ESCURRIMIENTO RÁPIDAMENTE VARIADO

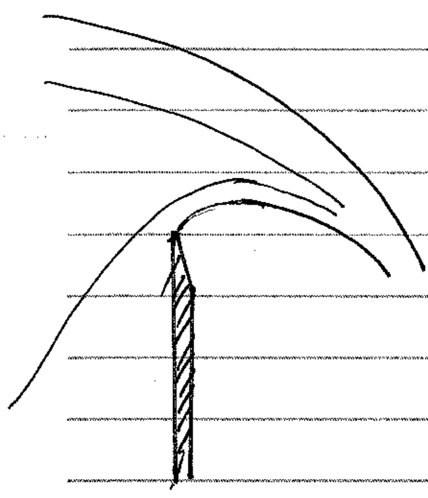
VERTEDEROS

Referencias: F. J. Domínguez Cap. VII
Henderson Cap. 6

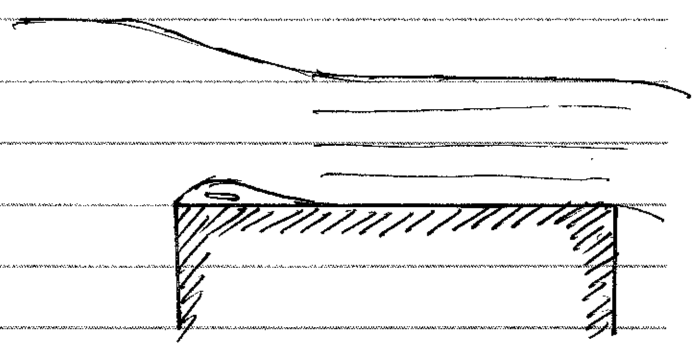
- Vertederos de pared delgada.
  El contacto de la vena líquida es a lo largo de una arista

- Vertederos de pared gruesa.
  Se tiene líneas de corriente paralelas sobre el vertedero

- Vertederos de pared intermedia



VERTEDERO DE PARED DELGADA

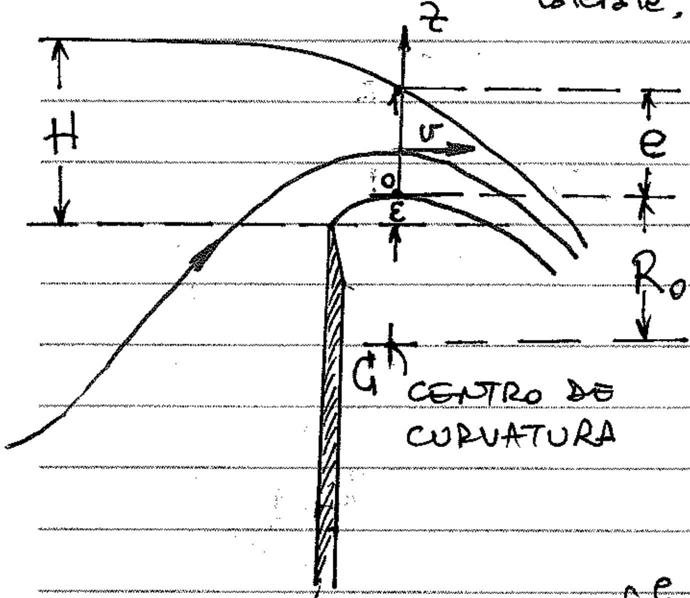


VERTEDERO DE PARED GRUES

VERTEDEROS DE PARED DELGADA

TEORÍA DE BOUSSINESQ (1907)

J. V. BOUSSINESQ, Théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale, Paris, 1907.



El problema es determinar el caudal que pasa sobre el vertedero conocido H.

$$q = \int_0^e v \, dz$$

Consideremos flujo irrotacional y que a lo largo del eje z las líneas de corriente son arcos de círculo, con centro en G. De la ecuación de Euler se obtiene:

$$\frac{d\hat{p}}{dz} = \rho \frac{v^2}{r}$$

El Bernoulli se conserva en toda la región del flujo, o sea:

$$B = \varepsilon + \underbrace{z + \frac{p}{\gamma}}_{\frac{\hat{p}}{\gamma}} + \frac{v^2}{2g} = H$$

$$\frac{dB}{dz} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\hat{p}}{dz} + \frac{v}{g}\frac{dv}{dz} = 0$$

$$\frac{v}{g}\frac{dv}{dz} = -\rho\frac{v^2}{r} \quad , \quad r = R_0 + z$$

$$-\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dz}{R_0 + z}$$

$$-\ln v = \ln(R_0 + z) + Cte$$

$$\therefore (R_0 + z)\, v = C_1$$

Si en $z = 0$, $v = v_0 \Rightarrow (R_0 + z)\, v = R_0 v_0 \Rightarrow v = \frac{R_0}{R_0 + z} v_0$

$$\therefore q = \int_0^e v\, dz = \int_0^e \frac{R_0 v_0}{R_0 + z}\, dz$$

$$q = R_0 v_0 \ln\left(\frac{R_0 + e}{R_0}\right)$$

Además $B_1 = B_0 = H$

$$H = \varepsilon + e + \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(H - \varepsilon - e)}$$

$$H = \varepsilon + \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g(H - \varepsilon)}$$

$$\therefore \quad \frac{v_1}{v_0} = k = \frac{R_0}{R_0 + e} \Rightarrow R_0 = \frac{ek}{1 - k}$$

Además $k^2 = \frac{2g(H-\varepsilon-e)}{2g(H-\varepsilon)} \Rightarrow e = (H-\varepsilon)(1-k^2)$

De donde obtenemos: $R_0 = (H-\varepsilon)(1+k)k$

De este modo, reemplazando R_0, v_0 y $R_0/(R_0+e)$ en la expresión del caudal, se obtiene:

$$q = (H-\varepsilon)(1+k)k\sqrt{2g(H-\varepsilon)}\,\ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

reordenando:

$$q = \left[k(1+k)\ln\left(\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{H}\right)^{3/2}\right] H\sqrt{2gH}$$

Se denomina coeficiente de gasto al término en paréntesis cuadrado.

$$m = \left[k(1+k)\ln(1/k)(1-\varepsilon/H)^{3/2}\right]$$

$$\therefore q = mH\sqrt{2gH}$$

El próximo paso es evaluar el coeficiente de gasto, m. Para ello, Boussinesq supuso que el caudal que evacúa el vertedero es el máximo posible para la carga disponible.

O sea, q máximo para H dado es equivalente a decir $m_{máximo}$. Por lo tanto:

$$\frac{dm}{dk} = 0$$

Despreciando la variación que puede tener E/H con k:

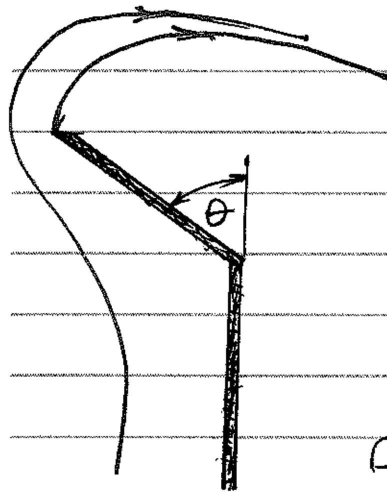
$$(1+k)\ln 1/k + k\ln(1/k) + k(1+k)k(-1/k^2) = 0$$

$$(1+2k)\ln(1/k) - (1+k) = 0$$

$$\Rightarrow k = 0.4685$$

PARÉNTESIS HISTÓRICO: El supuesto de Boussinesq ($q_{máx}$ para H dado) había sido propuesto anteriormente por otro grande de la hidráulica, Bélanger en 1849. El supuesto no es más que la aplicación del principio de mínima energía, el que ya había sido indicado en el siglo XV por da Vinci y posteriormente por Galileo en el siglo XVI. De manera formal sería presentado en 1661 por Fermat.

El problema siguiente es determinar E/H. Para ello se utiliza una expresión teórica derivada de la teoría del flujo potencial (o irrotacional), la que da el siguiente resultado.



$$\frac{\varepsilon}{H} = \frac{\varepsilon_e}{H}\left(\frac{1}{2} + \frac{\theta}{\pi}\right)$$

donde $$\left(1 - \frac{\varepsilon_e}{H}\right)^{3/2} = \frac{1}{(1+k)^{9/4}(1-k)^{3/4}}$$

Para $\theta = 0$ (pared vertical): $\frac{\varepsilon}{H} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_e}{H}$

Reemplazando el valor de $k = 0.4685$, se obtiene $\varepsilon_e/H = 0.2292$, de donde $\varepsilon/H = 0.115$
De este modo, reemplazando en la expresión del coeficiente de gasto, resulta:

$$m = 0.435$$

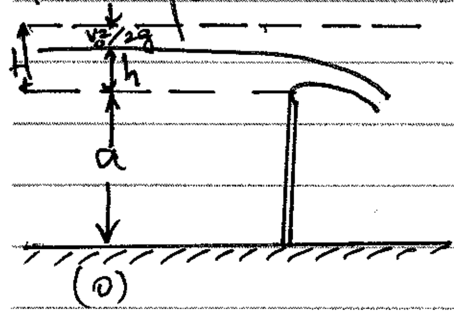
Este valor es coincidente con el obtenido experimentalmente por Bazin (experiencias realizadas entre 1868-1888):

$$\underline{\underline{m = 0.434}}$$

CORRECCIONES AL COEFICIENTE DE GASTO

i) EFECTO DE LA VELOCIDAD DE APROXIMACIÓN

La velocidad de aproximación del flujo puede despreciarse sólo si la altura de la barrera es suficientemente grande comparada con la carga



$$H = h + \alpha \frac{V_0^2}{2g}$$

$$q = m_0 H \sqrt{2gH}$$

m_0: valor del coeficiente de gasto para $V^2/2g \to 0$ (altura de velocidad despreciable)

$$q = m_0 \left(1 + \alpha \frac{V_0^2}{2gh}\right)^{3/2} h\sqrt{2gh}$$

$$q = m\, h\sqrt{2gh}$$

$$V_0 = \frac{q}{a+h} = \frac{m_0\left(1+\alpha\, V_0^2/2gh\right)^{3/2} h\sqrt{2gh}}{a+h}$$

Considerando que $\alpha V_0^2/2g$ no cambia demasiado el valor original m_0:

$$m = m_0\left(1+\alpha\frac{V_0^2}{2gh}\right)^{3/2} \simeq m_0\left(1+\frac{3}{2}\frac{\alpha}{2g}\frac{V_0^2}{h}\right)$$

$$V_0 = m\,\frac{h\sqrt{2gh}}{a+h}$$

Reemplazando V_0 en la expresión para m:

$$m = m_0\left(1+\frac{3}{2}\alpha\, m^2\left(\frac{h}{a+h}\right)^2\right)$$

~~Considerando~~ $\alpha = 1{,}6$ (experimental) y $m = 0.45$ resulta:

$$m \approx m_0\left(1+0.486\left(\frac{h}{a+h}\right)^2\right)$$

$$\therefore \quad m = 0.434 + 0.21\left(\frac{h}{h+a}\right)^2$$

Este valor se compara con las relaciones siguientes:

Bazin (1888) : $m = \left(0.405 + \frac{0.003}{h}\right)\left(1+0.55\left(\frac{h}{h+a}\right)^2\right)$ (h en m.)

Rehbock (1929): $m = \left(0.402 + 0.054\frac{h}{a} + \frac{6\times10^{-5}}{a}\right)\left(1+\frac{0.011}{h}\right)$
válida para $\frac{a}{h} > 0.2$ (a, h en m.).

ii) EFECTO DE LA INCLINACION DE LA BARRERA
(Tabla 6.1 Manual)

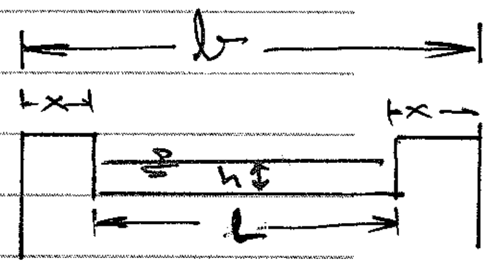
iii) EFECTO DE LA CONTRACCIÓN LATERAL
Para un vertedero sin contracción lateral se cumple:

$$Q = m L h \sqrt{2gh}$$

donde L es el ancho del vertedero. (longitud)

Si hay contracción lateral, se considera

$$Q = m_c L h \sqrt{2gh}$$



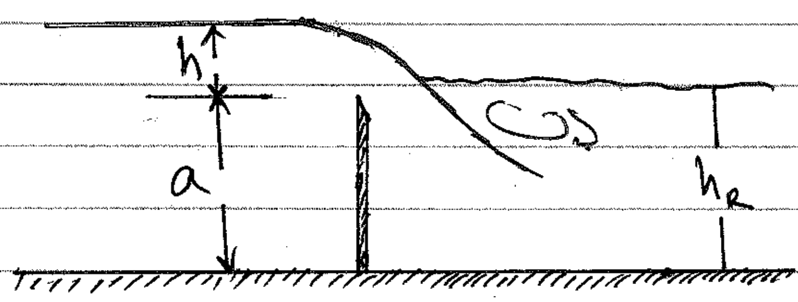
donde $m_c = m\left(1 - 2n\frac{h}{L}\right)$

para contracción lateral completa ($x > 3h$, $l > 3h$) se cumple $n = 0.10$.

Hégly (discípulo de Bazin) propuso la "FÓRMULA COMPLETA DE BAZIN", que toma en cuenta todos los efectos, incluyendo el caso de contracción incompleta:

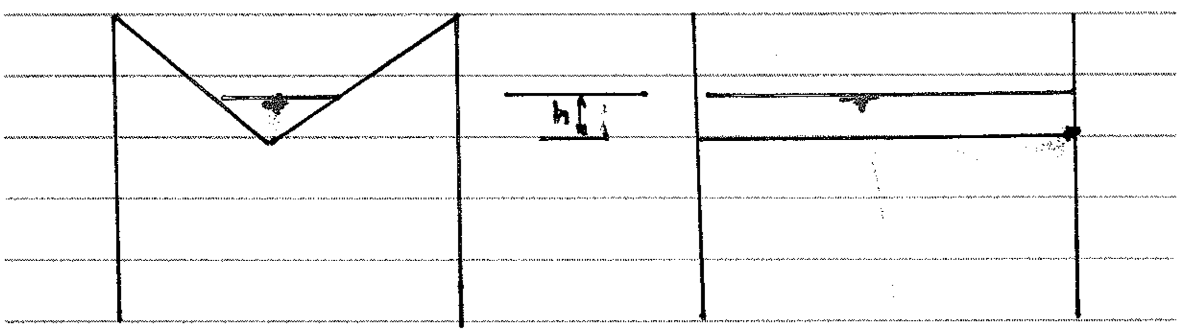
$$m = \left(0.405 - 0.03\left(1 - \frac{L}{b}\right) + \frac{0.0027}{h}\right)\left(1 + 0.55\left(\frac{L}{b}\,\frac{h}{h+a}\right)^2\right)$$

iv) INFLUENCIA DEL NIVEL DE AGUAS ABAJO
(Ver. Fig. 6.2 del Manual)



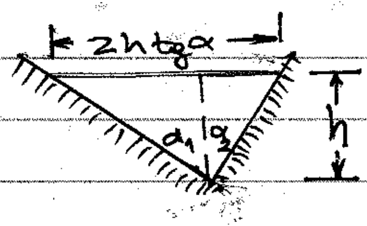
VERTEDEROS TRIANGULARES

Este tipo de vertedero permite una mejor precisión para caudales bajos respecto al vertedero rectangular ya que el área de flujo es proporcionalmente menor.



VERTEDERO TRIANGULAR VERTEDERO RECTANGULAR

Mediante análisis dimensional puede obtenerse fácilmente la dependencia del caudal con h



$$tg\,\alpha = \frac{1}{2}(tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2)$$

Las variables involucradas en el fenómeno son:

$Q, \rho, \mu, \sigma, h, tg\,\alpha$ y g

$$Q = f(\rho, \mu, \sigma, h, tg\,\alpha, g)$$

Aplicando el Teorema Π es fácil obtener:

$$\frac{Q}{h^2\sqrt{gh}} = \Phi\left(tg\,\alpha, \frac{g^{1/2}h^{3/2}}{\mu/\rho}, \frac{\sigma}{\rho g h^2}\right)$$

$$\mathrm{Re} = \frac{h\sqrt{gh}}{\mu/\rho} \quad , \quad \mathrm{We} = \frac{\sigma}{\rho g h^2}$$

$$\therefore \quad \frac{Q}{h^2\sqrt{gh}} = \Phi\left(\operatorname{tg}\alpha, \mathrm{Re}, \mathrm{We}\right)$$

Es fácil ver que Q es proporcional a $\operatorname{tg}\alpha$ porque el área de escurrimiento está dado por: $\Omega = \frac{1}{2} h \, 2h \operatorname{tg}\alpha = h^2 \operatorname{tg}\alpha$

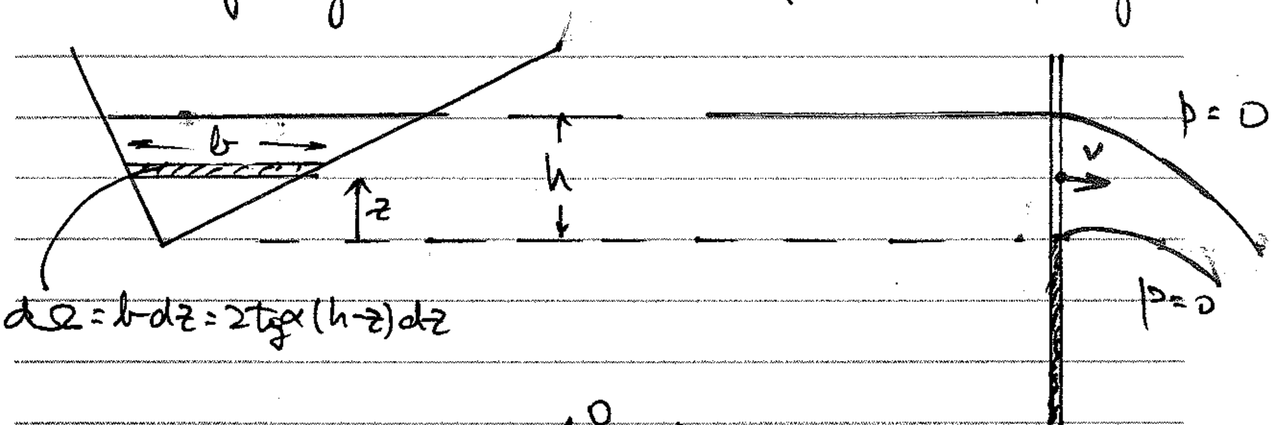
$$\therefore \quad \frac{Q}{h^2\sqrt{gh}} = \operatorname{tg}\alpha \, \Phi'\left(\mathrm{Re}, \mathrm{We}\right)$$

o sea $\quad Q = m \operatorname{tg}\alpha \, h^2 \sqrt{2gh}$

donde m es el coeficiente de gasto y es una función de Re y We : $m = \Phi'(\mathrm{Re}, \mathrm{We})$

El coeficiente de gasto para vertederos triangulares de pared delgada fue estudiado por Don Pancho J. y sus memoristas de la U. Católica Cruz-Coke y Moya, quienes se recibieron en 1924. Los resultados se reducen a un gráfico de m en función de la altura h, el que se presenta en la Fig 6.1 del Manual

También es posible deducir una expresión para el caudal en forma analítica.
Suponiendo que la velocidad de aproximación es nula (barrera muy alta) y que la presión en la vena líquida es la atmosférica, el análisis al considerar flujo irrotacional es el siguiente:



$d\Omega = b\,dz = 2\,tg\alpha\,(h-z)\,dz$

$$B = h = h - z + \cancel{\frac{p}{\gamma}}^{\,0} + \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{2gz}$$

$$Q = \int v\,d\Omega = \int_0^h \sqrt{2g}\,\sqrt{z}\,(h-z)\,2\,tg\alpha\,\mu\,dz$$

coeficiente de contracción

$$Q = 2\sqrt{2g}\,tg\alpha\,\mu \int_0^h \left(h\sqrt{z} - z^{3/2}\right)dz$$

$$Q = \frac{8}{15}\,\mu\,tg\alpha\,h^2\sqrt{2gh}$$

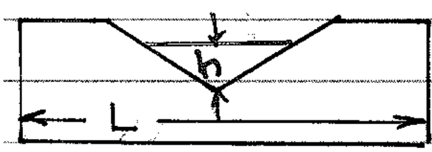
Luego, el coeficiente de gasto está dado por $m = \frac{8}{15}\mu$. Si se usa $\mu = 0.61$, resulta $m = 0.326$. En realidad, μ depende de $tg\alpha$. Si se observa el gráfico de Cruz-Coke y Moya se obtiene, para la región en la cual los efectos viscosos y capilares son despreciables los siguientes valores en función de $2\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

2α	15°	30°	45°	60°	90°	120°
m	0.342	0.330	0.325	0.320	0.316	0.322

CORRECCIONES AL COEFICIENTE DE GASTO DEL VERTEDERO TRIANGULAR

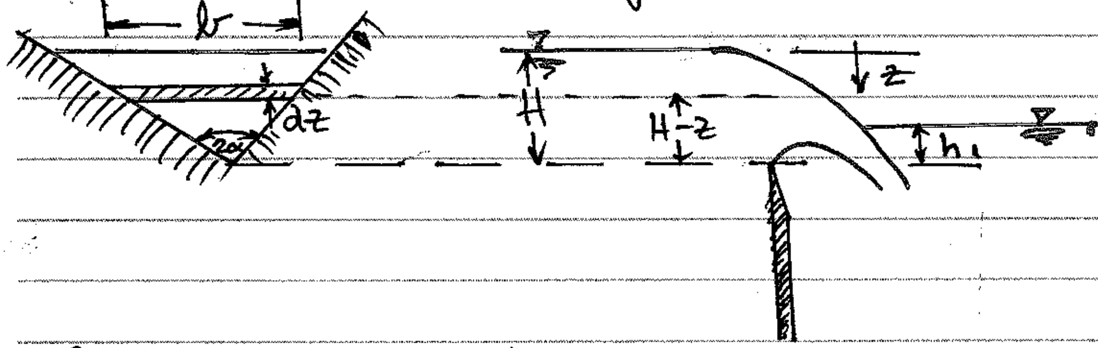
i) INFLUENCIA DEL ANCHO DEL CANAL

En el vertedero triangular tiene poca influencia la altura de la barrera y el ancho del canal. El factor de corrección $f = \frac{m}{m_o}$, donde m_o es el coeficiente de gasto para un vertedero triangular en un canal muy ancho (valor de Cruz-Coke y Moya). El factor f depende de la razón L/h y de tgα. Los valores se presentan en la ~~Fig.~~ Tabla 6.3 del Manual



ii) EFECTO DE SUMERGENCIA DEL VERTEDERO

El vertedero triangular requiere de una gran carga si se compara con el vertedero rectangular. Esto ha llevado a permitir que el vertedero opere parcialmente sumergido o ahogado, es decir con un nivel de aguas abajo por sobre el vértice del vertedero. El efecto de sumergencia es relativamente fácil de cuantificar,



Consideremos flujo irrotacional. Entre $z=0$ y $z=H-h_1$ es fácil ver que la velocidad está dada por $v_1=\sqrt{2gz}$.
Entre $z=H-h_1$ y $z=H$, la carga es constante e igual a $H-h_1$, por lo que la velocidad está dada por $v_2=\sqrt{2g(H-h_1)}$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \int v_1\, d\Omega + \int v_2\, d\Omega$$

$$Q_1 = \int \sqrt{2gz}\, b\, dz = \mu 2 \operatorname{tg}\alpha \sqrt{2g} \int_0^{H-h_1} \sqrt{z}(H-z)\, dz$$

Integrando: $Q_1 = \frac{4}{15}\mu \operatorname{tg}\alpha \sqrt{2g}\left[2H+3h_1\right](H-h_1)^{3/2}$

$$Q_2 = \int_{H-h_1}^{H} \sqrt{2g(H-h_1)}\, \mu 2 \operatorname{tg}\alpha\, (H-z)\, dz = \mu \operatorname{tg}\alpha\, h_1^2 \sqrt{2g(H-h_1)}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{4}{15}\mu \operatorname{tg}\alpha \sqrt{2g}\left[(2H+3h_1)\sqrt{(H-h_1)^3} + \frac{15}{4}h_1^2\sqrt{H-h_1}\right]$$

Definiendo $S = \frac{h_1}{H}$: grado de sumergencia

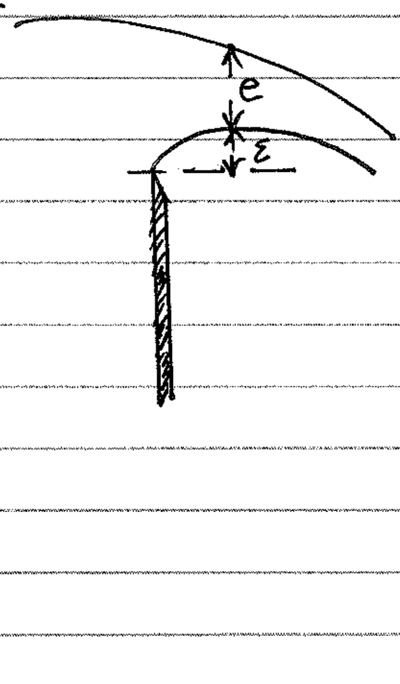
y con un par de pasos algebraicos es fácil expresar la ecuación para Q como:

$$Q = \frac{8}{15}\mu \, tg\alpha \left[1 + \frac{1}{2}S + \frac{3}{8}S^2\right]\sqrt{1-S}\; H^2\sqrt{2gH}$$

El término $\frac{8}{15}\mu$ corresponde al coeficiente de gasto de un vertedero sin efecto de sumergencia, m_o. Luego la corrección está dado por:

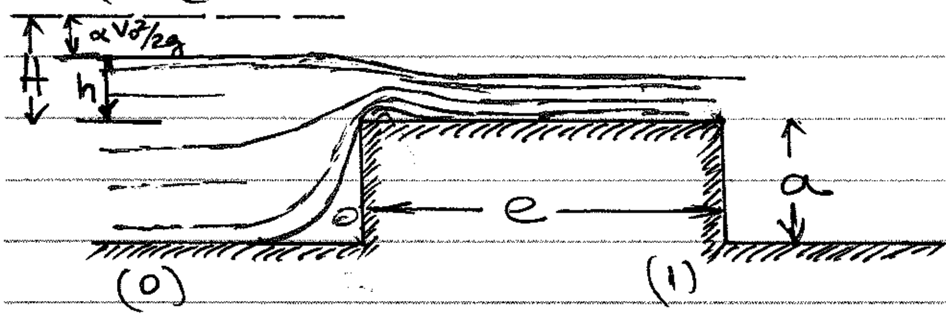
$$\frac{m}{m_o} = \left[1 + \frac{1}{2}S + \frac{3}{8}S^2\right]\sqrt{1-S}$$

Este resultado es válido siempre que $h_1 < \varepsilon + e$



VERTEDEROS DE PARED GRUESA

En los vertederos de pared gruesa, el flujo sobre la pared alcanza a tener líneas de corriente paralelas, por lo que se tiene una distribución hidrostática de presiones. Para que un vertedero sea de pared gruesa debe cumplirse $e > 3h$ o $e > 5h_c$, donde e es la longitud de la barrera.



Consideremos que el vertedero se ubica en un canal de sección rectangular. Se cumple:

$$B_0 = B_1 + \sum \Lambda$$

Si el flujo en el vertedero no está influido por aguas, existe crisis sobre la pared.

$$B_0 = H = h + \alpha \frac{V_0^2}{2g}$$

$$B_1 = \frac{3}{2} h_c$$

$$\therefore H = \frac{3}{2} h_c + \sum \Lambda \qquad (*)$$

Las pérdidas de energía corresponden

a una singular, de entrada, más la friccional sobre la barrera. Evaluemos esta última a partir de la ecuación de Chèzy:

$$\Sigma\Lambda = \Lambda_s + \Lambda_f = \lambda_e \frac{V_c^2}{2g} + Je$$

donde λ_e es el coeficiente de pérdida de entrada. Para una contracción completa ($a/h_c \geq 3.5$), $\lambda_e = 1/3$. Para contracciones incompletas la relación λ_e en función de a/h_c está dada en la Tabla 6.5 del Manual.

Chèzy: $V = C\sqrt{hJ}$, $J = \dfrac{V^2}{C^2 h}$

$$\therefore \Sigma\Lambda = \lambda_e \frac{V_c^2}{2g} + \frac{V_c^2\, e}{C^2 h_c} = \left(\lambda_e + \frac{2g}{C^2}\frac{e}{h_c}\right)\frac{V_c^2}{2g}$$

Denominando $N = e/h_c$

$$\Sigma\Lambda = \left(\lambda_e + \frac{2g}{C^2}N\right)\frac{V_c^2}{2g}$$

Pero $\dfrac{V_c^2}{2g} = \dfrac{h_c}{2}$ $\therefore$ $\Sigma\Lambda = \left(\lambda_e + \dfrac{2g}{C^2}N\right)\dfrac{h_c}{2}$

De este modo, la Ec. (*) queda

$$H = \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\lambda_e + \frac{2g}{C^2}N\right)\right] h_c$$

Para un canal rectangular $q^2/g = h_c^3$

$$\therefore\ H = \frac{1}{2}\left[3 + \lambda_e + \frac{2g}{C^2} N\right]\left(g^{-1} q^2\right)^{1/3}$$

$$(2H)^3 = \left[3 + \lambda_e + \frac{2g}{C^2} N\right]^3 g^{-1} q^2$$

$$2gH\,(2H)^2 = \left[3 + \lambda_e + \frac{2g}{C^2} N\right]^3 q^2$$

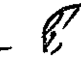
$$\therefore\ q = \frac{2}{\left[3 + \lambda_e + \frac{2g}{C^2} N\right]^{3/2}} H\sqrt{2gH}$$

De donde resulta que el coeficiente de gasto está dado por

$$m = \frac{2}{\left[3 + \lambda_e + \frac{2g}{C^2} N\right]^{3/2}}$$

Para un vertedero de hormigón, $C = 50$. Es frecuente tomar $N = e/h_c = 7.5$.

Cuando se tiene arista viva , $\lambda_e = 1/3$, resultando $m = 0.32$.

Si se tiene entrada redondeada , $\lambda_e = 0$ y resulta $m = 0.37$.

CORRECCIONES AL COEFICIENTE DE GASTO

i) EFECTO DE LA VELOCIDAD DE APROXIMACIÓN

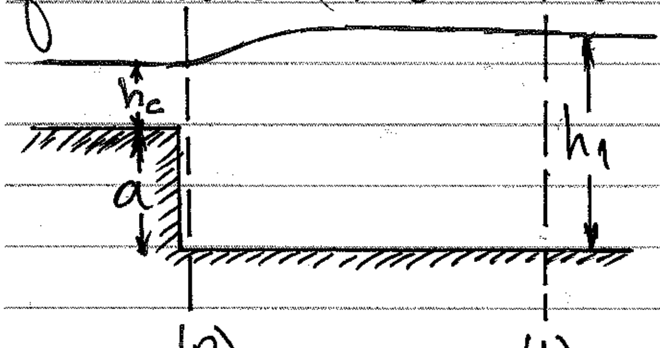
La determinación de la corrección del coeficiente de gasto debido a que la altura de la barrera no es muy grande se hace de manera idéntica a como se calculó para el vertedero rectangular de pared delgada. En este caso, se adopta $\alpha = 1.43$ y $m = 0.35$, resultando

$$m = m_0 \left(1 + 0.26 \left(\frac{h}{h+a}\right)^2\right)$$

donde m_0 es el coeficiente de gasto cuando la velocidad de aproximación es despreciables.

ii) INFLUENCIA DEL ~~NIVEL~~ NIVEL DE AGUAS ABAJO

A diferencia de lo que sucede en los vertederos de pared delgada, en los de pared gruesa el nivel de aguas abajo puede superar el umbral del vertedero y no modifican el coeficiente de gasto ya que al existir crisis sobre la grada, el flujo aguas arriba de ella es independiente de lo que sucede aguas abajo. Para que exista influencia de aguas abajo, debe destruirse la crisis sobre el vertedero. La altura límite de aguas abajo que destruye la crisis puede determinarse fácilmente utilizando la función momenta.



$$M_0 = M_1$$

$$\frac{1}{2}(h_c+a)^2 + \frac{q^2}{g h_c} = \frac{1}{2}h_1^2 + \frac{q^2}{g h_1}$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{h_c}\right)^2 h_c^2 + \frac{q^2}{g h_c} = \frac{1}{2}h_1^2 + \frac{q^2}{g h_1}$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{h_c}\right)^2 + \frac{q^2}{g h_c^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{h_c}\right)^2 + \frac{q^2}{g h_1}\frac{1}{h_c^2}$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{h_c}\right)^2 + \frac{q^2}{g h_c^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{h_c}\right)^2 + \frac{q^2}{g h_c^3}\,\frac{h_c}{h_1}$$

Pero $\frac{q^2}{g h_c^3} = 1$. Llamando $K = \frac{a}{h_c}$, $X_1 = \frac{h_1}{h_c}$, la condición límite está dada por:

$$\frac{1}{2}(1+K)^2 + 1 = \frac{1}{2}X_1^2 + \frac{1}{X_1}$$

Esta ecuación permite obtener la mínima altura (K) que asegura crisis en el vertedero, para una condición dada de aguas abajo (X_1) o, dada una altura, K, el máximo ~~xxx~~ valor de X_1 para que no haya influencia de aguas abajo

Si existe influencia de aguas abajo, el coeficiente de gasto puede conseguirse a partir de los resultados de Bazin, los que se presentan en la Tabla 6.6 del Manual.

Don Pancho J. recomienda usar, de manera alternativa, para vertederos de pared gruesa con arista viva, la siguiente expresión; válida para $X_1 - K < 2{,}5$.

$$m = 0.532 - 0.153\,(X_1 - K)$$

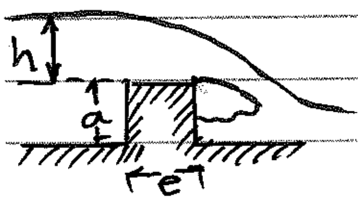
Si los vertederos son de pared redondeada, Don Pancho recomienda usar el valor anterior, aumentado en un 10%.

VERTEDEROS DE PAREDES INTERMEDIAS

Son vertederos de pared intermedia aquellos en los que no se tiene líneas de corriente paralelas sobre el umbral. Esta situación se tiene para $e/h_c < 5$ o $e/h < 3$.

Las relaciones de cálculo para este tipo de vertederos se han obtenido experimentalmente. En este tipo de vertederos, dependiendo del espesor e y de la carga h, se puede producir adherencia del flujo al umbral, alterando el coeficiente de gasto.

Para napas libres $0.5 < e/h < 3$, Don Pancho J. sugiere el uso de la relación de Bazin:



$$\frac{m}{m_0} = 0{,}7 + 0{,}185\,\frac{h}{e}$$

donde m_0 es el coeficiente de gasto de vertederos de pared delgada.

Para napas adheridas o no-libres Don Pancho recomienda usar los resultados de Bazin, los que se presentan en la Fig 6.3 del Manual.

INFLUENCIA DE AGUAS ABAJO

La corrección al coeficiente de gasto debido a la influencia de aguas abajo también los calculó Don Pancho a partir de las experiencias de Bazin y están dadas en la Fig 6.4 del Manual

EVACUADORES DE CRECIDAS.

VERTEDEROS DE PERFIL NORMALIZADO

Ref. Ven Te Chow, Capítulo 14.

Los evacuadores de crecidas se diseñan para grandes caudales, con una forma tal que sea similar a la superficie inferior de la vena que se genera en un vertedero de pared delgada, con el objeto que las presiones sobre la pared del vertedero sea lo más parecida a la atmosférica.

Ver Figs. 6.5, 6.6 y 6.7 del Manual
Leer capítulo 14 de V.T. Chow
Chapter 6, Henderson