MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre 2015-02
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Emilio Molina **Ayudantes:** Pablo Koch, Martin Castillo

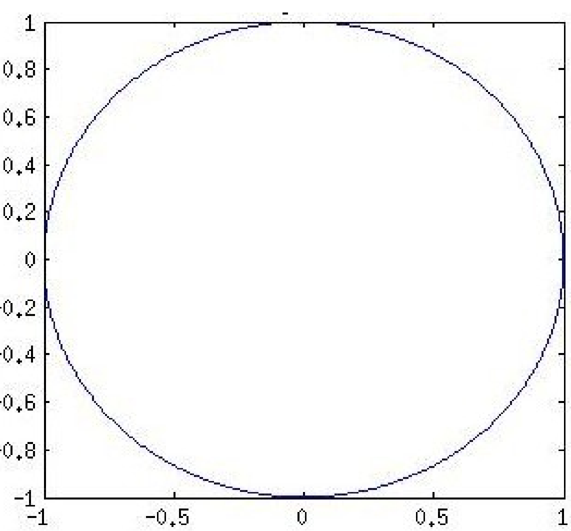
Flujo de Capital Físico en Tiempo y Espacio

Descripción: El objetivo de este proyecto es estudiar el flujo de capital físico, en el cual un planificador central maximiza la utilidad descontada de sus habitantes en horizonte de tiempo infinito. Este modelo es útil para estudiar la distribución del capital en una región específica, tema de interés para la economía del creciemiento y desigualdad. El problema que enfrenta el planificador central es un problema de control óptimo, en cual la variable de control es el consumo. Se deben entregar desarrollos analíticos y numéricos del problema

Introducción

Desde los primeros razonamientos económicos ha existido la idea de que el capital: (i) eleva la producción, y (ii) se mueve a los sectores más rentables (i.e. de menor costo marginal). De esta manera existen fuerzas contrapuestas: por un lado los sectores con una mayor concentración de capital son más productivos y por ende son capaces de aumentar el capital acumulado a una tasa mayor que los sectores de menor capital, por otro lado el capital fluye de sectores con mayor concentración a sectores con menor concentración de capital.

La idea es plantear un modelo simple y estudiar la evolución de concentración de Capital.



Considere una población uniformemente distribuída en el disco unitario de $\mathbb{R}^2$. Que trabaja y consume. El trabajo afecta positivamente la tasa de acumulación de capital a través de una función de producción AK ($F(k) = A \cdot k$) y el consumo lo afecta negativamente ($-c$).

Los capitalistas buscan instalar su capital donde sea más rentable, por ende la balanza comercial τ puede afectar positiva o negativamente dependiendo de si está entrando o saliendo capital. Si consideramos un arco ς arbitrario entre a y b (en coordenadas polares), la balanza comercial debe cumplir lo siguiente:

$$\int_{\varsigma} \tau(t,x)dx = \frac{\partial k}{\partial x}(t,b) - \frac{\partial k}{\partial x}(t,a). \tag{1}$$

Con todo lo anterior se puede deducir que la dinámica del capital en el tiempo y en el espacio es la siguiente:

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(t,x) + A \cdot k(t,x) - c(t,x). \tag{2}$$

Por simplicidad se asume que un planificador central controla el consumo de toda la población e intenta maximizar la función de utilidad descontada CRRA:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left(\int \frac{c(t,x)^{1-\sigma}}{1-\sigma} dx \right) dt. \tag{3}$$

Así dada una distribución de capital inicial k_0 el problema de control óptimo a estudiar corresponde a maximizar (3) s.a. (2) y que el capital sea siempre mayor o igual que cero.

Objetivos La idea es utilizar las herramientas teóricas y numéricas de control óptimo estudiadas en el curso, y las que pueda investigar por su cuenta, para analizar el problema. **Se le otorga cierta libertad a la hora de plantear el problema y en el formato del informe. Sin embargo, debe guiarse por la pauta siguiente que entrega los criterios mínimos a ser evaluados**.

- Interpretar económicamente (1) y las constantes A, σ, ρ. Deducir (2) en forma más detallada.
- Estudiar la controlabilidad del sistema (2), ya sea en su versión analítica o en versiones discretizadas del problema.
- Buscar métodos analíticos y numéricos para resolver (2).
- Demostrar que el control feedback dado por:

$$c^*(t,x) = \frac{\rho - A(1-\sigma)}{2\pi\sigma} \cdot \int k(t,x)dx$$

  cumple con HJB. Y estudie la evolución de la concentración del capital.

Referencias

[1] R. Boucekkine, C. Camacho y G. Fabbri. Spatial dynamics and convergence: The spatial AK model. (2010).

[2] Haim Brezis. Analisis Funcional: Teoría y Aplicaciones (1983).

[3] Jean-Michel Coron. Control and Nonlinearity (2007).

[4] Sorin Micu y Enrique Zuazua. An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations (2002).

[5] Fredi Trolzsch. Optimal Control of Partial Differential Equations (2005).