MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre 2015-02
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Emilio Molina **Ayudante:** Martín Castillo & Pablo Koch.

Proyecto de investigación: Modelación y control en un quimiostato

Descripción: El objetivo de este proyecto es analizar un modelo basado en la dinámica de un quimiostato compuesto por una especie de microorganismo (microalga) y un sustrato del cual se alimenta, maximizar la productividad del proceso de extracción de la microalga a partir de la dilución en un cierto período de tiempo. Para ello se debe describir y resolver un problema de control óptimo, obteniendose una política óptima de control basada en el principio del máximo de Pontryagin y/o basada en las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman. Se deben entregar simulaciones y ejemplos numéricos.

Introducción: Los bioreactores son aparatos de laboratorio usados para diversos experimentos con microorganismos. Reproducen experimentalmente una amplia variedad de sistemas que van desde lagos hasta plantas de tratamiento de aguas, pasando por numerosas aplicaciones productivas.

Podemos describirlo (de manera muy general) como un recipiente con una apertura para que el flujo de material estéril entre y una salida para que el flujo resultante del proceso salga (microorganismos, estéril o nutriente, desechos, etc.) Un quimiostato es un tipo especial de biorreactor que tiene como característica principal que tiene entrada y salida continua de algún flujo. Supogamos que se tiene un Quimiostato aislado con entrada y salida continua de algún sustrato en particular. Dentro del reactor se mantiene un microorganismo que se alimenta del sustrato (por ejemplo, una especie de microalgas).

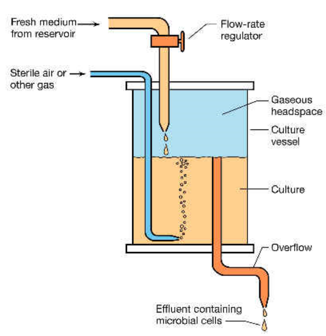

Figura 1: Esquema de un Quimiostato.

Sea $x = x(t)$ la concentración de biomasa del microorganismo en el tiempo t. El crecimento de esta cantidad dependerá de la cantidad de sustrato en el Quimiostato menos la cantidad de biomasa diluída. Por otro lado, la concentración de sustrato dependerá de la cantidad de sustrato de entrada menos la dilución y el consumo por parte de las microalgas.

Llamando s_{in} a la concentración de sustrato de entrada, $\mu(s)$ a la función de crecimiento del microorganismo y D a la tasa de dilución, se tiene que las ecuaciones de estado generales que gobiernan la dinámica del modelo son

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(s)x - Dx, \\ \dot{s} = (s_{in} - s)D - \mu(s)x. \end{cases}$$

Monod alrededor del año 1950 planteó que la tasa de crecimiento depende no solo de la concentración de microorganismos, sino también de la concentración de sustrato. Actualmente se acepta que la conversión de sustratos solubles durante la etapa anaerobia se rige por la ecuación de Monod, quien describió esta relación en forma similar a la propuesta por Michaelis-Menten para la interacción enzima-sustrato

$$\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{s + K},$$

donde μ_{max} representa la tasa máxima de crecimiento, K es la constante de Michaelis-Menten (o tasa de saturación

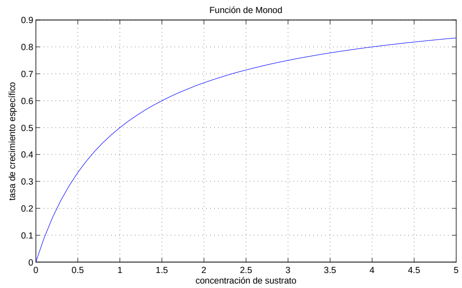

Figura 2: Función de Monod.

media) y $s = s(t)$ representa la concentración de sustrato en un cierto tiempo t. Considerando el crecimiento de tipo Monod, el sistema anterior puede escribirse como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu_{max} \frac{sx}{s+K} - Dx, \\ \frac{ds}{dt} = (s_{in} - s)D - \mu_{max} \frac{sx}{s+K}, \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0 \geq 0, s(0) = s_0 \geq 0$.

Si consideramos la tasa de dilución D como una variable de control $D = D(t)$, el sistema biomasa-sustrato definido arriba, considerando el sustrato de entrada s_{in} constante, es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal controlado afín en la entrada de control.
Se define la productividad como la producción de biomasa por unidad de tiempo y área. En este caso, la productividad en un instante de tiempo puede ser descrita por la expresión $VDx(t)$, que representa la cantidad de biomasa obtenida del quimiostato, extraída a partir del proceso de dilución (flujo de salida del reactor), donde V representa el volumen del quimiostato, el cual consideraremos constante y D representa la tasa de dilución, la cual consideraremos como variable de control del problema y la asumiremos acotada por un cierto valor D_{max}, es decir, $D \in [0, D_{max}]$. Supongamos que se desea maximizar la biomasa extraída del quimiostato en un período de tiempo determinado.

Objetivos: La idea es utilizar las herramientas teóricas y numéricas de control óptimo estudiadas en el curso para analizar un problema del área de bioprocesos. **Se le otorga cierta libertad a la hora de plantear el problema y en el formato del informe. Sin embargo, debe guiarse por la pauta siguiente que entrega los criterios mínimos a ser evaluados.**

- Analizar cualitativamente la dinámica del sistema anterior para distintas concentraciones del sustrato de entrada s_{in} y D constante (acotamiento de soluciones, existencia de puntos de equilibrio, estabilidad local y global, etc.) y entregar simulaciones.

- Estudiar la controlabilidad del sistema linealizado en los puntos de equilibrio y la observabilidad cuando el observable es $y(t) = s(t)$.

- Investigar sobre distintas cinéticas de crecimiento de microorganismos utilizadas en literatura (por ejemplo, Monod, Haldane, Contois, etc.). Estudiar los fenómenos de limitación e inhibición y cómo estos afectan a las distintas funciones de crecimiento. Determinar de qué manera influye el pH en la velocidad de crecimiento de los microorganismos anaerobios.

- Plantear el ejercicio de la maximización de la productividad de la biomasa como un problema de control óptimo (describir el conjunto de controles admisibles, el conjunto objetivo, el Hamiltoniano del problema, las ecuaciones de los estados adjuntos y obtener las condiciones de transversalidad) y resolverlo mediante el uso del Principio del Máximo de Pontryagin (PMP).

- Describir de forma explícita la función valor y las ecuaciones de HJB del problema de control óptimo y resolver analíticamente la ecuación de HJB (de ser posible) o de forma numérica.

Referencias

[1] H. T. Banks, Modeling and Control in the Biomedical Sciences, Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 6, Springer-Verlag, Heidelberg, 1975.

[2] S. B. Hsu, S. Hubbell and P. Waltman, A mathematical theory for single-nutrient competition in continuous culture of micro-organisms, SIAM J. Appl. Math., 32 (1977), 366–383.

[3] J. Monod, La technique de la culture continue: Theorie et applications, Ann. Inst. Pasteur, Lille, 79 (1950), 390–410.

[4] A. Novick and L. Szilard, Description of the Chemostat, Science, 112 (1950) 715–716.

[5] H. L. Smith and P. Waltman, The theory of the chemostat: Dynamics of microbial competition, Cambridge University Press, 1995.

[6] E. Trélat, Contrôle optimal : théorie & applications, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.