

MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre 2015-02

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Emilio Molina **Ayudante:** Martín Castillo & Pablo Koch.

Proyecto de investigación: El modelo de crecimiento Neoclásico de Ramsey

Descripción: El objetivo de este proyecto es estudiar el modelo de Ramsey, en el cual los consumidores maximizan su utilidad a lo largo de un horizonte infinito. Este modelo es adecuado para estudiar el crecimiento de las economías así como la respuesta óptima del gobierno frente a shocks. En particular, la idea es maximizar la utilidad en un cierto período de tiempo. Para ello se debe describir y resolver un problema de control óptimo, obteniéndose una política óptima de control basada en el principio del máximo de Pontryagin. Se deben entregar simulaciones y ejemplos numéricos.

Introducción El modelo de Ramsey se desarrolló a finales de los años 20, pero el uso del cálculo de variaciones para resolverlo hizo que la mayor parte de los economistas ignoraran su trabajo. No fue hasta 1965 cuando Cass y Koopman desarrollaron un modelo muy similar, aceptado por los economistas. Entonces se comprobó que dicho modelo era en realidad equivalente al desarrollado casi 40 años antes por Ramsey.

En el modelo los agentes tienen 2 facetas: de consumidores y de empresas. Las familias venden su trabajo por un salario el cual distribuyen entre ahorro y consumo. Las empresas contratan trabajo para producir y venden su producto a las familias. Empresas y familias maximizan su utilidad. Los precios del consumo y salario se determinan de manera tal que no quede nadie sin trabajo ni nada sin consumirse (i.e. limpieza de mercado).



Figura 1: Frank Plumpton Ramsey

Suponemos que toda la población se concentra en un punto. Denotamos $L(t)$ a la población en el instante t y suponemos que se rige por:

$$\dot{L}(t) = n \cdot L(t) \quad (1)$$

Los agentes tienen una función de utilidad u estrictamente creciente, cóncava, 2 veces diferenciable y satisface las condiciones INADA (investigar).

Se puede demostrar que el modelo descentralizado en el cual las familias y las empresas maximizan,

y los mercados se limpian, es equivalente al problema de un planificador central que maximiza:

$$\int_0^\infty u\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right) \cdot L(t) \cdot \exp(-\rho \cdot t) dt \quad (2)$$

sujeto a

$$\dot{k}(t) = F(k(t), 1) - (n + \delta)k(t) - c(t), \quad (3)$$

en donde las variables en minúsculas representan variables per cápita, F es la función de producción que es homogénea de grado 1, δ es la depreciación del capital y ρ el factor de impaciencia (tasa de descuento) de los agentes.

Objetivos La idea es utilizar las herramientas teóricas y numéricas de control óptimo estudiadas en el curso para analizar este problema. **Se le otorga cierta libertad a la hora de plantear el problema y en el formato del informe. Sin embargo, debe guiarse por la pauta siguiente que entrega los criterios mínimos a ser evaluados.**

- Estudiar la equivalencia entre el modelo centralizado y el descentralizado.
- Estudiar la controlabilidad de (3) y la estabilidad del estado estacionario.
- Averiguar sobre la condición de *No-Ponzi-Game* y determinar si es necesario imponerla en nuestro problema.
- Determinar el problema de control óptimo. Plantear las ecuaciones de Pontryagin para el modelo y encontrar condiciones sobre el control $c(t)$ que maximiza el Hamiltoniano.
- Caracterizar la solución cuando u es del tipo CRRA y F Cobb-Douglas.
- Investigar la diferencia entre el modelo de Ramsey y el de Solow.
- Estudiar la regla de oro de la tasa de ahorro y la Pareto optimalidad de las soluciones del modelo de Ramsey.

Referencias

- [1] Cass, D., Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem, *Econometrica* 34, 4, pp. 833–850. (1966).
- [2] Dixit, A.. Optimization in Economic theory. Oxford : Oxford University Press. (1990)
- [3] Koopmans, T. C., On the Concept of Optimal Economic Growth, in *The econometric approach to Development Planning*, Pontif. Acad. Sc. Scripta Varia 28, pp. 225–300; reissued North-Holland Publ. (1966).
- [4] Partha S. Dasgupta y Geoffrey M. Heal. *Economic Theory and Exhaustible Resources*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, (1979).
- [5] Frank P. Ramsey. A mathematical theory of saving. *Economic Journal*, vol. 38, no. 152, pp. 543–559. (1928).
- [6] Phillippe Michel. On the transversality condition in infinite horizon optimal problems. (2004).