MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre 2015-2
Profesores: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Emilio Molina F. **Ayudante:** Martín Castillo & Pablo Koch

Control 1

P1. *Venta rápida de bonos*

El gobierno ha creado un nuevo tipo de bono, el cual pretende difundir entre la población. Para efectos de la evolución de este bono, la población ha sido dividida en 2 grupos etarios: jóvenes y adultos. La información se transmite internamente en cada grupo etario con tasas $\alpha > 0$ (jóvenes) y $\beta > 0$ (adultos), mientras que entre grupos etarios distintos esta se traspasa con tasas que dependen del momento. El gobierno puede invertir en publicidad en ambos grupos etarios, esta será la variable de control $u = (u_j, u_a)$, la cual es limitado por el presupuesto asignado a publicidad. Así, si denotamos por x_j (x_a) la población de jóvenes (adultos) que aún no han sido informados sobre el bono, el problema que debe resolver el gobierno se reduce a llevar en tiempo mínimo el siguiente sistema al origen:

$$\dot{x}_j = -\alpha x_j + f(t)x_a - u_j; \quad \dot{x}_a = -\beta x_a - u_a, \qquad \text{con } x_j(0), x_a(0) > 0$$

a) (1 pto.) Reescriba la dinámica del problema como uno lineal, no autónomo. Identifique claramente la dinámica.

Suponga que $f(t)$ es una función constante y que no tenemos restricciones para el control.

b) (1 ptos.) Pruebe que para cualquier valor de f el sistema es controlable.

c) (1.5 ptos.) Sea un observador de la forma $y = C^T x$, con $C \in \mathbb{R}^2$. Pruebe que para que el sistema sea observable, se debe observar al menos parcialmente la población joven y se debe imponer cierta restricción sobre la constante $f(t)$. Explicite esta restricción.

Sea ahora $f(t) = e^{(\beta-\alpha)t}$ y consideramos restricciones de presupuesto tal que $u_j + u_a \leq 1$ y $u_j, u_a \geq 0$.

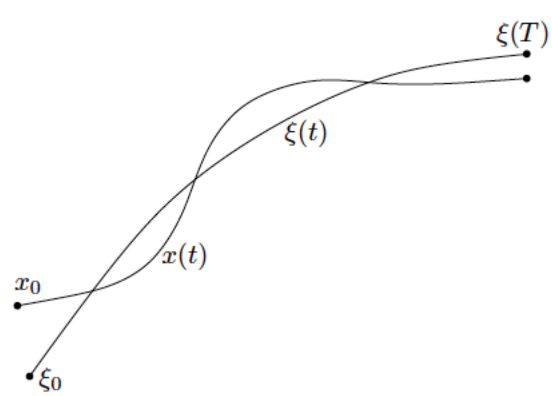
d) (2.5 ptos.) Usando el principio de Pontryaguin para problemas de tiempo mínimo caracterice el control óptimo.

P2. *Problema de persecución*

Consideremos el sistema lineal no-autónomo controlado en $[0, T]$:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T], \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ (dado)}, \tag{1}$$

donde $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $r(\cdot)$ son funciones en L^∞ de $[0, T]$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente, y $u(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$. Para $\xi(\cdot)$ una función definida de $[0, T]$ en $\mathbb{R}^n$, que parte en ξ_0, nuestro objetivo es encontrar $u(\cdot)$ de manera que $x(\cdot)$, solución de (1), aproxime lo mejor posible $\xi(\cdot)$.



Para esto, estudiaremos como se comporta el error de aproximación:

$$z(t) := x(t) - \xi(t) \text{ en } [0,T], \quad z(0) = z_0 := x_0 - \xi_0,$$

para el cual es razonable considerar el "costo de persecución":

$$J(u(\cdot)) = z(T)^\top Q z(T) + \int_0^T (\|z(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt,$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y semidefinida positiva.

a) (1.5 pt.) Encuentre la dinámica de la forma (1) que satisface $z(\cdot)$ y usando la nueva variable $z_1(\cdot) = \left(z(\cdot), \overrightarrow{1}\right)^\top$ reescriba el problema de persecución como un problema lineal cuadrático (donde no aparece ruido).

b) (1.5 pts.) A partir del ítem anterior encuentre la ecuación de Ricatti que satisface la solución del problema de persecución.

Hint: Considerar $E_1 = \begin{pmatrix} E & h \\ h^T & \alpha \end{pmatrix}$ la matriz de Riccati asociada a z_1.

c) (1 pts.) Concluya que la solución es un feedback de la forma $u(t) = K(t)z(t) + H(t)$ para ciertas funciones $K(\cdot)$ y $H(\cdot)$ que van de $[0,T]$ en $\mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Identifique claramente $K(\cdot)$ y $H(\cdot)$ en función de E, h y α.

d) (2 pts.) Usando lo anterior, resuelva el problema de persecución entre $[0,\pi/2]$ para el sistema $\dot{x} = x + u$, $x(0) = 0$, la función $\xi(t) = t$ y $Q = 1$.

P3. *Caracterización Hamiltoniana de controles singulares*

Consideremos el sistema no lineal no-autónomo controlado en $[0,T]$:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{c.t.p. } t \in [0,T], \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ (dado)}, \tag{2}$$

donde f es una función continuamente diferenciable de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ y $u(\cdot) \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$ es tal que $x(\cdot)$, solución de (2), esta definida al menos en $[0,T]$. En el resto de esta pregunta denotaremos, como es usual, por $\mathcal{A}_T$ a este espacio de controles admisibles y a $x(\cdot)$ a la trayectoria asociada a $u(\cdot)$.

Recordemos que un control $u(\cdot)$ se dice singular (en $[0,T]$ para (2)) si la derivada de la aplicación entrada-salida evaluada en $u(\cdot)$, denotada por $dE(u(\cdot))$, no es sobreyectiva. Definamos el Hamiltoniano asociado a (2) como

$$H(t,x,p,u) := p^\top f(t,x,p,u) \quad \text{para } (t,x,p,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \text{ (vistos para esta definición como vectores).}$$

a) (3 pts.) Pruebe que todo control singular $u(\cdot)$ satisface el siguiente **Principio de Pontryaguin** existe $p(\cdot)$ función absolutamente continua de $[0,T]$ en $\mathbb{R}^n$, no trivial, tal que

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t,x(t),p(t),u(t)), \;\; \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t,x(t),p(t),u(t)), \;\; \frac{\partial H}{\partial u}(t,x(t),p(t),u(t)) = 0, \;\; \text{c.t.p. } t \in [0,T].$$

Indicación: Utilice la caracterización, vía variación de parámetros, de $dE(u(\cdot))$.

b) (1 pto.) Calcule los controles singulares del sistema: $\dot{x}_1 = x_2 + u$, $\dot{x}_2 = x_1 + u^2$.

c) (2 pts.) Suponga que ahora se quisiera minimizar el criterio $J(u(\cdot)) = \int_0^T l(t,x(t),u(t))dt$, donde l es una función continuamente diferenciable de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}$. Pruebe si $u(\cdot)$ es solución de este problema entonces es singular en $[0,T]$ para el sistema aumentado:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad \dot{x}_{n+1}(t) = l(t,x(t),u(t)), \quad \text{c.t.p. } t\in[0,T], \qquad x(0) = x_0,\ x_{n+1}(0) = 0.$$

Indicación: Muestre que si $u(\cdot)$ es óptimo entonces $x(T) \in \partial \widetilde{\mathrm{Acc}}((x_0,0),T)$, siendo este último conjunto la frontera del conjunto de puntos accesibles desde $(x_0,0)$ en T para el sistema aumentado.

d) (1 pto. Bonus!) A partir de las partes anteriores, explícite el Principio de Pontryaguin que satisface $u(\cdot)$ optimal para el problema de optimización planteado, conocido como **Principio Débil de Pontryaguin**.

Tiempo: 4hrs