spanishstringprocess BibliografÃaCapÃtuloAppendixApÃ©ndiceList of FiguresÃndice de figurasList of TablesÃndice de cuadrosIndexÃndice alfabÃ©ticopÃ¡ginavÃ©asevÃ©ase tambiÃ©nDemostraciÃ^3*nContentsÃndice*

*spanishcaptions

spanishstringprocess PrefacioReferencesReferenciasAbstractResumenBibliografíaCapítuloAppendixApéndiceList of FiguresÍndice de figurasList of TablesÍndice de cuadrosIndexÍndice alfabéticoFigureFiguraTableCuadroPartParteAdjuntoCopia aApáginavéasevéase tambiénDemostraciónGlosarioContentsÍndice *spanishdate

month1nameenero,febrero,marzo,abril,mayo,junio,julio,agosto,septiembre,octubre,noviembre,diciembre ucmonth1nameEnero,Febrero,Marzo,Abril,Mayo,Junio,Julio,Agosto,Septiembre,Octubre,Noviembre,Diciembre December 5, 2015

MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre 2015-2

Profesores: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Emilio Molina F. **Ayudante:** Martín Castillo & Pablo Koch

Control 2

P1. *Control de un carro de metro*

Consideremos un carro de metro que se mueve en línea recta. En el instante $t_0 = 0$ el carro de metro se encuentra en reposo en una posición $x_0 > 0$, correspondiente a algún punto de la línea 1. Se desea llevar el carro a la siguiente estación Universidad de Chile, ubicada para nuestros propósitos en la posición 0, es decir, $(\dot{x}(t_f) = x(t_f) = 0)$, donde el tiempo final t_f es libre.

La variable de control es la aceleración $\ddot{x}(t) = u(t)$. Por razones de tecnología y para la comodidad de los pasajeros, la aceleración está acotada entre $[-1, 1]$.

Se desea minimizar una combinación convexa entre el tiempo de viaje y el consumo de energía a lo largo de la trayectoria que es igual a $|u(t)|$ en cada tiempo, es decir:

$$J := (1-c)t_f + c\int_0^{t_f} |u(t)|dt \quad 0 < c < 1.$$

a) (0.5 pts.) Escriba el problema anterior como un problema de control óptimo de tipo Lagrange.

b) (1.5 pts) Utilice el principio (del mínimo) de Pontryaguin para caracterizar los extremales ($p_0 = 1$) del problema expresado en función del estado adjunto.

c) (1.5 pts) A partir de las condiciones de transversalidad, demuestre que:

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, t_f],$$

donde $\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}$ son los extremales del problema. Concluya que el estado adjunto es la forma $\bar{p_1}(t) = c_1$ y $\bar{p_2}(t) = -c_1 t + c_2$, donde c_1 no puede ser 0.

d) (0.5 pts.) Muestre que el control no puede partir siendo 0. Pruebe también que partiendo desde cualquier valor, el control tampoco puede terminar siendo 0.

e) (1.5 pts.) Encuentre los tiempos en que el control cambia de valor, el tiempo total de la operación óptima y sintetice el control extremal.

f) (0.5 pts.) Asumiendo que este extremal es óptimo, muestre que la función valor en función de x_0 viene dada por $V(x_0) = 2\sqrt{\alpha(\alpha+1)x_0}$.

P2. *Explotación de Recursos Naturales*

Suponga un recurso natural explotable del cual se posee una cantidad inicial $x_0 > 0$. El horizonte de explotación T es una variable libre y corresponde al primer momento en el que $x(T) \in \mathcal{T} \doteq \{x \leq 0\}$. Considere un país que desea explotar el recurso de manera de maximizar el flujo de utilidad en el tiempo. El problema que enfrenta el país se muestra a continuación:

$$V(x) = \sup_{c \in \mathcal{U}} \left\{ \int_0^T e^{-\lambda t} \cdot u(c(t))dt \,:\, \dot{x} = \alpha \cdot x - c,\; x(0) = x_0 \right\},$$

donde $\mathcal{U} = \{c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ medible}\}$, $T = \inf\{t \geq 0 : x(t) \in \mathcal{T}\}$, u es cóncava y diferenciable, y $\alpha \in \mathbb{R}$ es dado. En lo que sigue supondremos que V es diferenciable.

a) (1.5 pts.) Escriba las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) y utilicelas para determinar una ecuación diferencial ordinaria que caracterice V.

Ahora considere que dos países (a y b) deben compartir el recurso natural. Cada uno tiene funciones de utilidad marginal u_a y u_b, tasas de descuento λ_a y λ_b. Las funciones valor pro país son:

$$V_a(x) = \sup_{c_a \in \mathcal{U}} \int_0^T e^{-\lambda_a t} \cdot u_a(c_a(t))dt \qquad \text{y} \qquad V_b(x) = \sup_{c_b \in \mathcal{U}} \int_0^T e^{-\lambda_b t} \cdot u_b(c_b(t))dt$$

que comparten la dinámica común $\dot{x} = \alpha \cdot x - c_a - c_b$ y $x(0) = x_0$. En lo que sigue supondremos que ambas funciones valores son diferenciables.

b) (1.5 pts.) *(Equilibrio de Nash)* Suponga que a conoce $c_b(t)$, usando el principio (del mínimo) de Pontryaguin encuentre el control óptimo para a. Haga lo mismo para b suponiendo que conoce $c_a(t)$.

c) (1.5 pts.) *(Equilibrio Perfecto en Subjuegos)* Ahora las estrategias de extracción dependen de cuanto recurso hay disponible. Suponga que a conoce $c_b(x)$, usando HJB encuentre la ecuación diferencial ordinaria que satisface $V_a(x)$. Haga lo mismo para b suponiendo que conoce $c_a(x)$.

a) (1.5 pts.) Resuelva las ecuaciones de las partes anteriores para: $u_a(c) = u_b(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, $\alpha = 0$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Y compare las funciones de valor en los 3 casos. ¿Que le recomendaría hacer a los países que comparten un mismo recurso natural?

P3. *Soluciones de viscosidad*

a) *(Cambio de variables de Kruzkov)* Sea $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suficientemente regular. Demuestre que u es una solución de viscosidad de $\|Du(x)\| - l(x) = 0$ si y sólo si $v(x) = -e^{-u(x)}$ es solución de viscosidad de

$$\|Dv(x)\| + l(x)v(x) = 0.$$

b) Muestre que, para cada $t \in [0, 1]$, la función

$$v_t(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leq x < -t \\ x^2 - 1 + 2(1 - t^2), & |x| \leq t \\ 1 - x^2, & t < x \leq 1 \end{cases}$$

es una solución de viscosidad de la ecuación

$$|v'(x)| - 2|x| = 0, \quad x \in (-1, 1)$$

con condiciones de Dirichlet $v_t(-1) = v_t(1) = 0$.