Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística
Primavera 2015

Roberto Cortez
Roberto Bobadilla
Dafne Pincheira

Control 3

30 de noviembre de 2015
Tiempo: 3 horas

P1. *a)* (3,0 ptos.) Se sabe que el valor esperado del puntaje que obtiene un alumno en el examen final de un ramo es de 75 y la varianza es 25. ¿Cuántos alumnos tienen que dar el examen para asegurar que, con probabilidad de al menos un 99 %, el promedio de notas esté entre 70 y 80? Obtenga un resultado sin utilizar el teorema central del límite, y otro utilizándolo.

b) (3,0 ptos.) Un productor afirma que al menos el 20 % del público prefiere su producto. Se toma una muestra de 100 personas para verificar su afirmación. Con $\alpha = 0{,}05$, ¿cuál es la mínima cantidad de personas que prefieren el producto de manera que no haya suficiente evidencia para rechazar la afirmación del productor? Si solo 10 personas prefieren el producto, ¿cuál es el resultado del test?

P2. La luminosidad de una estrella, medida por un instrumento adecuado, se modela como una variable aleatoria normal con ambos parámetros desconocidos. Al tomar una muestra de 25 datos usted obtiene un promedio de 204,5 y una desviación estándar muestral de 7,2.

a) (1,5 ptos.) Encuentre un intervalo de confianza para la media al nivel 90 %.

b) (1,5 ptos.) Encuentre un intervalo de confianza para la varianza al nivel 90 %.

c) (1,0 ptos.) Usted se da cuenta que las especificaciones técnicas del instrumento de medición indican que la varianza real de las mediciones es de 49,0. Encuentre un nuevo intervalo de confianza para la media al nivel 90 %.

d) (1,0 ptos.) Usted no está satisfecho con el resultado anterior, y desea obtener un nuevo intervalo cuyo largo sea de a lo más 2,3, manteniendo el nivel de confianza. ¿Cuántas mediciones adicionales necesita?

e) (1,0 ptos.) Usted se da cuenta que no dispone de tiempo para tomar esas mediciones adicionales, y decide trabajar con los 25 datos iniciales. ¿Qué nivel de confianza entrega un intervalo con el largo deseado de 2,3?

P3. Dadas las constantes $\beta > 0$ conocida y $r > 0$ desconocida, sea X variable aleatoria con densidad

$$f_X(x) = \frac{\beta}{r}\left(\frac{x}{r}\right)^{-(\beta+1)} e^{-(x/r)^{-\beta}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

a) (1,2 ptos.) Muestre que $F_X(x) = e^{-(x/r)^{-\beta}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Muestre que $X^{-\beta} \sim \exp(r^\beta)$.

b) (1,2 ptos.) En lo que sigue, sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. proveniente de la distribución de X. Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de r es $\hat{r} = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{-\beta})^{-1/\beta}$.

c) (1,2 ptos.) Muestre que $\hat{r} \to r$ casi seguramente cuando $n \to \infty$. *Indicación:* defina $Y_i := X_i^{-\beta}$ y observe que $\hat{r}^{-\beta} = \bar{Y}$; luego utilice la parte (a) en conjunto con un teorema adecuado.

d) (1,2 ptos.) Muestre que el estadístico $Z := (\hat{r}^{-\beta} - r^{-\beta})/(r^{-\beta}/\sqrt{n})$ posee distribución aproximada $\mathcal{N}(0,1)$ cuando n es grande. *Indicación:* recuerde que si $Y \sim \exp(\lambda)$ entonces $\sigma^2 := \mathrm{var}(Y) = 1/\lambda^2$.

e) (1,2 ptos.) Utilice el estadístico Z para obtener un intervalo de confianza genérico para r al nivel $1 - \alpha$.