-2}$
Presión	pascal	Pa	$\mathrm{N/m}^2$	$\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{kg\,s}^{-2}$
Energía Trabajo	joule	J	N m	$\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg\,s}^{-2}$
Potencia	watt	W	J /s	$\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg\,s}^{-3}$

I.2. ANALISIS DIMENSIONAL

Considere una cierta expresión física, la aceleración, por ejemplo. Si multiplicamos la aceleración por el cuadrado del tiempo y por (1/2): $(a\,t^2)/2$, las dimensiones de esta nueva expresión se multiplican tal como sus componentes: $(L/T^2)\,(T^2)\,(1) = [L]$. La dimensión de esta expresión es **longitud** que indicamos con una **L** entre paréntesis cuadrados, según la convención. Note que un número (1/2 en este caso) no tiene dimensiones. Esperábamos este resultado porque indica la distancia recorrida con aceleración constante con una cierta velocidad inicial.

En general, dada una expresión algebraica, las unidades de los términos que la componen son tratadas (se multiplican o dividen o suman...) de la misma manera que los números asociados a cada uno de los términos. Por ejemplo, si en una ecuación se suman (o restan) dos cantidades, ambas debe tener las mismas unidades. No se puede sumar peras con manzanas. Al multiplicar o dividir dos cantidades, sus dimensiones se multiplican o dividen, según sea el caso. Para ilustrar esto, consideremos la distancia que recorre un objeto al ser sometido a una aceleración constante $a = 2\ m/s^2$ durante 0,1 horas, con una velocidad inicial de 5 m/s. La distancia d se calcula mediante la siguiente expresión:

$$d = v_o\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 5[m/s]\,360[s] + \frac{1}{2}\,2\,\frac{m}{s^2} \times \left(0{,}1\,hora \times\ 3600\,\frac{s}{hora}\right)^2 = 1{,}800\,m\,+\,129{,}600\,m,$$

aquí, la aceleración se ha multiplicado por un factor que tiene dimensiones de $(tiempo)^2$. En la segunda igualdad se realiza la conversión de horas a segundos y en esa operación, las unidades son tratadas como una cantidad algebraica. Esto es importante, las dimensiones deben estar expresadas en la s mismas unidades. No puedo usar horas y multiplicarla por segundos. En ese caso la unidad de medida (segundo, metro...) queda indefinida.

Conviene recalcar que cuando se suman o restan términos en una ecuación, todos ellos deben tener la misma dimensión y estar expresados en las mismas unidades.

Así por ejemplo, si v es una velocidad y t es el tiempo, la siguiente ecuación está *dimensionalmente incorrecta*:

$$y = v\,t + v\,t^2$$

pues, el término $[v\,t]$, tiene dimensiones de [longitud/tiempo] $\times$ [tiempo] = [longitud], en tanto que las dimensiones de $[v\,t^2]$ son [longitud/tiempo] $\times$ [(tiempo)^2] = [longitud] $\times$ [tiempo].

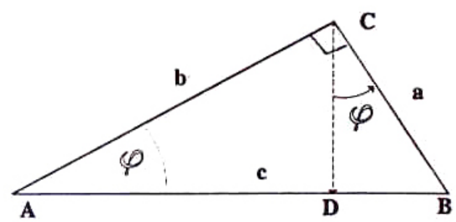
A menudo el análisis dimensional permite detectar errores de cálculo. Por ejemplo, si la propiedad que está siendo evaluada es la energía, el resultado debe tener dimensiones de $masa \times (velocidad)^2$ (en el Sistema Internacional de Unidades , $kg \times (m/s)^2$). Análogamente, al evaluar un área, el resultado debe tener dimensiones de $(longitud)^2$. Si esta condición no se cumple, significa que existe un error en el cálculo.

Ejemplo

Recordemos que para construir un triángulo basta conocer un lado y dos de los ángulos adyacentes a él. Con estos datos el triángulo queda totalmente determinado.

Usando este hecho y el análisis dimensional, compruebe el Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$.

Como en este caso se trata de un triángulo rectángulo, sólo necesitamos conocer un lado y uno de sus ángulos adyacentes, puesto que el restante es el complemento del anterior. Por otra parte, sabemos que el área de un triángulo debe tener las dimensiones de longitud al cuadrado.



Es posible entonces escribir una fórmula para el área de un triángulo rectángulo, de la siguiente forma:

$$\text{Area del triángulo } \Delta\,ABC \equiv A_c = c^2\,f(\varphi),$$

donde c es el lado del triángulo rectángulo y φ es el ángulo adyacente. Esta fórmula no especifica la función $f(\varphi)$ y sólo se sabe que debe ser una cantidad adimensional, de acuerdo a los resultados de esta sección.

Además, debe ser una *fórmula de validez general*, puesto que a partir de esos dos elementos: c y φ, el triángulo rectángulo queda determinado, es único, y por lo tanto su área debe depender solamente de estos dos valores, de forma que al variar uno de ellos, se modifica el triángulo y, en consecuencia, cambia el valor de su área.

Si Ud. recuerda sus cursos de geometría, probablemente conoce de varias fórmulas para determinar el área de un triángulo, siendo la más simple, y por ello la más usada, el producto de la altura por la base dividido por dos. La fórmula propuesta más arriba es sin duda una de las expresiones menos usadas para evaluar el área de un triángulo.

Como es una expresión general, se aplica también al triángulo $\Delta\, ACD$, con la misma función $f(\varphi)$. Más aún, también es válida para el triángulo $\Delta\, CBD$. En resumen,

$$\text{Area } \Delta\, ACD \equiv A_b = b^2\, f(\varphi), \qquad \text{Area } \Delta\, CBD \equiv A_a = a^2\, f(\varphi),$$

y como el área del triángulo ABC, A_c, es la suma de las áreas A_a y A_b, se obtiene que:

$$A_c = A_a + A_b \quad \Longrightarrow \quad c^2\, f(\varphi) = a^2\, f(\varphi) + b^2\, f(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Ahora es fácil determinar la función $f(\varphi)$ usando la fórmula usual para el área de un triángulo:

$$c^2\, f(\varphi) = \frac{a\, b}{2} \quad \Longrightarrow \quad f(\varphi) = \frac{a\, b}{2\, c^2} = \frac{\cos\varphi \,\text{sen}\,\varphi}{2}. \,\square$$

Ejercicio

Una pelota se lanza con velocidad horizontal v, desde una altura H, medida desde la superficie de la Tierra. La distancia horizontal que recorre la pelota hasta el momento en que choca contra el suelo es R. Se sabe que la partícula se mueve bajo la acción de la aceleración de gravedad $g = 9{,}8\; m/s^2$. Usando análisis dimensional encuentre una expresión para R en función de H, v y g.

Ejercicio

Unidades Geometrizadas. A partir de las constantes universales de gravitación G, de la velocidad de la luz en el espacio vacío c, y de Planck h, es posible construir unidades fundamentales de longitud L^*, masa M^* y tiempo t^*.

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg\; s^2}\right], \qquad c = 2{,}9979 \times 10^{8} \left[\frac{m}{s}\right], \qquad h = 6{,}6261 \times 10^{-34} \left[\frac{kg\; m^2}{s}\right].$$

Construya las unidades L^*, M^* y t^*, combinando adecuadamente las constantes universales mencionadas.

Ejercicio

Un experimentador encuentra que en ciertas condiciones la altura de un cuerpo sobre la superficie de la tierra varía con el tiempo t, de acuerdo a la ecuación:

$$z(t) = a + b\, t + c\, t^2$$

i) ¿Qué dimensiones tienen las constantes a, b y c ?

ii) ¿Cuál es el significado físico de cada una de estas constantes?

I.3. FISICA, MATEMATICAS Y COMPUTACION

La Geometría es una herramienta importante en la formulación y análisis de los problemas que nos interesa estudiar en física, así como también lo es el cálculo diferencial. De hecho, este último fue desarrollado por Newton –simultáneamente con Leibnitz–, para expresar sus leyes en forma precisa. Hemos incluido un complemento matemático donde repasamos brevemente los conceptos básicos de trigonometría y nociones de series, haciendo énfasis en las aproximaciones y en el cálculo del área encerrada bajo una curva, que son los procedimientos más requeridos en los problemas que estudiaremos en este libro.

Al final de esta sección se incluye un conjunto de ejercicios relacionados con esta materia.

La definición de derivada se incorporó junto con la introducción de velocidad, en el segundo capítulo.

Con respecto a las ciencias de la computación, es claro que en los últimos veinte años, la investigación, la ingeniería y la enseñanza han sido paulatinamente influenciadas por ella. Su impresionante desarrollo ha permitido resolver problemas muy importantes de Física e Ingeniería y continúa abriendo nuevas líneas de investigación en diferentes áreas del conocimiento. El computador se ha transformado en una herramienta de trabajo esencial en casi todos los aspectos de la sociedad moderna. En particular, aquellos problemas científicos o tecnológicos que se tornan muy difíciles o imposibles de resolver por métodos analíticos, pueden normalmente ser abordados numéricamente.

A pesar de la importancia del cálculo numérico, sólo será tratado ocasionalmente en este curso introductorio.

I.4. EL ARTE DE LAS ESTIMACIONES

Utilizaremos ahora una estrategia diferente: analizaremos un problema del cual no tenemos toda la información requerida. Estimaremos, lo mejor posible, los datos que no conocemos para obtener una solución que nos parezca razonable.

Este tipo de ejercicios fueron popularizados por Enrico Fermi (1901-1954) (Premio Nobel en 1938), destacado físico de origen italiano, dotado de una habilidad innata para encontrar respuestas aproximadas a problemas complejos, sin recurrir a cálculos elaborados.

Lo que se pretende es obtener una respuesta para un problema determinado, cuya solución exacta, de existir, requeriría gran cantidad de trabajo, ya sea para calcular o bien para recolectar la información necesaria para realizar los cálculos.

El ejemplo con que ilustramos este método, fue planteado por el propio Fermi a sus estudiantes en la Universidad de Chicago. Les pidió estimar el número de afinadores de piano que trabajaban en la ciudad de Chicago.

La primera impresión es que la pregunta no puede ser respondida pues falta mucha información; sin embargo, al analizar la situación es posible darse cuenta que se puede llegar a una estimación razonable acerca del número pedido. Una forma de hacerlo es comenzar por estimar la población de la ciudad de Chicago, digamos: cinco millones de habitantes (es una ciudad como Santiago). Si suponemos que en promedio una familia está formada por cuatro personas, eso da un total de 1.250.000 familias. Además, si una de cada cinco familias posee un piano, entonces deberían haber del orden de 250.000 pianos en Chicago. Si consideramos que cada piano es afinado aproximadamente cada cinco años, eso da un total de 50.000 afinamientos por año. Ahora bien, un técnico puede dar servicio en forma adecuada a unos 4 pianos diariamente y supondremos que trabaja doscientos cincuenta días al año. Esto significa que para dar servicio a todos los usuarios de Chicago se requieren del orden de $50{,}000/(250 \times 4) = 50$ técnicos. La respuesta es aproximada, pero no se aleja mucho del número de técnicos que aparecen en las páginas amarillas de la guía de teléfonos de la ciudad de Chicago.

Dependiendo de las estimaciones utilizadas durante el desarrollo del cálculo, se podría haber obtenido un número tan bajo como 25 o tan alto como 75, pero ciertamente el número final difícilmente resultará superior a 100. La razón por la cual este tipo de cálculo puede entregar resultados acertados, radica en la cancelación de los errores cometidos en las diversas estimaciones. Si nos excedimos en el número de habitantes de la ciudad de Chicago, es posible que hayamos subestimado la cantidad de pianos atendidos diariamente por un técnico. Es decir, los errores en cada uno de las números considerados, están distribuídos aleatoriamente (i.e., al azar). Por supuesto, el entrenamiento en el arte de resolver situaciones similares, mejora la precisión de las respuestas.

Ejercicio

Repita la estimación anterior para el caso de la ciudad de Santiago. ¿Cómo cambiarían las cifras usadas anteriormente?

Ejercicio

Las ciudades de Nueva York y Los Angeles en USA están aproximadamente a la misma latitud y separadas unos $4500\ km$. Además, se sabe que cuando en Nueva York son las 10 de la mañana, en Los Angeles son las 7 de la mañana. Estime el perímetro de la Tierra sabiendo que ambas ciudades no están muy alejadas del Ecuador terrestre.

Nota: NY está a una latitud de $40^o\ 40'$ y LA a $34^o\ 03'$. para comparar con ciudades en Chile: Valdivia está a $39^o\ 49'$ (sur) y Santiago está a $33^o\ 27'$. La diferencia entre la longitud entre estas dos ciudades es pequeña, del orden de dos minutos. En cambio la diferencia en longitud entre NY y LA es de aproximadamente44^o. Conviene considera en este problema la ciudad de Wilmington en North carolina que tiene prácticamente la misma longitud de NY, por tanto la misma hora. Ciertamente no es reconocida por todos. **Ejercicio**

Un dígito binario recibe el nombre de *bit*. Un grupo de *bits* se denomina una *palabra*. Una palabra de ocho bits recibe el nombre de *byte*. Una letra normal cualquiera está representada en lenguaje binario por un *byte*. Suponga que se dispone de un disco de computador con capacidad para $100\ Megabytes$. Estime el número de libros que podrían ser almacenados en ese disco.

I.5. Comparación de la presión en diferentes situaciones

I.5.1. La presión

Analizando el comportamiento de un avión d e este tipo nos da la oportunidad de estimar eficiencias de un auto y de un avión, saber qué valor corresponde a una presión muy alta o más bien baja...

Comenzamos con la siguiente pregunta: ¿Qué es la presión?

Las definiciones en física son circulares. La presión, en dimensiones, representa una densidad de energía, pero esta definición no tiene asidero en un fenómeno sensorial. Definida como fuerza por unidad de superficie, apela directamente a la experiencia diaria y puede parecer más concreta y relevante. La fuerza y la superficie son cotidianos.

Por ejemplo para sostener una columna de altura **h** cualquier material que mantenga en forma estable dicha forma cilíndrica, debo aplicar una fuerza por unidad de superficie (presión) en la superficie basal igual a

$$P = \rho g h, \quad [\frac{M}{L^3}] \times [\frac{L}{T^2}] \times [L] \equiv [Pascal].$$

Esto es válido en un fluido, para la presión atmosférica, la fuerza de una columna de cemento sobre la superficie que la fundación que la sostiene.... .

El valor de la presión del aire sobre nuestras cabezas, la presión atmosférica es: 1,013 $\times\ 10^5$ Pa.

1 cm de agua a 4^o celsius , genera una presión de 9,81 $\times\ 10^1$ Pa.
Una columna de un cm de Hg genera una presión de 1,33 $\times\ 10^3$ Pa.

I.5.2. El ala de un Boeing Jumbo

¿En qué otra situación encontramos la idea de presión?

Examinemos el caso del ala de un avión. El Boeing 747-400 es un ejemplo de máquina eficiente y de calidad, a juzgar por su presencia en las líneas aéreas y su longevidad.

Veamos algunos datos[1]

Superficie del ala de un Boeing 747-400 : 511 m^2

Mas al despegar : 360 Toneladas

Contenido de Energía de la gasolina: $4,8 \times 10^7 J/kg$

Consumo promedio : $12 \times 10^3 \ell/h$

Densidad del kerosene : $0,8 kg/\ell$

Velocidad del crucero: $900 km/h \simeq 250 m/s$

A partir de estos datos hagamos algunas comparaciones para poder evaluar si un número es absurdamente alto (o bajo). Ciertamente comparamos con objetos más cercanos a la vida diaria. En los números que se obtengan a continuación hay una dósis de sentido común: hay aproximaciones razonables, no son números exactos.

El peso del avión durante el vuelo es sostenido por la presión actuando sobre la superficie de las alas. Sabemos la fuerza que se debe sostener, aproximadamente $3, \times 10^5 kg \times 10 m/s^2 = 3 \times 10^6$ Newton

$$P \simeq \frac{3 \times 10^6 \text{Newton}}{511\, m^2} \simeq 6 \times 10^3 \ N/m^2 = 6 \times 10^3 \text{Pascal}$$

I.5.3. De personas y autos

¿Cómo se compara con el peso de una persona y la presión que ejerce sobre el piso?

Peso de una persona:

HOMBRE = 80 kg $\times$ 10 = 800 N, MUJER = 60 kg $\times$ 10 = 600 N.

Área del zapato de un hombre $\approx$ 20 cm(largo) $\times$ 7 cm (ancho) $\approx$ 150 cm^2 = 150 $\times 10^{-4} m^2$. Este número debe ser multiplicado por dos. De modo que la presión sobre el piso es :

$$P_{Hombre} = \frac{800\, N}{3 \times 10^{-2}\, m^2} = 3,7 \times 10^4 \text{Pascal.}$$

[1]"The Simple Science of Flight"From insects to Jumbo Jets"

En el caso de una mujer puede depender del tipo de zapato que use. El caso más crítico es el uso de taco alto. La presión sobre el piso aumenta debido a que el área de contacto es menor. Por esta razón en algunos lugares históricos, donde la madera del piso no es resistente está prohibido entrar con tacones altos. Dejan marcas en el piso. Consideremos el área de contacto con taco alto.

$$12(cm) \times 6(cm) + 2\,cm^2 = 75cm^2 \simeq 7,5 \times 10^{-3}\,m^2.$$

$$P_{\text{Taco alto}} \simeq \frac{600}{2\,times\,7,5 \times\ 10^{-3}} \simeq 4 \times 10^4\,\text{Pascal}.$$

Resulta ser similar al de un hombre. Sin embargo en los tacos se puede concentrar más fuerza por unidad de área dependiendo como apoye el pie en el piso. la presión es aproximadamente 6 veces mayor a la que resiste un ala de avión.

¿Cuál es la presión de los neumáticos de una auto pequeño sobre el piso? Presión en un neumático $= 24\ell b - fuerza/(pulgada^2)$

Una libra-fuerza por pulgada al cuadrado (psi en inglés) es igual a 6,9 $\times$ 10^3 Pa [2]

Una libra-fuerza = 4,45 N $\approx$ 4,5 N. Una pulgada al cuadrado es $0{,}025^2 = 6{,}3 \times 10^{-4}$ m^2. Dividiendo estas cantidades obtenemos el valor mencionado al comienzo del párrafo.

alculemos la fuerza en el neumático.

$$\text{Presión en SI } = 24 \times 6,90 \times 10^3 \approx 1,73 \times 10^5 \frac{\text{Newton}}{m^2}.$$

De esta forma

$$P_{\text{Neumático}} \sim 1,73 \times 10^5 \text{Pascal}$$

Si el peso del auto es 600 kg $\times$ 10 [N], cada rueda resiste 1500 N . El área de contacto la estimamos a partir de Fuerza/Presión:

Área = [1,5 $\times$ 10^3]/ (1,73 $\times$ 10^5) $\sim$ 0.9 $\times$ 10^{-2} = 90 $\times$ 10^{-4}.

Si el ancho del neumático es 20 cm, entonces la deformación de la circunferencia al contacto con el piso es aproximadamente 4,5 cm.

Vemos que si un neumático de este auto accidentalmente nos pasa por encima, las presiones son al menos 5 veces más intensas que el pisotón de una persona.

[2] Una buena referencia para unidades y cifras significativas es: **Guide for the use of International System of Units (SI)** de Barry N. Taylor,1995, NIST Special Publications. Está disponible en la red.

I.5.4. Comparar la Eficiencia de un Boeing, un Auto y un Picaflor

El Boeing 747-400 y el Picaflor

Continuando con más comparaciones. ¿Cuál es la eficiencia de un Boeing? Como referencia usaremos un picaflor y un auto compacto.

Un picaflor consume el equivalente a su propio peso en un día, esto es aproximadamente un 4 % de su peso/hora.

Veamos cómo es este número en el caso del Boeing.
El Boeing ocupa 12.000 ℓt/h $\sim$ 12.000 ℓt / h $\times$ 0,8 kg/ℓt $\sim 10^4$ kg/h. Considerando que la densidad del petróleo es 0.8. Para comparar con el 4 % del picaflor, debemos estimar el peso del Boeing. Para ellos tomamos como un valor representativo su peso en la mitad del recorrido de su viaje.

En la mitad de su recorrido tenemos:

$$\frac{10^4\text{kg/h}}{3,6\ \times\ 10^5\,\text{kg}} = \frac{1}{36}\ \sim 0,03,,$$

O sea aproximadamente el 3 % de su peso. Similar, dentro de las aproximaciones que hicimos, al de un picaflor!

El Boeing 747-400 y el Auto

Comparemos un Boeing con un auto. Al fin de cuentas ambos son un medio de transporte. Un auto consume en carretera aproximadamente 1ℓt cada 20 km.

Veamos, el Boeing consume 12.000 ℓt / h con una velocidad de V_{Boeing} = 900 km/h. Queremos obtener de acá una cantidad con las dimensiones de [km/ℓt]. Dividiendo, obtenemos 12.000/900 ℓt / h $\cdot$ km/h $\sim$ 13 litros por km, o 1 ℓt cada 0,07 km/ ℓt.

El Boeing sale con una mala evaluación al compararlo en estas circunstancias con el auto. Sin embargo hay una gran diferencia: el Jumbo lleva 400 pasajeros! Es más representativo calcular el gasto por km y por pasajero. Calculemos esta cantidad entonces: ℓt/(km $\times$ pasajero).

Auto con 4 pasajeros:

$$\frac{1\,\ell t}{20km\ \times\ 4} = \frac{1}{80} = 0,012\frac{\ell t}{km \times \text{pasajero}}.$$

En el caso del Boeing:

$$\frac{1}{0{,}07 \times 400} = \frac{1}{30} = 0,03 \frac{\ell t}{km \times \text{pasajero}}$$

Vemos que el Boeing se acerca al rendimiento por pasajero de un auto. Podríamos continuar con la estrategia de cálculo y considerar, por ejemplo, el ahorro de tiempo. Dada que la velocidad de crucero del avión supera largamente la del auto. Pero dejamos estos cálculos como ejercicio y concluimos que el Boeing 707-400 es realmente una joya mecánica.

I.6. EJERCICIOS

1.– Estime cuántos trabajadores se necesitaron para construir una pirámide. Necesita recolectar datos como la densidad de las piedras, el tamaño de las pirámides, cuánto trabajo puede hacer un hombre en un día, la energía potencial de la pirámide y hacer algunas suposiciones como la siguiente: dónde se encontraban las piedras utilizadas.

   Referencia: **Juegos Matemáticos**, Ian Stewart, Ïnvestigación y Ciencia", Noviembre 1998, pág. 86.

2.– Benjamín Franklin notó que al dejar una gota de aceite en la superficie de un lago, ésta no se esparcía más allá de una cierta superficie. También notó que si el número de gotas de aceite se aumentaba al doble, el área cubierta también se duplicaba. Concluyó que dicho valor era el máximo posible que una cierta cantidad de aceite lograba extenderse. Al realizar el experimento notó que 0,1 cm3 de aceite cubrían un área de aproximadamente 40 cm^2. ¿De qué espesor es la capa de aceite?

   Si la distancia entre átomos de una molécula en un líquido o gas corriente es de 1A^o=10^{-10} m. En el tipo de aceite que Franklin usó se puede suponer que cada molécula tenía 10 átomos.
   ¿De cuántos átomos de espesor era la película de aceite formada?

3.– Una hoja de papel tipo carta, es doblada por la mitad, de esta manera el área resultante es la mitad y el espesor es el doble de la hoja original. Si este proceso se repite sucesivamente con la hoja resultante,
   Estime el número de veces que se debe doblar una hoja para que el espesor cubra la distancia que separa a la tierra de la Luna.
   Calcule el área de la hoja resultante al final del proceso. Compare este número con el tamaño de un átomo.

Ver artículo en U-Cursos.

4.– En un tablero de ajedrez hay 8x8 casilleros. En el primero de ellos se pone un grano de maíz; en el segundo el doble del anterior; en el tercero el doble del anterior, y así sucesivamente. Calcule el número aproximado de granos de maíz que se requieren para toda la operación y estime su volumen. Compárelo con el volumen de la Tierra.

5.– Considere la longitud de la línea que Ud. puede marcar con un lápiz de pasta nuevo, antes de agotar totalmente su tinta.

6.– Con los siguientes ejercicios procuraremos validar (o convencernos que funciona en ciertos casos) la aproximación $(1 + x)^r \approx 1 + r\,x + O(x^2))$. Mientras más pequeño $|x|$ con respecto a la unidad, mejor resulta la aproximación.
Estime (sin usar la calculadora) el valor de las siguientes expresiones (use donde corresponda $\pi \approx 3,14$). **Después** compruebe el resultado con una calculadora o su PC:

a.- $\sqrt{1,001}$ b.- $\sqrt{0,98}$ c.- $\sqrt{102}$ d.- $\sqrt{\pi}$ e.- $\sqrt{2}$ f.- $\sqrt{60,5}$ g.- $1/\pi$ h.- π^2

7.– Haciendo uso de la misma aproximación de la pregunta anterior, calcule los siguientes cuocientes:

a.- 1/101 b.- $\frac{905}{77}$ c.- $\frac{303}{201}$ d.- $\frac{\sqrt{50}}{709}$ e.- $\frac{301}{802}$ f.- $\frac{\sqrt{89}}{0{,}013}$

I.7. Bibliografía

1.- **The Simple Science of Flight: from Insects to Jumbo Jets**, Henk Tennekes, The MIT Press, Massachusetts,Third Printing 1998.

2.- **Newton Rules Biology:** A physical Approach to Biological Problems. C. J. Pennycuik, Oxford University Press, 1995 Reprinted.

3.- **Guide for the use of International System of Units (SI)** de Barry N. Taylor,1995, NIST Special Publications. Una buena referencia para unidades y cifras significativas. Está disponible gratis en la red.