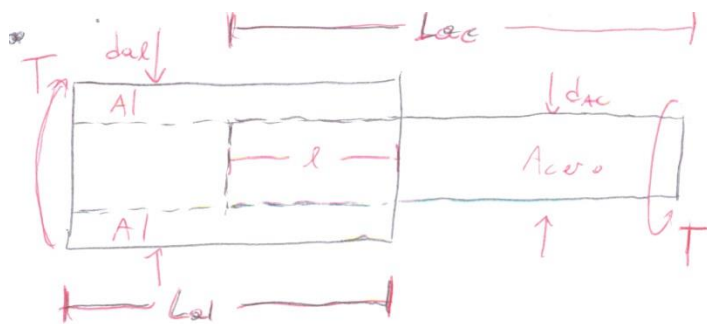




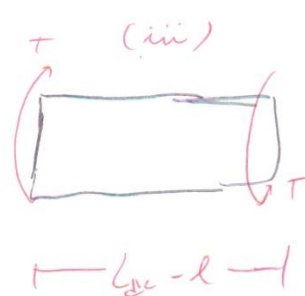
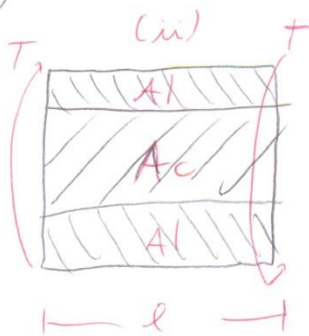
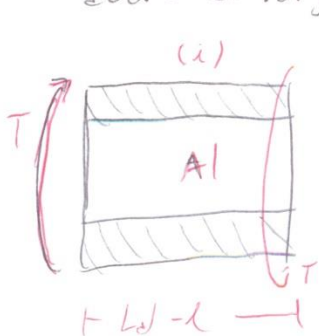
$$l = 20 \text{ cm}$$

$$G_{ac} = 75 \text{ GPa}; L_{ac} = 90 \text{ cm}; d_{ac} = 7 \text{ cm}$$

$$G_{al} = 27 \text{ GPa}; L_{al} = 70 \text{ cm}; d_{al} = 10 \text{ cm}$$

a) * La torsión total debe ser de $\theta^e = 0,1222 \text{ rad}$

* El sistema completo está compuesto de tres partes: Un tubo de Al de largo $(L_{al} - l)$, un tubo compuesto de Al y acero de largo l y una barra de acero de largo $(L_{ac} - l)$.



* Luego, el ángulo total de torsión será:

$$\Delta\theta_i + \Delta\theta_{ii} + \Delta\theta_{iii} = 0,1222 \text{ rad} \quad (+)$$

$$(i) \quad T_{al} = \frac{G \theta \Delta}{L} \rightarrow \Delta\theta_i = \frac{T(L_{al} - l)}{G_{al} \cdot J_i} \quad \text{y} \quad J_i = \frac{\pi}{32} (d_{al}^4 - d_{ac}^4)$$

$$\therefore \Delta\theta_i = \frac{32 T (L_{al} - l)}{\pi G_{al} (d_{al}^4 - d_{ac}^4)} \quad (*)$$

(ii) Existe fórmula para barra cilíndrica de dos materiales concéntricos:

$$T = \frac{2\pi \cdot \Delta\theta_b}{l} \left[G_{ac} \frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_{al}}{64} (d_{al}^4 - d_{ac}^4) \right]$$

$$\Rightarrow \Delta \vartheta_{ii} = \frac{T \cdot l}{\left(G_{ac} \frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_{al}}{64} (d_{al}^4 - d_{ac}^4) \right) 2\pi} \quad (**)$$

iii) Barra de acero $\Delta \vartheta_{iii} = \frac{32T (L_{ac} - l)}{\pi G_{ac} \cdot d_{ac}^4} \quad (***)$

* Juntando (*), (**) y (***) en (+):

$$T \left[\frac{32(L_{al} - l)}{\pi G_{al} (d_{al}^4 - d_{ac}^4)} + \frac{l}{\left(G_{ac} \frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_{al}}{64} (d_{al}^4 - d_{ac}^4) \right) 2\pi} + \frac{32(L_{ac} - l)}{\pi G_{ac} \cdot d_{ac}^4} \right] = 0,1222$$

* Despejando para T $\leadsto T = 40574,6 \text{ Nm}$

b) * Se tiene que $\tau = \frac{T r}{J} \Rightarrow T = \frac{\tau_{max} \cdot J}{r}$

* Para (i) $\leadsto J = \frac{\pi}{32} (d_{al}^4 - d_{ac}^4) \Rightarrow T = 4476 \text{ Nm}$

* Para (ii) es mas complejo. Construyamos una expresion para τ :

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J} \quad ; \quad T = \frac{G \vartheta \theta}{l} \Rightarrow \tau = \frac{G \vartheta \theta r}{\delta l}$$

$$\therefore \tau = \frac{G \vartheta r}{l}$$

* En el caso de un cilindro compuesto, se tiene

$$\frac{\Delta \vartheta_{\theta}}{l} = \frac{T}{2\pi \left[G_{ac} \frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_{al}}{64} (d_{al}^4 - d_{ac}^4) \right]}$$

* Multiplicando por G_{al} y por $r = \frac{d_{al}}{2}$, obtenemos τ :

$$\tau = \frac{T d_{al} G_{al}}{4\pi \left[G_{ac} \frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_{al}}{64} (d_{al}^4 - d_{ac}^4) \right]}$$

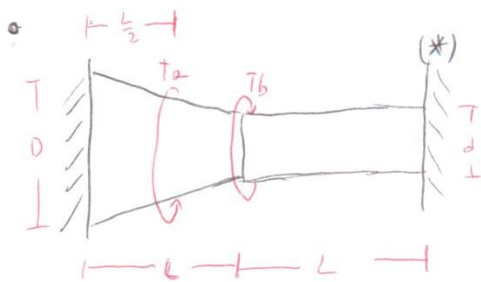
$$\therefore T = \frac{4\pi \tau_{max} \left[G_{ac} \frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_d}{64} (d_d^4 - d_{ac}^4) \right]}{d_d G_d} = 8404,8 \text{ Nm}$$

c) Análogo a parte b)

$$\text{ii)} \quad T = \frac{4\pi \tau_{max} \left[G_{ac} \frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_d}{64} (d_d^4 - d_{ac}^4) \right]}{d_{ac} G_{ac}} = 8644,9 \text{ Nm}$$

$$\text{iii)} \quad T = \frac{\tau \cdot J}{r} \quad / \quad r = \frac{d_{ac}}{2} \quad \wedge \quad J = \frac{\pi}{32} d_{ac}^4$$

$$\therefore T = 4040,87 \text{ N.m}$$



$$D = 10 \text{ cm}$$

$$d = 6 \text{ cm}$$

$$L = 40 \text{ cm}$$

$$T_2 = 500 \text{ Nm}$$

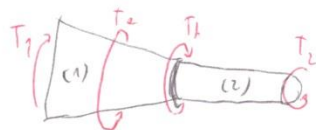
$$T_b = 300 \text{ Nm}$$

$$G_1 = 50 \text{ GPa}$$

$$G_2 = 60 \text{ GPa}$$

* Cuando existen torques en medio de barras se requiere realizar cortes imaginarios antes y después de cada torque para observar qué momento produce qué torsión en la barra.

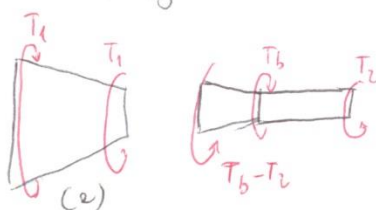
* DCL completo



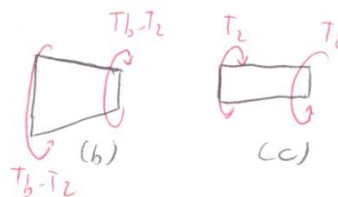
$$\sum T = 0 \Rightarrow T_1 + T_b = T_2 + T_2$$

$$\boxed{T_1 = T_2 + T_2 - T_b} \quad *$$

* Cortes imaginarios:



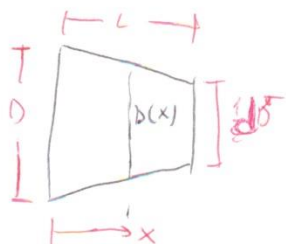
(Antes y después de T_2)



(Antes y después de T_b)

* Cada trozo sufrirá una torsión diferente. Lo que se hará es calcular el ángulo de torsión de cada trozo de izquierda a derecha, e imponer que el ángulo de torsión en (*) es cero.

* Torsión sección cónica (e)



$\sim$ D varía con la distancia de manera lineal

$$x = 0 \rightarrow D(0) = D$$

$$x = L \rightarrow D(L) = d$$

$$\boxed{D(x) = D - (D-d) \frac{x}{L}}$$

$$d^* = \frac{1}{2}(D+d)$$

* Tomando un elemento diferencial:



$$J(x) = \frac{\pi D(x)^4}{32}$$

$$T = \frac{GJ\theta}{x}$$

$$\boxed{d\theta = \frac{T}{GJ(x)} dx} \quad (*)$$

* Integrando (*) en L ($T = T_1$)

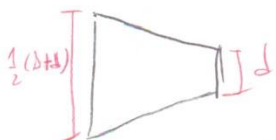
$$\int d\theta_a = \frac{T_1}{G_1} \int_0^{L/2} \frac{dx}{J(x)} = \frac{32T}{\pi G_1} \int_0^{L/2} \frac{dx}{[D - (D-d)\frac{x}{L}]^4}$$

* Sabiendo que: $\int \frac{1}{(\alpha x + \beta)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)\alpha} \cdot \frac{1}{(\alpha x + \beta)^{n-1}}$

$$\Rightarrow \Delta\theta_a = \frac{32T_1L}{3\pi G_1(D - \frac{1}{2}(D+d))} \left(\frac{1}{[D - (D-d)\frac{x}{L}]^3} \right) \Big|_0^{L/2}$$

$$\therefore \Delta\theta_a = \frac{64TL}{3\pi G_1(D-d)} \left(\frac{8}{(D+d)^3} - \frac{1}{D^3} \right) = 6,472 \cdot 10^{-7} T_1$$

* Para torsión sección cónica (b) ($T = T_b - T_2$)



$$\Delta\theta_b = \frac{32(T_b - T_2)L}{3\pi G_1(D-d)} \left(\frac{1}{[D - (D-d)\frac{x}{L}]^3} \right) \Big|_{L/2}^L$$

$$\therefore \Delta\theta_b = \frac{32(T_b - T_2)L}{3\pi G_1(D-d)} \left(\frac{1}{D^3} - \frac{8}{(D+d)^3} \right) = 1,818 \cdot 10^{-6} (T_b - T_2)$$

* Torsión sección cilíndrica (c) ($T = T_2$)

$$\Delta\theta_c = \frac{T_2 L}{G_2 J} \quad \text{y } J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_c = 5,24 \cdot 10^{-6} T_2$$

* Imponiendo que el ángulo de torsión en (*) es cero:

$$\Delta\theta_a + \Delta\theta_c - \Delta\theta_b = 0$$

$$\Rightarrow 6,472 \cdot 10^{-7} T_1 + 5,24 \cdot 10^{-6} T_2 - 1,818 \cdot 10^{-6} T_b - 1,818 \cdot 10^{-6} T_2 = 0$$

12

* Desde el DCL $\star$, reemplazando en la ec. anterior, es posible encontrar un valor para $T_2 \neq T_1$

$$T_2 = 54 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \wedge \quad T_1 = 254 \text{ N}\cdot\text{m}$$

* Para determinar los máximos esf. de corte por torsión:

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad \leadsto \quad \tau_{\max} = \frac{T r_{\max}}{J} \quad / \quad r_{\max} = \frac{d}{2}$$

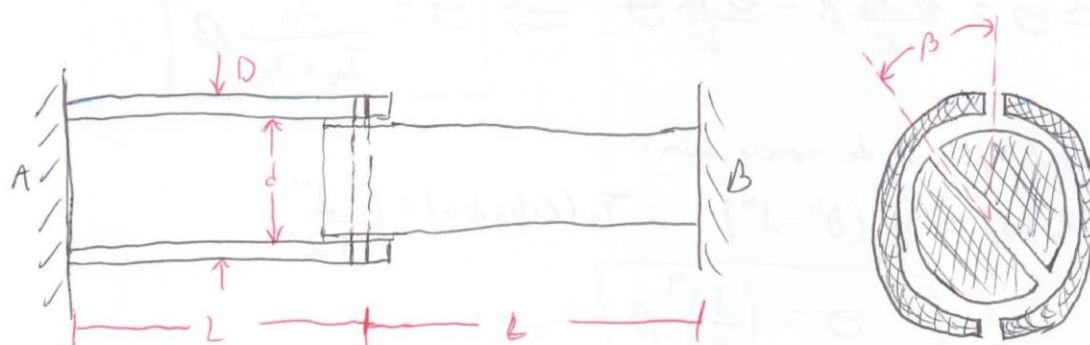
$$a) \quad \tau_{\max} = \frac{T_1 \cdot \frac{D(x)}{2}}{\frac{\pi \cdot D(x)^4}{32}} = \frac{16}{\pi} \frac{T_1}{D(x)^3} \quad / \quad \begin{array}{l} D(x)_{\max} = D \\ \text{Máximo en } D(x) \text{ cuando} \\ D(x) = \frac{D+L}{2} \quad (x = \frac{L}{2}) \end{array}$$

$$\therefore \tau_{\max} = 2,527 \text{ MPa}$$

$$b) \quad \tau_{\max} = \frac{(T_b - T_2)}{D(x)^3} \cdot \frac{16}{\pi} \quad / \quad \text{max en } x = \frac{L}{2} \leadsto D(L) = d$$

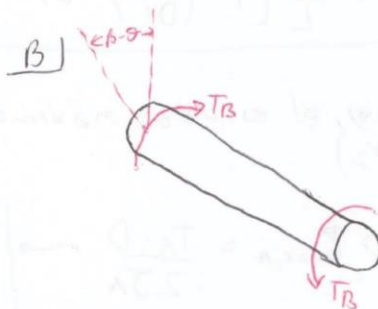
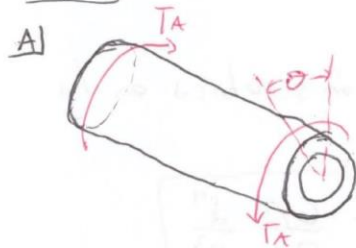
$$\therefore \tau_{\max} = 5,8093 \text{ MPa}$$

$$c) \quad \tau_{\max} = \frac{16}{\pi} \frac{T_2}{d^3} = 1,2732 \text{ MPa}$$

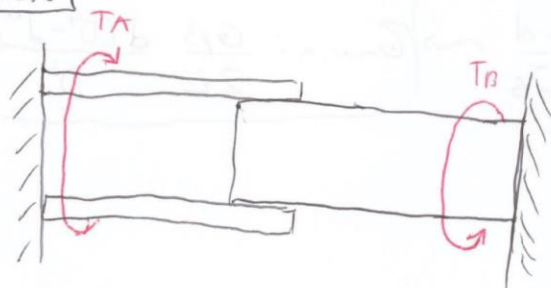


* La barra B se debe torcer un ángulo β para que los agujeros coincidan. Al soltar la barra B, ésta se devuelve cierto ángulo θ , mientras que la barra A se torce el mismo ángulo θ :

DCL



Completo



$$T_A = T_B$$

* Calculando las torsiones:

$$\rightarrow T_A = \frac{G \cdot J_A}{L} \theta_A = \frac{G \cdot J_A}{L} \theta \quad \wedge \quad T_B = \frac{G \cdot J_B}{L} \theta_B = \frac{G \cdot J_B}{L} (\beta - \theta)$$

* Como $T_A = T_B$, calculamos θ :

$$\frac{G J_A}{L} \theta = \frac{G J_B}{L} \beta - \frac{G J_B}{L} \theta \Rightarrow \theta = \frac{J_B}{J_A + J_B} \beta$$

* Los momentos polares de inercia son:

$$J_A (\text{Tubo}) = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \quad \text{y} \quad J_B (\text{Cilindro}) = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\therefore \theta = \left(\frac{d}{D} \right)^4 \beta$$

* Reemplazando en las torsiones:

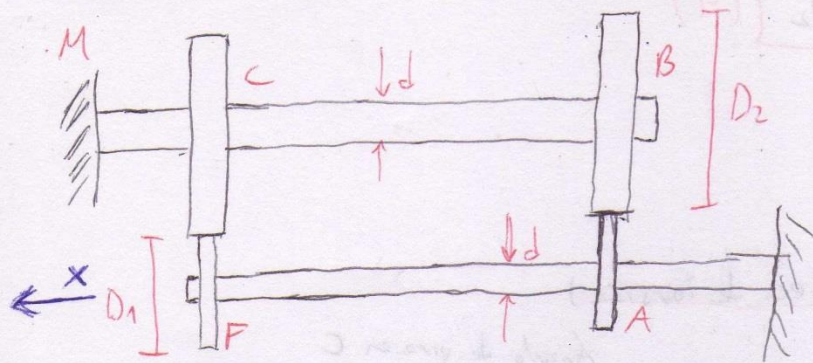
$$T_A = \frac{G}{L} \left(\frac{d}{D} \right)^4 J_A \beta$$

$$T_B = \frac{G}{L} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) J_B \beta$$

* En cilindros y tubos, el esfuerzo máximo de torsión se ubica en la superficie ($r = D/2$)

$$\tau = \frac{T r}{J} \Rightarrow \tau_{\max, A} = \frac{T_A \cdot D}{2 J_A} \leadsto \tau_{\max, A} = \frac{G \beta}{2 L} \frac{d^4}{D^3}$$

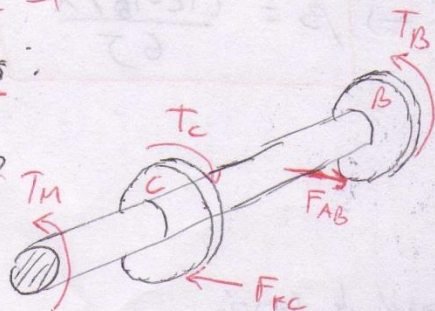
$$\Rightarrow \tau_{\max, B} = \frac{T_B \cdot d}{2 J_B} \leadsto \tau_{\max, B} = \frac{G \beta}{2 L} \frac{d (D^4 - d^4)}{D^4}$$



$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ m} \\ l &= 39 \text{ cm} \\ d &= 5 \text{ cm} \\ D_1 &= 15 \text{ cm} \\ D_2 &= 40 \text{ cm} \\ \theta &= 30^\circ \\ G &= 90 \text{ GPa} \end{aligned}$$

• DCL's:

~ MCB



$$\sum T_x = 0$$

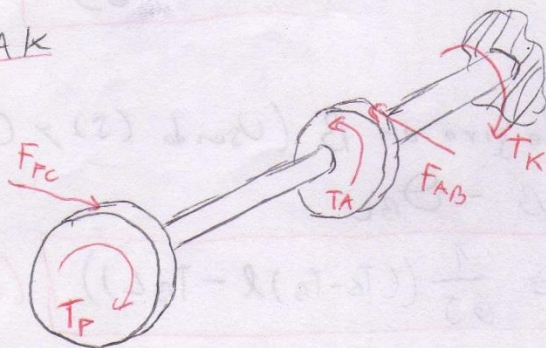
$$T_m = T_c - T_B$$

$$\text{donde } T_c = F_{FC} \cdot \frac{D_2}{2}$$

$$T_B = F_{AB} \cdot \frac{D_2}{2}$$

(1)

~ FAK



$$\sum T_x = 0$$

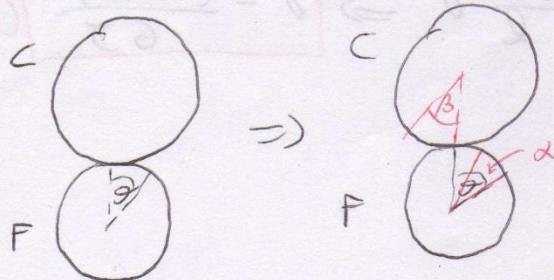
$$T_K = T_A - T_F$$

$$T_A = F_{AB} \cdot \frac{D_1}{2}$$

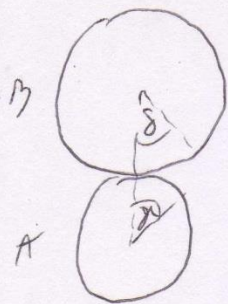
$$T_F = F_{FC} \cdot \frac{D_1}{2}$$

(2)

• Relaciones entre ángulos de engranajes:



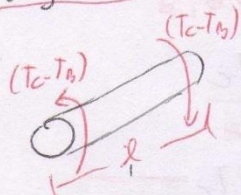
$$\therefore \alpha D_1 = \beta D_2 \quad (3)$$



$$\therefore \delta D_1 = \delta D_2 \quad (4)$$

• Cortes en los ejes (Utilizando ec. de torsión)

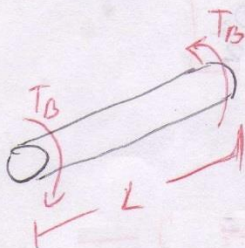
→ Segmento MC



$$(T_C - T_B) = \frac{GJ}{l} \beta \Rightarrow \beta = \frac{(T_C - T_B) l}{GJ} \quad (5)$$

Ángulo de giro en C

→ Segmento CB



$$T_B = \frac{GJ}{L} \theta_{BC} \Rightarrow \theta_{BC} = \frac{T_B L}{GJ} \quad (*)$$

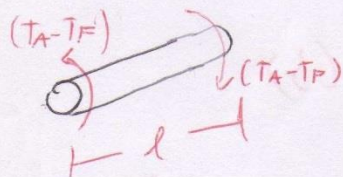
Ángulo de torsión del segmento CB

∴ Ángulo total de giro en B (Usando (5) y (*))

$$\hookrightarrow \delta = \beta - \theta_{BC}$$

$$\therefore \delta = \frac{1}{GJ} ((T_C - T_B) l - T_B L) \quad (6)$$

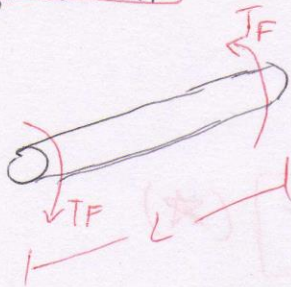
→ Segmento KA



$$(T_A - T_F) = \frac{GJ}{l} \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{(T_A - T_F) l}{GJ} \quad (7)$$

Ángulo de giro en A

→ Segmento AF



$$T_F = \frac{GJ}{L} \theta_{AF}$$

↖ Ángulo de torsión del segmento AF

$$\Rightarrow \theta_{AF} = \frac{T_F L}{GJ} \quad (**)$$

∴ Ángulo total de giro en F = $\theta - \theta_{AF}$
(Usando (7) y (**))

• El ángulo total de giro en F es lo que giró antes (θ) menos lo que se restringió elásticamente (α)

$$\Rightarrow \theta - \alpha = \frac{1}{GJ} ((T_A - T_F)L - T_F L) \quad (8)$$

• Ahora reemplazando ecuaciones hasta encontrar las fuerzas de contacto F_{FC} y F_{AB} :

* (7) en (4) $\Rightarrow \frac{(T_A - T_F)L}{GJ} D_1 = \delta D_2 \Rightarrow \delta = \frac{D_1}{D_2} \frac{(T_A - T_F)L}{GJ} \quad (9)$

* (9) en (6) $\Rightarrow \frac{D_1}{D_2} \frac{(T_A - T_F)L}{GJ} = \frac{1}{GJ} ((T_C - T_B)L - T_B L)$

$$\therefore (T_A - T_F)L \cdot \frac{D_1}{D_2} = (T_C L - (L+L)T_B) \quad (A)$$

* (5) en (3) $\Rightarrow \alpha D_1 = \frac{(T_C - T_B)L}{GJ} D_2 \Rightarrow \alpha = \frac{D_2}{D_1} \frac{(T_C - T_B)L}{GJ} \quad (10)$

* (10) en (8) $\Rightarrow \theta - \frac{D_2}{D_1} \frac{(T_C - T_B)L}{GJ} = \frac{1}{GJ} ((T_A - T_F)L - T_F L)$

~~$$(T_C - T_B)L \cdot \frac{D_2}{D_1} = \theta GJ - (T_A L - (L+L)T_F)$$~~

$$(T_C - T_B)L \cdot \frac{D_2}{D_1} = \theta GJ - (T_A L - (L+L)T_F) \quad (B)$$

• Reemplazando (1) y (2) en (A) y (B)

$$(A) \left(F_{AB} \cdot \frac{D_1}{2} - F_{FC} \cdot \frac{D_1}{2} \right) \frac{l D_1}{D_2} = F_{FC} \cdot \frac{D_2 l}{2} - F_{AB} \frac{D_2}{2} (l+L)$$

$$(F_{AB} - F_{FC}) l D_1^2 = (F_{FC} l - F_{AB} (l+L)) D_2^2 \quad (\star)$$

• De

$$(B) \left(F_{FC} \cdot \frac{D_2}{2} - F_{AB} \cdot \frac{D_2}{2} \right) \frac{l D_2}{D_1} = 2 G J - \left(F_{AB} \cdot \frac{D_1 l}{2} - F_{FC} \cdot \frac{D_1 (l+L)}{2} \right)$$

$$(F_{FC} - F_{AB}) l D_2^2 = 2 G J - (F_{AB} l - F_{FC} (l+L)) D_1^2 \quad (\star \star)$$

• Finalmente, se resuelve el sistema de ecuaciones para $(\star)$ y $(\star \star)$

$$F_{FC} = \frac{2 D_1 G J [D_2^2 (l+L) - D_1^2 l] \theta}{L [l (D_2^4 - D_1^4) + D_1^2 D_2^2 (2l+L)]}$$

$$F_{AB} = \frac{2 D_1 G J (D_2^2 - D_1^2) l \theta}{L [l (D_2^4 - D_1^4) + D_1^2 D_2^2 (2l+L)]}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = 6,136 \cdot 10^{-7} \text{ [m}^4\text{]}$$

• Reemplazando valores: $F_{FC} = 26275,1 \text{ [N]}$ y $F_{AB} = 5385,58 \text{ [N]}$

• Los valores de las torsiones son: $T_A = 403,92 \text{ [N.m]}$; $T_B = 1077,12 \text{ [N.m]}$
 $T_C = 5255,02 \text{ [N.m]}$; $T_F = 1970,63 \text{ [N.m]}$

• Finalmente calculando los esf. máximos:

Eje MCB

Segmento MC: $\tau_{max} = \frac{(T_C - T_A) \cdot \frac{d}{2}}{J}$

$$\tau_{max} = 170,22 \text{ [MPa]}$$

Segmento CB: $\tau_{max} = \frac{T_B \cdot \frac{d}{2}}{J}$

$$\tau_{max} = 43,885 \text{ [MPa]}$$

Eje FAK

Segmento KA: $\tau_{max} = \frac{(T_A - T_F) \cdot \frac{d}{2}}{J}$

$$\tau_{max} = 63,833 \text{ [MPa]}$$

Segmento AF: $\tau_{max} = \frac{T_F \cdot \frac{d}{2}}{J}$

$$\tau_{max} = 80,287 \text{ [MPa]}$$