Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística
Primavera 2015

Roberto Cortez
Roberto Bobadilla
Dafne Pincheira

# Examen

18 de diciembre de 2015
Tiempo: 3 horas

**P1.** *a*) De un grupo de 5 mujeres y 7 hombres debe formarse un comité de 2 mujeres y 3 hombres. Determine cuántos posibles comités hay si:

1) (1,0 pto.) no hay restricciones.
2) (1,0 pto.) dos hombres están peleados y no pueden ser seleccionados ambos.
3) (1,0 pto.) hay un hombre y una mujer que son pareja y sólo aceptarán ser parte del comité si se seleccionan a ambos.

*b*) (3,0 ptos.) Dos bebés *gemelos* provienen del mismo óvulo, por lo cual tienen siempre el mismo sexo, mientras que dos *mellizos* provienen de óvulos distintos y por lo tanto pueden tener distinto sexo con 50 % de probabilidad. Se sabe que en un 64 % de los partos dobles los bebés son del mismo sexo. ¿Qué porcentaje de los partos dobles son de gemelos?

**P2.** El tiempo de espera de un bus del transporte público se modela como una variable aleatoria $X$ con densidad $f(x) = \theta^{-1}e^{-x/\theta}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, donde $\theta$ es un parámetro desconocido.

*a*) (1,2 ptos.) Argumente o demuestre que $\mathbb{E}(X) = \theta$ y $\mathrm{var}(X) = \theta^2$.

*b*) (1,2 ptos.) Muestre que $e^{-X/\theta}$ tiene distribución $\mathrm{unif}(0, 1)$.

*c*) (1,2 ptos.) Se dispone de una m.a.s $X_1, \dots, X_n$ de la distribución de $X$. Calcule el estimador de máxima verosimilitud de $\theta$.

*d*) (1,2 ptos.) Se utilizará $\bar{X}$ para estimar $\theta$, y se desea que el error relativo (es decir, la diferencia absoluta entre la estimación y $\theta$, dividido por $\theta$) sea menor que 10 % con probabilidad de un 95 %. ¿Cuántas mediciones se necesitan? Aproxime con el TCL.

*e*) (1,2 ptos.) Un parámetro importante es $p$, correspondiente a la probabilidad que el tiempo de espera sea mayor a 10 minutos. En una muestra de tamaño 100, se observó que 10 de los buses tardaron más de 10 minutos. Entregue un intervalo de confianza para $p$ al nivel 90 %.

**P3.** *a*) (3,0 ptos.) Los empleados en una fábrica deben asistir a una capacitación para aprender a armar los componentes de un determinado producto. Existen dos posibles capacitaciones, la Estándar y la Novedosa. Antes de escoger permanentemente una de ellas, se envía a 9 empleados a capacitarse en la primera y a otros 9 a capacitarse en la segunda, y luego se midió el tiempo (en segundos) que tardó cada empleado en armar el producto. Los datos relevantes de estas mediciones se resumen en la tabla. Suponiendo que las muestras provienen de distribuciones normales con la misma varianza, ¿hay suficiente evidencia para afirmar que las capacitaciones generan tiempos de armado promedio distintos? Use $\alpha = 0{,}05$.

| | Estándar | Novedosa |
|---|---|---|
| Tiempo promedio | 390 | 310 |
| $\sum(x_i - \bar{x})^2$ | 1950 | 1250 |

*b*) (3,0 ptos.) En el mercado de telefonía móvil existen 3 compañías: A, B y C. Un estudio de mercado encargado por la compañia A afirma que hay el doble de clientes A que clientes B, y que hay el doble de clientes B que clientes C. Usted, que trabaja para la competencia de A, desconfía de tal afirmación, por lo cual encarga realizar un nuevo estudio con 70 clientes, cuyos resultados se resumen en la tabla. Plantee las hipótesis del test correspondiente, y calcule el $p$-valor (o una aproximación). ¿Es razonable rechazar la afirmación del estudio encargado por A?

| Compañía | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Cantidad de clientes | 34 | 26 | 10 |

**Estadístico comparación de medias:** $T = (\bar{X} - \bar{Y})/(S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}})$, donde $S^2 = [(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2]/(n+m-2)$.
**Estadístico bondad de ajuste:** $\Delta = n\sum_{j=1}^{k}(\hat{p}_j - p_j^0)^2/p_j^0$.
**Estadístico tabla de contingencia:** $\Delta = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\hat{p}_{ij} - \hat{p}_i^X\hat{p}_j^Y)^2/(\hat{p}_i^X\hat{p}_j^Y)$.