Esfuerzos Principales y Criterios de Falla

- Esfuerzos principales

$$\sigma_{n_{max}} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}\right)^2 + \tau_{ij}^2}$$

$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}\right)^2 + \tau_{ij}^2}$$

$i, j = x, y$ ó z

$$\tan(2\theta_n) = \frac{2\tau_{ij}}{\sigma_i - \sigma_j}$$; θ_n: Ángulo para el cual los esf. ppales. son máximos

- Criterios de Falla

↳ Factor de Seguridad: $F_{adm} = \frac{F_{max}}{F.S.}$ $(\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{max}}{F.S.})$; F_{adm}: Fuerza máxima que debe aplicarse por seguridad

F_{max}: Fza máxima que debe aplicarse para que ocurra falla

↳ Criterio del esf. normal máximo: $\sigma_{adm} \leq \frac{\sigma_0}{F.S.}$; σ_0: Límite de Fluencia

↳ Criterio del esf. de corte máximo (Tresca)

$$\tau_{adm} \leq \frac{\tau_0}{F.S} = \frac{\sigma_0}{2F.S.}$$

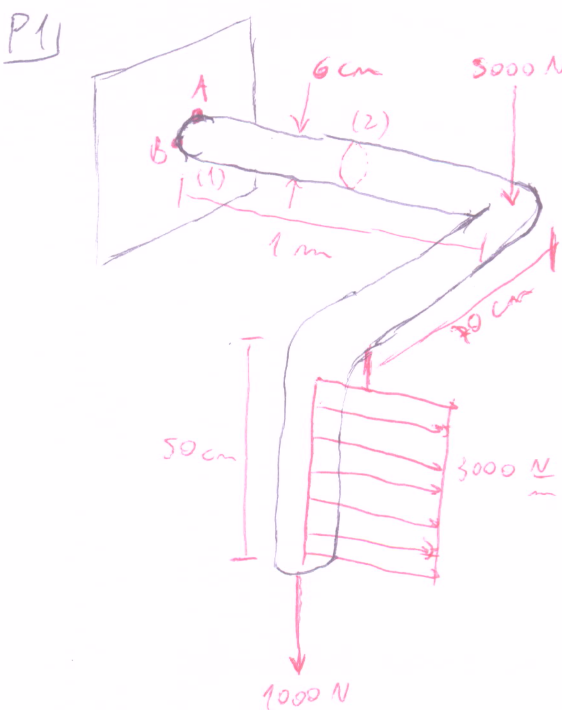
↳ Criterio de Von Mises

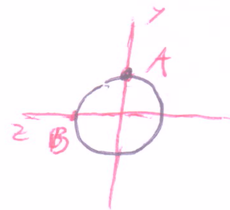
$$\sigma_{VM} \leq \frac{\sigma_0}{F.S} \; ; \; \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

Esf. ppales

2015

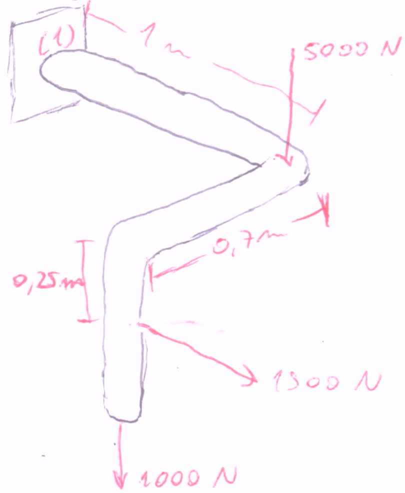
P1)





a) Para analizar el estado de esfuerzos en (1) y (2), es necesario mover las fuerzas a las zonas descritas. Al mover las Ftas. a (1), se generan momentos flectores y de torsión más fuertes que en (2), debido a que el "brazo" de las fuerzas es más grande. Por lo tanto, los esfuerzos serán más grandes en (1) que en (2)

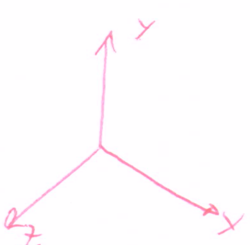
b)



* Trasladar la fuerza de 5000 N genera un momento en z de $(-5000 \cdot 1) = -5000$ N·m

* Trasladar la fuerza de 1000 N genera un momento en x de $(1000 \cdot 0{,}7) = 700$ N·m y un momento en z de $(-1000 \cdot 1) = -1000$ N·m

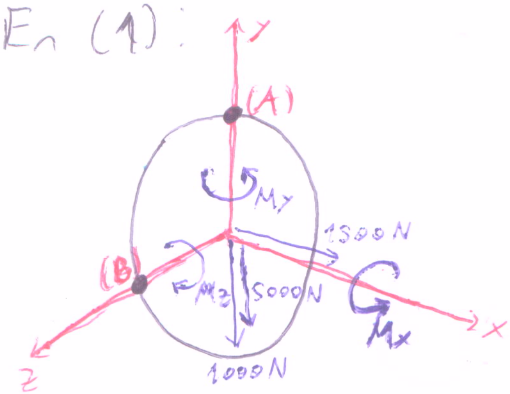
* Trasladar la fuerza de 1500 N genera un momento en z de $(1500 \cdot 0{,}25) = 375$ N·m y un momento en y de $(1500 \cdot 0{,}7) = 1050$ N·m



* Sumando todos los momentos en cada eje, se tiene:

$$\boxed{M_x = 700 \text{ N·m} \;/\; M_y = 1050 \text{ N·m} \quad M_z = -5000 - 1000 + 375 = -5625 \text{ N·m}}$$

En (1):



• Esfuerzos en (A)

↳ Esfuerzo de corte por torsión por M_x

↳ Esfuerzo de tracción por 1500 N

↳ Esfuerzo de tracción por flexión por M_z

• Esfuerzos en (B)

↳ Esfuerzo de corte por torsión por M_x

↳ Esfuerzo de corte por fuerza de 6000 N

↳ Esfuerzo de tracción por fuerza de 1500 N

↳ Esfuerzo de tracción por flexión por M_y

c) Para calcular los esfuerzos se tienen las siguientes fórmulas

↳ Tracción por fuerza axial: $\sigma = \dfrac{F}{A}$

↳ Tracción por momento flector: $\sigma = -\dfrac{M}{I}y$

↳ Corte por fuerza de corte: $\tau = \dfrac{V}{It}\displaystyle\int_y^c \xi \, dA$

↳ Corte por torsión: $\tau = \dfrac{Tr}{J}$ (Sección circular)

$\tau = \dfrac{T}{k_1 a b^2}$ $b \leq a$ (Sección rectangular)

✱ Propiedades de área:

↳ $A = \dfrac{\pi d^2}{4} = 2{,}827 \cdot 10^{-3}\ [m^2]$

↳ $I = \dfrac{\pi d^4}{64} = 6{,}362 \cdot 10^{-7}\ [m^4]$

↳ $J = \dfrac{\pi d^4}{32} = 1{,}272 \cdot 10^{-6}\ [m^4]$

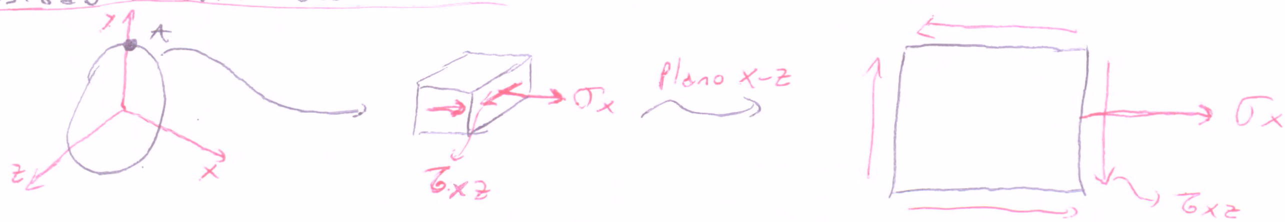
- Punto (A):

↳ Torsión de 700 Nm $\rightsquigarrow \tau_{xz} = \dfrac{T \cdot \left(\frac{d}{2}\right)}{J} = \dfrac{700 [Nm] \cdot 0{,}03 [m]}{1{,}272 \cdot 10^{-6} [m^4]} = 16{,}505$ [MPa]

↳ Tracción de 1500 N $\rightsquigarrow \sigma_x = \dfrac{F}{A} = \dfrac{1500 [N]}{2{,}827 \cdot 10^{-3} [m^2]} = 0{,}531$ [MPa]

↳ Tracción por flexión de -5625 Nm $\rightsquigarrow \sigma_x = -\dfrac{M}{I} y = \dfrac{5625 [N \cdot m] \cdot (0{,}03\ m)}{6{,}362 \cdot 10^{-7} [m^4]} = 265{,}247$ [MPa]

* Estado de esfuerzos en (A)



$\sigma_x = 265{,}747$ [MPa]
$\tau_{xz} = 16{,}505$ [MPa]

- Punto (B):

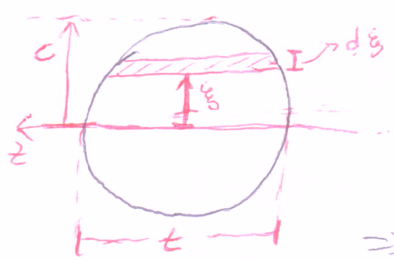
↳ Torsión de 700 Nm $\longrightarrow \tau_{xy} = -16{,}505$ [MPa]

↳ Tracción de 1500 N $\rightsquigarrow \sigma_x = 0{,}531$ [MPa]

↳ Tracción por flexión de 1050 Nm $\rightsquigarrow \sigma_x = \dfrac{1050\ Nm \cdot 0{,}03\ m}{6{,}362 \cdot 10^{-7}\ m^4} = 49{,}513$ [MPa]

↳ Corte por 6000 N

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{V}{It} \int_y^c \xi \, dA}$$



$dA = 2z\,d\xi$

$z^2 + \xi^2 = \dfrac{d^2}{4}$

$\Rightarrow z = \sqrt{\dfrac{d^2}{4} - \xi^2}$

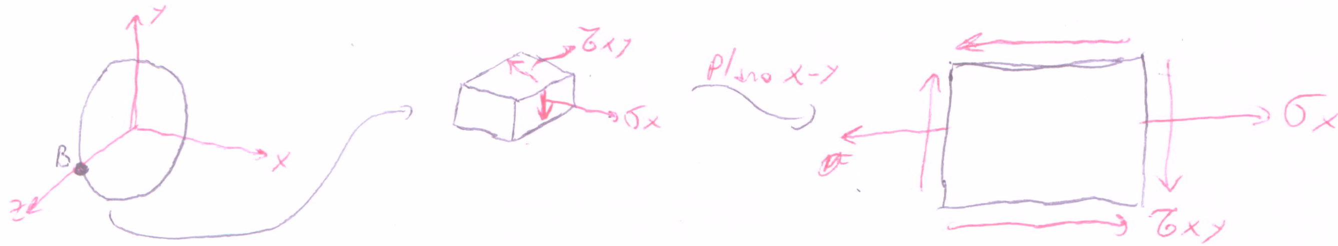
$\rightsquigarrow \boxed{dA = 2\sqrt{\dfrac{d^2}{4} - \xi^2}\, d\xi}$

$t = d = 0{,}06\ m$
$c = \frac{d}{2} = 0{,}03\ m$
$y = 0$

$$\rightsquigarrow \int_y^c \xi\, dA = \int_0^{d/2} 2\sqrt{\frac{d^2}{4} - \xi^2}\, \xi\, d\xi = \frac{2}{3}\left(\frac{d^2}{4}\right)^{3/2} = \frac{d^3}{12}$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{-6000\ N}{6{,}362 \cdot 10^{-7}\ m^4 \cdot 0{,}06\ m} \cdot \frac{(0{,}06)^3\ m^3}{12} \rightsquigarrow \boxed{\tau_{xy} = -2{,}829 \text{ [MPa]}}$$

* Estado de esfuerzos en (B)



$\sigma_x = 50,013\ [MPa]$

$\tau_{xy} = 19,334\ [MPa]$

d) En (A)

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$= \frac{265,747}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{265,747}{2}\right)^2 + (16,505)^2}$$

$$= 132,8735 \pm 133,8947$$

$$\boxed{\therefore\ \sigma_{n_1} = 266,7682\ [MPa]\ ;\ \sigma_{n_2} = -1,0212\ [MPa]}$$

$$\Rightarrow \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{n_1}^2 + \sigma_{n_2}^2 - \sigma_{n_1}\cdot\sigma_{n_2}} = 267,28\ [MPa]$$

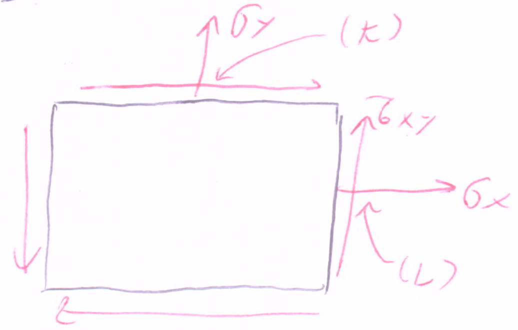
$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_0}{F.S} \Rightarrow \sigma_{adm} = 170\ [MPa] \Rightarrow$$ El material falla en (A)

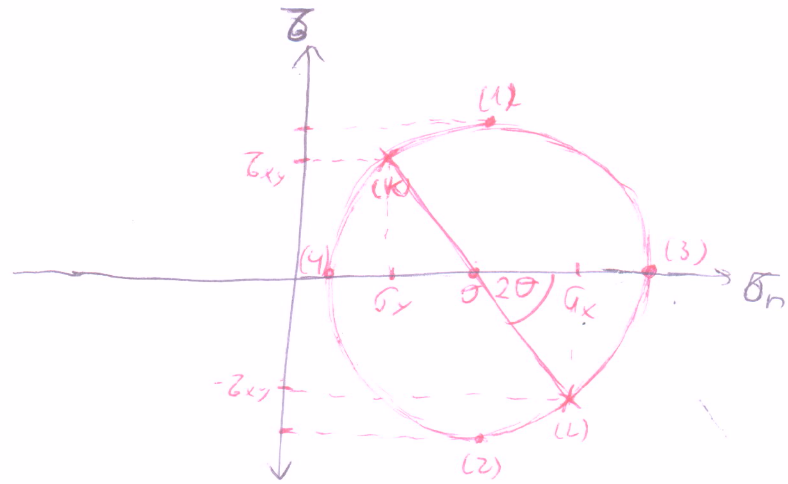
En (B)

$$\sigma_n = 25,0065 \pm 31,609 \quad \boxed{\begin{array}{l} \sigma_{n_1} = 56,6155\ [MPa] \\ \sigma_{n_2} = -6,6025\ [MPa] \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \sigma_{VM} = 60,189\ [MPa] \\ \wedge\ \sigma_{adm} = 170\ [MPa] \end{array}\right\}$$ El material no falla en (B)

P2 | · Círculo de Mohr





* Si τ_{xy} gira cuadrado dif. en el sentido de las manecillas del reloj $\Rightarrow \tau_{xy} > 0$

(1), (2): Esfuerzos de corte máximo y mínimo

(3), (4): Esfuerzos normales máximo y mínimo

θ: Ángulo que debe rotar el cuadrado diferencial para lograr los esf. normales

· Criterios de falla

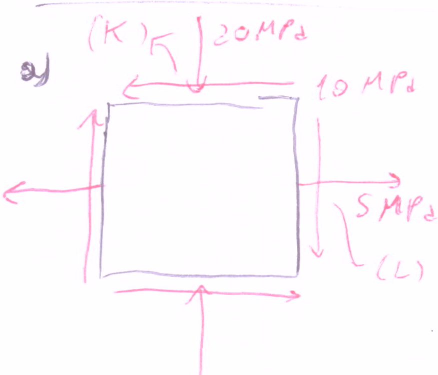
↳ Criterio del esfuerzo normal máximo: $\sigma_{adm} \leq \frac{\sigma_0}{F.S.} \wedge \sigma_0 = \sigma_y$

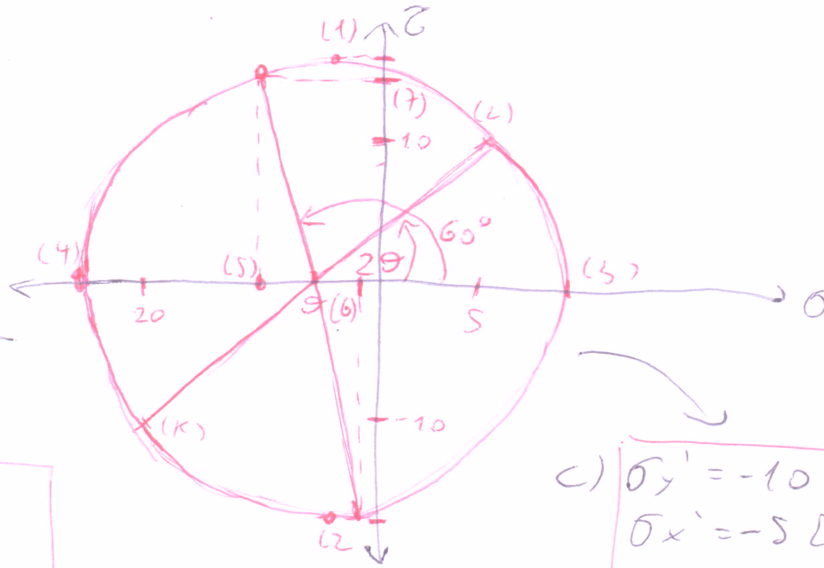
↳ Criterio del esfuerzo de corte máximo (Tresca): $\tau_{adm} \leq \frac{\tau_0}{F.S.}$ y $\tau_0 = \frac{\sigma_y}{2}$

↳ Criterio de Von Mises: $\sigma_{VM} \leq \frac{\sigma_0}{F.S} \wedge \sigma_{VM} \equiv \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$

$\sigma_0 = \sigma_y$

a)





$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_1 = 8{,}1 \text{ [MPa]} \\ \sigma_2 = -24 \text{ [MPa]} \\ 2\theta = 38° \Rightarrow \theta = 19° \end{array}}$

b) $\boxed{\tau = 16{,}1 \text{ [MPa]}}$

c) $\boxed{\begin{array}{l} \sigma_y' = -10 \text{ [MPa]} \\ \sigma_x' = -5 \text{ [MPa]} \\ \tau_{xy} = 15{,}7 \text{ [MPa]} \end{array}}$

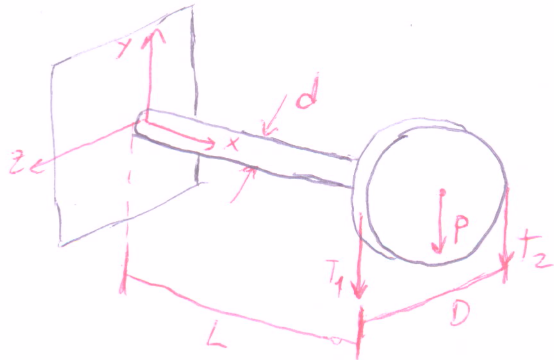
d) $\sigma_{VM} = \sqrt{8{,}1^2 + (-24)^2 + 8{,}1 \cdot 24}$

$\sigma_{VM} = 28{,}914 \text{ [MPa]} > \frac{\sigma_0}{F.S} = 27{,}5 \text{ [MPa]}$

∴ Se produce falla

$\sigma_{VM} > \frac{\sigma_0}{}$

P3



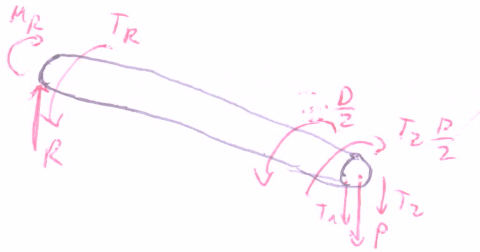
* Propiedades de área

$\hookrightarrow A = \dfrac{\pi d^2}{4} = 2{,}827 \cdot 10^{-3}\ m^2$

$\hookrightarrow I = \dfrac{\pi d^4}{64} = 6{,}362 \cdot 10^{-7}\ m^4$

$\hookrightarrow J = \dfrac{\pi d^4}{32} = 1{,}272 \cdot 10^{-6}\ m^4$

a) DCL



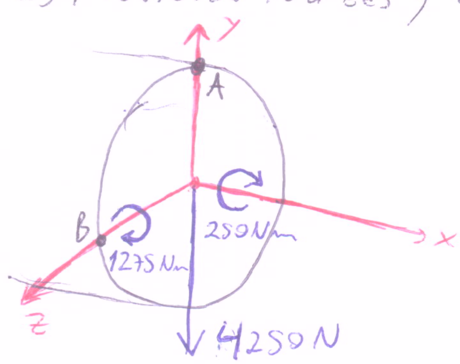
$$\left.\begin{aligned} R &= T_1 + T_2 + P = 4250\ N \\ T_R &= (T_1 - T_2)\frac{D}{2} = 250\ N\cdot m \\ M_R &= -(T_1 + T_2 + P)L = -1275\ Nm \end{aligned}\right.$$

$\rightarrow$ Sólo $M(x)$ cambia con la distancia x

$$\left.\begin{aligned} M(x) &= M_R + x\cdot R \\ &= -R\cdot L + xR \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{M(x) = R(x-L)}$$

$\rightsquigarrow$ M es máximo cuando $x = 0$, es decir, en el empotramiento //

b) Moviendo fuerzas y torques al empotramiento



* Esfuerzos en (A):
- Esfuerzo de corte τ_{xz} por torsión de 250 N·m
- Esfuerzo de tracción σ_x por flexión por Momento de 1275 N·m

* Esfuerzos en (B):
- Esfuerzo de corte τ_{xy} por fuerza de corte de 4250 N
- Esfuerzo de corte τ_{xy} por torsión de 250 N·m

c) • Punto (A)

$\rightsquigarrow$ Torsión de 250 Nm : $\tau_{xz} = \dfrac{T\left(\frac{d}{2}\right)}{J} = \dfrac{250[Nm]\cdot 0{,}03[m]}{1{,}272\cdot 10^{-6}[m^4]} = 5{,}896\ [MPa]$

$\rightsquigarrow$ Tracción por flexión de 1275 N·m : $\sigma_x = -\dfrac{M}{I}y = \dfrac{1275[N\cdot m]\cdot 0{,}03[m]}{6{,}362\cdot 10^{-7}[m^4]} = 60{,}123\ [MPa]$

• Punto (B)

~> Torsión de 250 Nm : $\tau_{xy} = 5,896$ [MPa]

~> Corte por fuerza de 4250 N : $\tau_{xy} = \frac{V}{It}\int_{y}^{c} \xi \, dA$ //

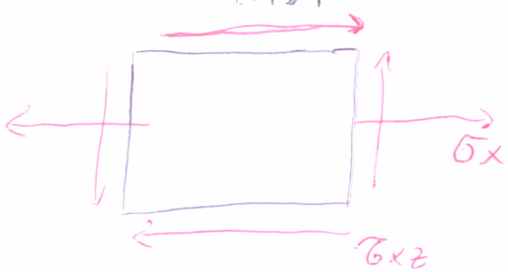
$*$ Desde ej. (1): $\int_{y}^{c} \xi \, dA = 2\int_{0}^{d/2} \xi \sqrt{\frac{d^2}{4} - \xi^2}\, d\xi = \frac{d^3}{12}$

• $y = 0, \; c = \frac{d}{2}, \; t = d$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{-4250 \, N}{6,362 \cdot 10^{-7} m^4 \cdot 0,06 \, m} \cdot \frac{(0,06)^3 m^3}{12} = -2,004 \text{ [MPa]}$$

• Estados de esfuerzo:

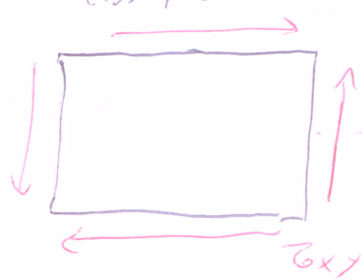
(A) plano x-z



$\sigma_x = 60,123$ [MPa]

$\tau_{xz} = 5,896$ [MPa]

(B) plano x-y



$\sigma_x = 0$

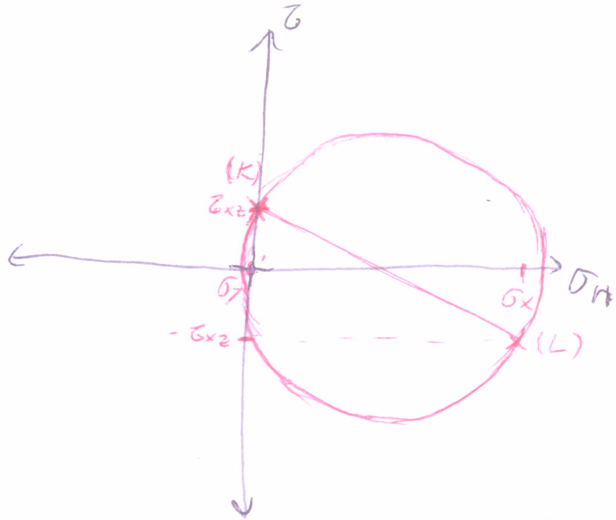
$\tau_{xy} = 3,892$ [MPa]

d) (A) : (K) $\Rightarrow \sigma_z = 0$

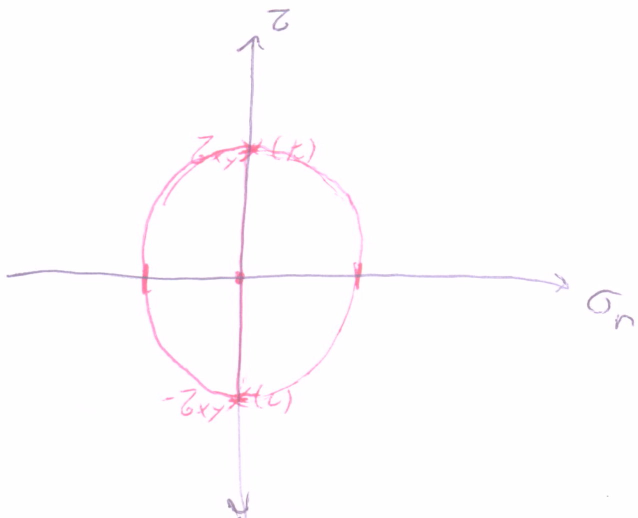
$\tau_{xz} = 5,896$

(L) $\Rightarrow \sigma_x = 60,123$

$\tau_{xz} = -5,896$



$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_{max} = 62 \text{ MPa } (\sigma_1) \\ \sigma_{min} = -1 \text{ MPa } (\sigma_2) \end{array}}$$ (A)



(B) : (K) $\Rightarrow \sigma_x = 0$

$\tau_{xy} = 3,592$

(L) $\Rightarrow \sigma_x = 0$

$\tau_{xy} = -3,592$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_{max} = 3,592 \text{ [MPa] } (\sigma_1) \\ \sigma_{min} = -3,592 \text{ [MPa] } (\sigma_2) \end{array}}$$ (B)

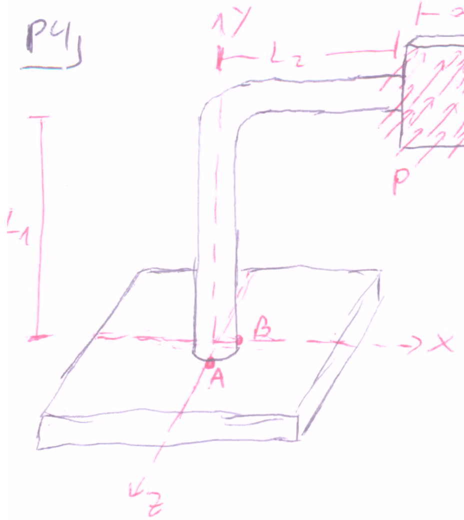
e) (A) $\rightarrow \sigma_{vm} = \sqrt{62^2 + (-1)^2 - 62 \cdot (-1)} = 62,5 \text{ [MPa]}$

$\frac{\sigma_0}{F.S} = 136 \text{ [MPa]}$ $\Rightarrow$ Dado que $\sigma_{vm} < \frac{\sigma_0}{F.S}$, el material no falla

(B) $\rightarrow \sigma_{vm} = \sqrt{(3,592)^2 + (-3,592)^2 - 3,592 \cdot (-3,592)} = 6,23 \text{ [MPa]}$

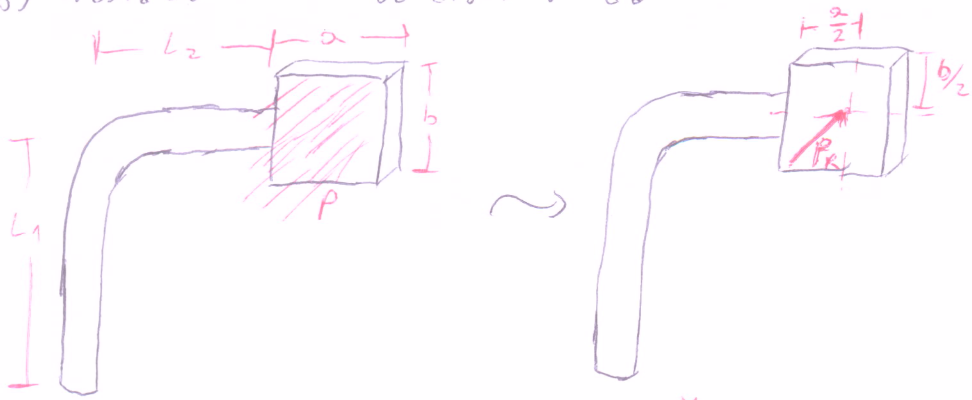
$\Rightarrow$ Dado que $\sigma_{vm} < \frac{\sigma_0}{F.S}$, el material no falla //

P4)



a) Dado que el empotramiento está a mayor distancia de la zona donde se aplica P, entonces los momentos flectores serán mayores en esa zona. (y de torsión)

b) Trasladando la fza distribuida P



$$\boxed{P_R = P \cdot a \cdot b}$$

$$\boxed{T_R = P_R\left(L_2 + \frac{a}{2}\right)}$$

$$\boxed{M_R = -P_R \cdot L_1}$$

$P_R = 1680\ N$
$T_R = 3696\ N \cdot m$
$M_R = 6720\ N \cdot m$

- Esfuerzos en (A)
  - ↳ Esf. de corte τ_{xy} por torsión T_R
  - ↳ Esf. de tracción σ_y por momento flector M_R

- Esfuerzos en B
  - ↳ Esf. de corte τ_{yz} por torsión T_R
  - ↳ Esf. de corte σ_z por fuerza de corte P_R

* Propiedades de área: ($D_{int} = D_{ext} - 2e = 10$ cm)

$$I = \frac{\pi}{64}\left(D_{ext}^4 - D_{int}^4\right) = 5{,}27 \cdot 10^{-6}\ [m^4]$$

$$J = \frac{\pi}{32}\left(D_{ext}^4 - D_{int}^4\right) = 1{,}054 \cdot 10^{-5}\ [m^4]$$

• Punto (A)

↳ Corte por torsión T_R: $\tau_{xy} = \dfrac{T_R\left(\frac{D_{ext}}{2}\right)}{J} = \dfrac{3696[N\cdot m]\cdot 0,06[m]}{1,054\cdot 10^{-5}[m^4]} = 21,04\,[MPa]$

↳ Tracción por momento M_R: $\sigma_y = \dfrac{M_R\left(\frac{D_{ext}}{2}\right)}{I} = \dfrac{6720[N\cdot m]\cdot 0,06[m]}{5,27\cdot 10^{-6}[m^4]} = 76,509\,[MPa]$

• Punto (B)

↳ Corte por torsión T_R: $\tau_{yz} = -21,04\,[MPa]$

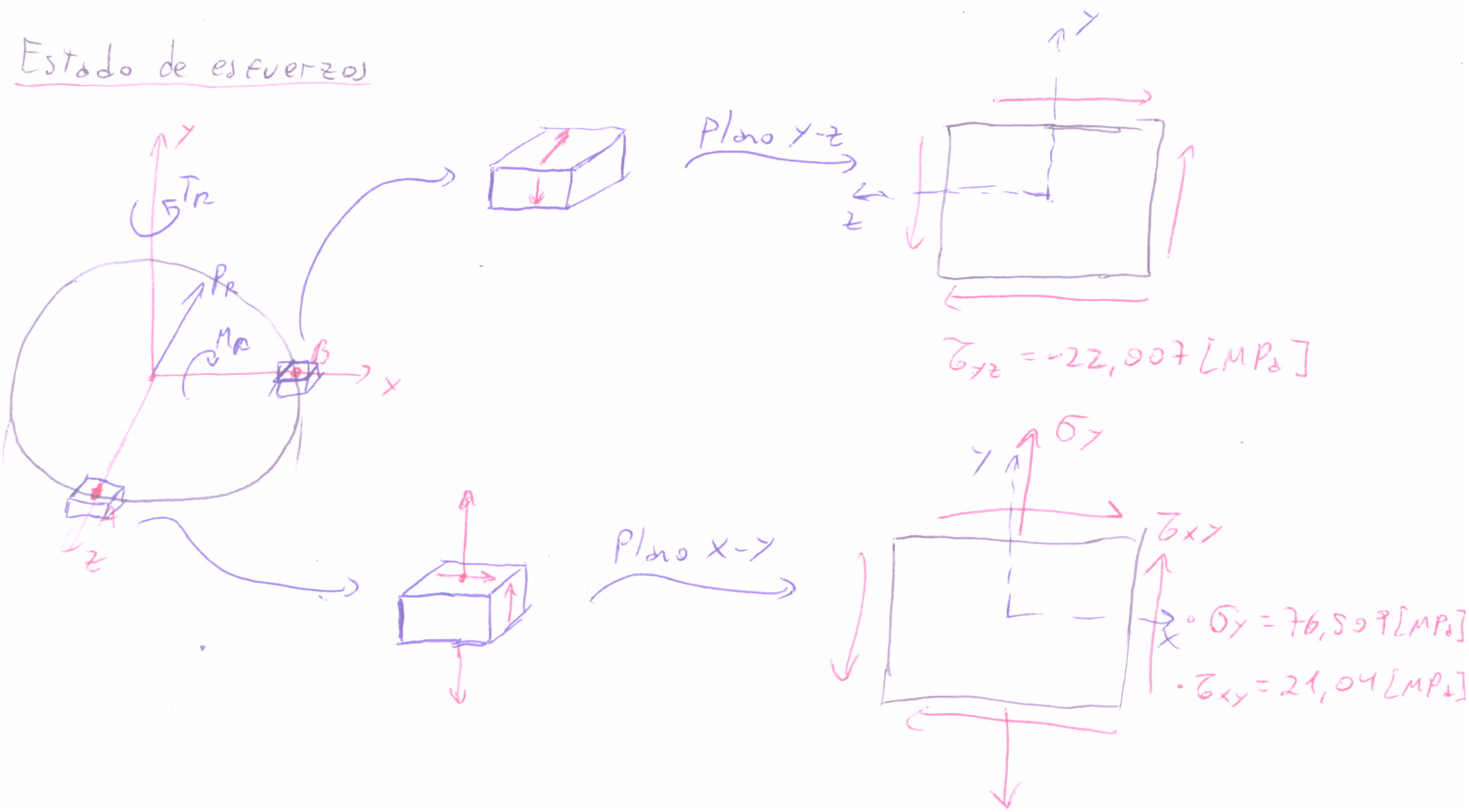
↳ Corte por fuerza P_R: $\tau_{yz} = \dfrac{\mp P_R}{It}\displaystyle\int_y^c \xi\, dA$ // $t = D_{ext} - D_{int} = 2e$

$$* \int_y^c \xi\, dA = \int_0^{D_{ext}} \xi\, dA - \int_0^{D_{int}} \xi\, dA \underbrace{=}_{\text{Desde P1}} \frac{D_{ext}^3}{12} - \frac{D_{int}^3}{12}$$

$$\Rightarrow \tau_{yz} = \frac{-1680[N]}{5,27\cdot 10^{-6}[m^4]\cdot 0,02[m]}\cdot\left(\frac{0,12^3}{12} - \frac{0,1^3}{12}\right)[m^3]$$

$$\tau_{yz} = -0,967\,[MPa]$$

• Estado de esfuerzos



c) Cálculo analítico de esf. normales y de corte máximos/mínimos

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$\Rightarrow$ (A): $\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 76{,}509 \text{ [MPa]} \\ \tau_{xy} &= 21{,}04 \text{ [MPa]} \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{76{,}509}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{76{,}509}{2}\right)^2 + (21{,}04)^2} \\ &= 38{,}25 \pm \underbrace{43{,}659}_{\tau} \end{aligned}$

$$\boxed{\therefore\ \sigma_{max} = 81{,}909 \text{ [MPa]} \quad \sigma_{min} = -5{,}409 \text{ [MPa]} \quad // \quad \tau = 43{,}659 \text{ [MPa]}}$$

(B): $\left.\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= 22{,}007 \text{ [MPa]} \end{aligned}\right\}$ $\sigma_n = \pm 22{,}007$ [MPa]

$$\boxed{\therefore\ \sigma_{max} = 22{,}007 \text{ [MPa]} \quad \sigma_{min} = -22{,}007 \text{ [MPa]} \quad // \quad \tau = 22{,}007 \text{ [MPa]}}$$

d) $\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 100 \text{ [MPa]} \longrightarrow \boxed{\frac{\tau_0}{F.S} = 50 \text{ [MPa]}}$

(A) $\Rightarrow \tau = 43{,}659 \text{ [MPa]} < \frac{\tau_0}{F.S}$ $\Rightarrow$ Material no falla en (A)

(B) $\Rightarrow \tau = 22{,}007 \text{ [MPa]} < \frac{''}{F.''}$ $\Rightarrow$ Material no falla en (B)