VELOCIDAD DE PROPAGACION DE ONDAS SUPERFICIALES PLANAS

Consideremos un líquido en reposo con su superficie libre a una distancia h de un fondo plano, como se esquematiza en la Fig.1.

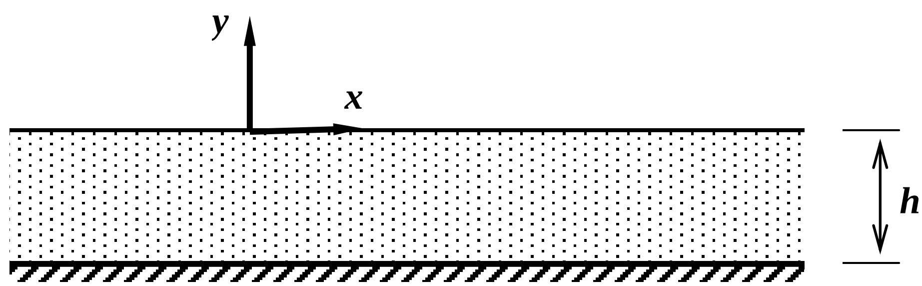

Fig. 1

Si externamente se perturba la superficie, ésta se deformará y, debido a la acción de la gravedad, variará en el tiempo. Llamando η el desplazamiento vertical de la superficie libre en una posición x para un tiempo t, la situación perturbada es como la indicada en la Fig. 2. El problema consiste en determinar cómo se propaga la perturbación cuando ella es pequeña.

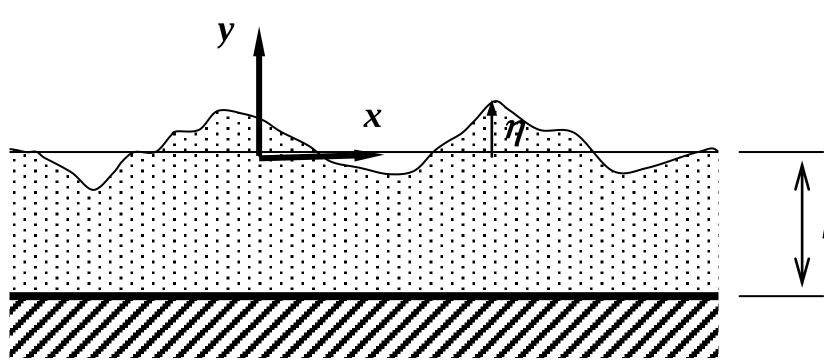

Fig. 2

Consideremos que el movimiento del fluido es irrotacional. Recordando lo estudiado a finales del curso de Mecánico de Fluidos (ver Anexo), el problema consiste en resolver la ecuación de Laplace para la función potencial ϕ, con las condiciones de borde apropiadas:

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad (1)$$

Resolviendo la Ec. 1, es posible determinar el campo de velocidades en la masa de fluido. La presión se obtiene a partir de la ecuación de Bernoulli (impermanente). Las condiciones de borde se aplican en el fondo (y = -h) y en la superficie libre (y = η).

En el fondo no existe velocidad según y (v = 0), luego:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0\,, \quad \text{en } \; y = -h \qquad (2)$$

En la superficie libre existen dos condiciones: una cinemática y otra dinámica. El movimiento vertical de las partículas de la superficie libre está dado por:

$$\frac{d\eta}{dt} = v$$

La posición de la superficie libre es función de x y t, por lo que podemos escribir:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + u\frac{\partial\eta}{\partial x} = v\,, \quad \text{en } \; y = \eta$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}\,, \quad \text{en } \; y = \eta \qquad (3)$$

La condición dada por la relación anterior constituye la condición de borde cinemática, ya que involucra sólo desplazamientos y velocidad. La condición de borde dinámica es la que resulta de imponer que en la superficie libre la presión es cero:

$$p = 0\,, \quad \text{en } \; y = \eta$$

En un flujo irrotacional, la presión se liga con la velocidad mediante la ecuación de Bernoulli, que para el caso impermanente establece que:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} + B = F(t)$$

Eligiendo el nivel de referencia en y = 0, el Bernoulli está dado por:

$$B = \eta + \frac{V^2}{2g}$$

Luego, la condición dinámica se expresa como:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta + \frac{1}{2g}\left(\nabla \phi \cdot \nabla \phi\right) = F(t)\,, \quad \text{en } \; y = \eta \tag{4}$$

La resolución de la Ec. 1 con las condiciones de borde dadas por las Ecs. 2, 3 y 4 es difícil de abordar, dados los términos no lineales de las Ecs. 3 y 4. Sin embargo, al considerar perturbaciones de pequeña amplitud, es posible simplificar el problema al eliminar los términos no lineales. Llamando λ a la longitud de onda, una perturbación de pequeña amplitud quiere decir que $|\eta| << \lambda$ y que $|\eta| << h$. Que el desplazamiento sea pequeño respecto a la longitud de onda implica que la pendiente de la superficie libre es pequeña, o sea $\partial \eta / \partial x$ es pequeño. Desplazamientos pequeños de la superficie libre inducen velocidades pequeñas en el fluido, por lo que $u = \partial \phi / \partial x$ y $v = \partial \phi / \partial y$ serán pequeños. De este modo, es posible despreciar el término $\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}$ de la Ec. 3, y el término $\nabla \phi \cdot \nabla \phi$ de la Ec. 4, quedando el problema reducido a :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

con las condiciones de borde:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0\,, \quad \text{en } \; y = -h \tag{6}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y}\,, \quad \text{en } \; y = \eta \tag{7}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta = F(t)\,, \quad \text{en } \; y = \eta \tag{8}$$

F(t) no es más que una constante de integración por lo que , sin perder generalidad puede ser absorbida dentro de la función ϕ si se define una función $G = -\int F(t)\,dt$. De este modo, se puede formar una nueva función potencial ϕ_1, dada por

$$\phi_1 = \phi + G$$

la que satisface:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - F \quad , \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad , \quad \nabla^2 \phi_1 = \nabla^2 \phi$$

Luego, en términos de la nueva función, el problema a resolver es:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0 \tag{5a}$$

con las condiciones de borde

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0\,, \quad \text{en } y = \text{-}h \tag{6a}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\,, \quad \text{en } y = \eta \tag{7a}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \eta = 0\,, \quad \text{en } y = \eta \tag{8a}$$

Supongamos ahora que la deformación es sinusoidal y está dada por

$$\eta = \varepsilon\, sen\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \right) \tag{9}$$

donde ε es la amplitud de la deformación, la que debe ser pequeña, o sea $\varepsilon << \lambda$ y $\varepsilon << h$. El haber elegido una deformación dada por la Ec. 9 no es ninguna restricción al problema, ya que sabemos que mediante series de Fourier es posible expresar cualquier forma que tome la superficie libre como una suma de senos y cosenos. En la Ec. 9, c corresponde a la celeridad de la onda, o sea la velocidad con que se propaga la deformación de la superficie en la dirección x. Es lógico preguntarse si existe alguna dependencia de c con los parámetros que definen la forma de la onda (ε y λ) y la profundidad del flujo (h), o si la celeridad es un parámetro independiente de ellos. Para responder la pregunta debemos resolver la Ec. 5a con la condición de borde dada por la Ec. 6a y las condiciones definidas por las Ecs. 7a y 8a transformadas en:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\varepsilon \frac{2\pi}{\lambda} c\, cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \right), \quad \text{en } y = \eta \tag{7b}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -\varepsilon\, sen\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \right), \quad \text{en } y = \eta \tag{8b}$$

La solución de la Ec. 5a con las condiciones de borde dada por las Ecs. 6a, 7b y 8b puede obtenerse mediante el método de separación de variable, resultando:

$$\phi_1 = cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) \right) \left[C_1\, senh\left(\frac{2\pi y}{\lambda} \right) + C_2\, cosh\left(\frac{2\pi y}{\lambda} \right) \right] \tag{10}$$

La condición de borde en el fondo permite obtener una relación entre C_1 y C_2 :

En $y = -h$, $\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0$, se traduce en la siguiente relación:

$$cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right)\left[C_1\frac{2\pi}{\lambda}cosh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)-C_2\frac{2\pi}{\lambda}senh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)\right]=0 \qquad (11)$$

Como la condición debe satisfacerse para cualquier x y t, resulta que el término en paréntesis cuadrado debe ser nulo, resultando

$$C_1 = C_2\, tgh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \qquad (12)$$

Reemplazando Ec. 12 en Ec. 10:

$$\phi_1 = C_2\, cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right)\left[tgh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)senh\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right)+cosh\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right)\right] \qquad (13)$$

Para aplicar la condición dinámica conviene expresar η de la Ec. 8a en términos de ϕ_1. Haciendo $d($Ec.8a$)/dt$:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}+\frac{1}{g}\frac{\partial \phi_1}{\partial x}u+\frac{d\eta}{dt}=0\,, \quad \text{en } y=\eta$$

Reemplazando $u = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}$ y $\frac{d\eta}{dt} = v = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}$ en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}+\frac{1}{g}\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\frac{\partial \phi_1}{\partial y}=0$$

Como la velocidad es pequeña, podemos despreciar el término no lineal, quedando finalmente:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}+\frac{\partial \phi_1}{\partial y}=0\,, \quad \text{en } y=\eta \qquad (14)$$

Reemplazando Ec. 13 en la condición dada por la Ec. 14, e imponiendo que cuando $\frac{\eta}{\lambda} << 1$, $senh \approx 0$ y $cosh \approx 1$, resulta

$$C_2\,cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right)\left[-\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2+g\,\frac{2\pi}{\lambda}tgh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)\right]=0 \qquad (15)$$

Como la Ec. 15 debe ser válida para cualquier x y t, nuevamente el término en paréntesis cuadrado debe ser nulo, o sea:

$$\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2=g\,\frac{2\pi}{\lambda}tgh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)$$

$$\frac{c^2}{gh}=\frac{\lambda}{2\pi h}tgh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \qquad (16)$$

La ec. 16 indica la relación entre la celeridad de la onda con su longitud y la altura de la masa de agua, y es válida si $\varepsilon << \lambda$ y $\varepsilon << h$. Dado que en la Ec. 16 aparece el cuociente λ/h, podemos analizar dos casos límites: $\lambda >> h$ y $h >> \lambda$.

Si $\lambda >> h$, $tgh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)\approx\frac{2\pi h}{\lambda}$, por lo que la Ec. 16 queda:

$$\frac{c^2}{gh}=1 \qquad (17)$$

O sea, la velocidad de propagación de una onda infinitesimal en una masa de fluido de profundidad h (finita), está dada por:

$$c=\sqrt{gh} \qquad (18)$$

Notar que este resultado también es aplicable si el fluido se mueve con una velocidad U en la dirección x, ya que el problema no cambia si se analiza respcto a un sistema de coordenadas que se mueve con velocidad U (c es una velocidad relativa al flujo).

La otra situación límite corresponde a $h >> \lambda$. En este caso $tgh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)\approx 1$, quedando la Ec. 16 como

$$\frac{c^2}{gh}=\frac{\lambda}{2\pi h}$$

$$\frac{c^2}{g\lambda} = \frac{1}{2\pi} \tag{19}$$

O sea, en aguas profundas, la celeridad de la onda depende sólo de su longitud. Éste es un resultado de interés en hidráulica marítima.

ANEXO: REPASO DE FLUJO POTENCIAL

Un flujo irrotacional está definido por

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \tag{A1}$$

y existe una función escalar ϕ, llamada función potencial, tal que

$$\vec{V} = \nabla \phi \tag{A2}$$

Es fácil ver que en dos dimensiones se tiene:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad\qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{A3}$$

La ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, en términos de la función potencial se expresa como:

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{A4}$$

La solución de la Ec. A4 con las condiciones de borde adecuadas permite conocer el campo de velocidades.

La ecuación del movimiento del fluido puede escribirse como:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla B = 0 \tag{A5}$$

donde $B = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$ es la suma de Bernoulli. Usando la Ec. A2:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \nabla\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}\right) = 0$$

$$\nabla\left(\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} + z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}\right) = 0$$

Al integrar sobre todo el espacio, resulta que

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} + z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = F(t) \qquad \text{(A6)}$$