

P11 • Esfuerzo equivalente:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2)]$$

• Esfuerzos principales (2D):

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}; \quad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{\max} = \max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \right\}$$

• Criterios de Fluencia:

1-) Von Mises:

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}$$

(Esf. eq. en fn. de esf. ppales.)

$$\rightarrow \sigma_v \leq \sigma_y$$

2-) Tresca

$$\sigma_{\max} \leq \frac{\sigma_y}{2}$$

• Ley de Hooke 3D:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33}))$$

$$\epsilon_{12} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{12}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33}))$$

$$\epsilon_{23} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{23}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}))$$

$$\epsilon_{13} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{13}$$

P11 $[\sigma] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & -2 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2)}$

$\leq \sigma_y$

* Despejando para σ_{31}

$$\sigma_{31} \leq \sqrt{\frac{1}{3} \sigma_y^2 - \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2]}$$

$$\therefore \sigma_{31} = 27,95 \text{ [MPa]}$$

• Calculamos el tensor de deformaciones usando Ley de Hooke:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) = 5,625 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) = -7,5 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = 2 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{12} = 0 \quad ; \quad \sigma_{23} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{23} = 0,699 \cdot 10^{-4}$$

$$\therefore [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} 5,625 & 0 & 0,699 \\ 0 & -0,75 & 0 \\ 0,699 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

22

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & -10 & 0 \\ -10 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Nos falta calcular σ_{33} , el cual puede deducirse mediante Ley de Hooke y el estado de deformación plana.

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Def. plana
(Todas las def. en el eje x_3 son cero)

* Estado de Deformación plana NO implica esfuerzo plano!

$$\rightarrow \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = 0$$

$$\therefore \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\Rightarrow [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & -10 & 0 \\ -10 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{bmatrix}$$

* Calculando el esf. equivalente en fn. de σ_{11} :

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^2 + \sigma_{13}^2)} \leq \sigma_y$$

$$\Rightarrow (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})^2 + 6\sigma_{12}^2 \leq 2\sigma_y^2$$

$$* (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 = \sigma_{11}^2 - 2\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2$$

$$* (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})^2 = ((1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11})^2 = [(1-\nu)\sigma_{22}]^2 - 2\nu(1-\nu)\sigma_{11}\sigma_{22} + \nu^2\sigma_{11}^2$$

$$* (\sigma_{11} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})^2 = ((1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})^2 = [(1-\nu)\sigma_{11}]^2 - 2\nu(1-\nu)\sigma_{11}\sigma_{22} + \nu^2\sigma_{22}^2$$

$$\Rightarrow [1 + \nu^2 + (1-\nu)^2] \sigma_{11}^2 - (2\sigma_{22} + 2\nu(1-\nu)\sigma_{22} + 2\nu(1-\nu)\sigma_{22}) \sigma_{11} + \sigma_{22}^2 + (1-\nu)^2 \sigma_{22}^2 + \nu^2 \sigma_{22}^2 + 6\sigma_{12}^2 - 2\sigma_{xy}^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{[1 + \nu^2 + (1-\nu)^2]}_{\alpha} \sigma_{11}^2 - \underbrace{2\sigma_{22}(1 + 2\nu(1-\nu))}_{\beta} \sigma_{11} + \underbrace{(\sigma_{22}^2 + (1-\nu)^2 \sigma_{22}^2 + \nu^2 \sigma_{22}^2 + 6\sigma_{12}^2 - 2\sigma_{xy}^2)}_{\gamma} \leq 0$$

$$\alpha = 1 + \nu^2 + (1-\nu)^2 = 1,0351$$

$$\beta = -2\sigma_{22}(1 + 2\nu(1-\nu)) = -275 \text{ [MPa]}$$

$$\gamma = (\sigma_{22}^2 + (1-\nu)^2 \sigma_{22}^2 + \nu^2 \sigma_{22}^2 + 6\sigma_{12}^2 - 2\sigma_{xy}^2) = -1989,049 \text{ [MPa]}$$

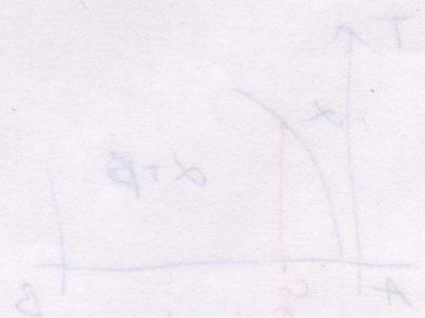
$$\therefore \sigma_{11} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

$$\sigma_{11}^{(1)} = 272,721 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = -7,946 \text{ [MPa]}$$

* Como nos dicen que σ_{11} es de tracción

$$\therefore \sigma_{11} = 272,721 \text{ [MPa]}$$



P3) $[\sigma] = \begin{bmatrix} 270 & -20 & 0 \\ -20 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 270 & -20 \\ -20 & 100 \end{bmatrix}$

• Calculando los est. principales:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$= \frac{270 + 100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{270 - 100}{2}\right)^2 + (-20)^2}$$

87,321

$\therefore \sigma_1 = 272,321 \text{ [MPa]}$	$\sigma_3 = 0$
$\sigma_2 = 97,679 \text{ [MPa]}$	

• Aplicando criterio de Von Mises:

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + (-\sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 258,96 \text{ [MPa]}$$

• Dado que $\sigma_v < \sigma_y \Rightarrow$ El material no falla por plasticidad //

• Aplicando criterio de Tresca:

$$\tau_{max} = \frac{|272,321 - 0|}{2} = 136,16 \text{ [MPa]}$$

$$\frac{\sigma_y}{2} = 120 \text{ [MPa]}$$

• Dado que $\tau_{max} > \frac{\sigma_y}{2}$, el material falla por plasticidad //

P4)
$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_1 = 100 \text{ [MPa]}$

$\sigma_2 = 50 \text{ [MPa]}$

$\sigma_{13} = \sigma_{21} = 0 \quad i \neq j$

• Dado que los est. principales están orientados en los ejes cartesianos, se tiene que el tensor de esfuerzos es:

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

• Calculando con Ley de Hooke σ_3 :

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = 0$$

$$\therefore \sigma_{33} = \sigma_3 = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 50 \text{ [MPa]}$$

$$\therefore [\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

• Calcular de las deformaciones:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) = 3,33 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) = 0$$

$$\therefore [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} 3,33 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Direcciones de σ pplos. son las mismas que direcciones de ε pplos, siempre cuando:

$\left. \begin{array}{l} \rightarrow E \text{ igual para todas las direcciones} \\ \rightarrow \nu \text{ igual para todas las direcciones} \end{array} \right\} \text{Isotropía!}$

* Se tiene un estado de esfuerzos aplicado a un sólido, tal que los únicos esfuerzos (en MPa) no nulos son:

$$\sigma_{11} = 30; \sigma_{22} = -20; \sigma_{33} \text{ de tracción, variable y creciente}$$

Se sabe que a este material se le efectuó un ensayo de corte puro (flexión, esf. de corte actuando en un solo plano, perpendicular al eje longitudinal de la probeta cilíndrica) y la fluencia comenzó a un valor de esf. de corte de 100 MPa.

Determine a qué valor de σ_{33} comenzará la fluencia, aplicando en todo la resolución del problema, tanto el criterio de Tresca como el de Von Mises.

• Los esf. principales tienen la particularidad de estar ordenados en los ejes principales como:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

• Luego: $\sigma_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ (Tresca)

• Entonces, para determinar σ_{33} con el criterio de Tresca, asumimos que σ_{33} es el esf. principal más grande:

$$\sigma_1 = \sigma_{33}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{11} = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_{22} = -20 \text{ MPa}$$

Tresca

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\therefore \sigma_1 = \sigma_0 + \sigma_3 = 2\sigma_{\max} + 20$$

$$\sigma_1 = 150 \text{ MPa}$$

Von Mises

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

- Para utilizar Von Mises, calculamos σ_0 desde el ensayo de flexión (Corte puro en un solo plano)

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) \right)^{1/2}$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (6 \tau_{12}^2)^{1/2} \Rightarrow \boxed{\sigma_0 = 173,21 \text{ [MPa]}}$$

100 MPa

- Luego, utilizamos las c.f. principales:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2} \left(\underbrace{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}_{\sigma_1 - 30} + \underbrace{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}_{\substack{30 - 20 \\ = 10}} + \underbrace{(\sigma_3 - \sigma_1)^2}_{-20 - \sigma_1} \right)$$

- Despejamos σ_1 :

$$\sigma_1^2 - 10\sigma_1 - 28098,24 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 5 \pm 167,7 \\ \quad \quad \quad \uparrow \text{(Tracción)} \\ \therefore \sigma_1 = 172,7 \text{ MPa} \end{array} \right.$$