

Auxiliar N°8

Profesor Cátedra: Roger Bustamante P.
Profesor Auxiliar: Rodrigo Bahamondes S.

Consultas a: rbahamondes@ing.uchile.cl

P1.- Notación indicial (símbolos básicos)

a) Demuestre las siguientes propiedades

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v}$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$$

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

b) Demuestre las siguientes propiedades del símbolo de permutación:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

$$\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{imn} = 2\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

c) Usando las propiedades del símbolo de permutación, demuestre que:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + \lambda^2\text{tr}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\lambda [(\text{tr}\mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2)] + \det\mathbf{A}$$

P2.- Notación indicial (Operadores Diferenciales)

a) Evalúe las derivadas de los invariantes I_1 e I_2 del tensor \mathbf{T} :

$$\frac{\partial(I_1)}{\partial\mathbf{T}} \qquad \frac{\partial(I_2)}{\partial\mathbf{T}}$$

b) Demuestre las siguientes propiedades (A_{mn} constantes)

$$\nabla(A_{mn}x_mx_n) = (A_{pn} + A_{np})x_n\mathbf{e}_p$$

$$\text{div}(\Phi\mathbf{u}) = \Phi \text{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \Phi$$

$$\text{grad}(\Phi\mathbf{u}) = \mathbf{u} \otimes \text{grad} \Phi + \Phi \text{grad} \mathbf{u}$$

c) Sea \mathbf{A} un campo tensorial de 2º orden. Utilizando el teorema de la divergencia, demuestre que:

$$\int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{n} = \int_B \operatorname{div} \mathbf{A}^T \mathbf{u} \, da$$

donde B es un volumen cerrado, $d\mathbf{B}$ es la superficie que encierra dicho volumen, $()^T$ es la traspuesta de un tensor y \mathbf{n} es un vector unitario normal exterior a la superficie en $d\mathbf{B}$.

P3.- (Esfuerzos Principales) En un eje circular sólido sujeto a torsión pura, el campo de esfuerzos está dado por:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Cx_2 \\ 0 & 0 & Cx_1 \\ -Cx_2 & Cx_1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde C es una constante. En el punto $(1,2,4)$, encuentre:

- Los esfuerzos principales
- Las direcciones principales
- El esfuerzo de corte máximo